

円外帰着波動問題の基本解近似解法の理論・実際・応用*

A Fundamental Solution Method Applied to Reduced Wave Problems in a Domain Exterior to a Disc

— Theory, Practice and Application —

千葉 文浩 (CHIBA, Fumihiro)[†] 牛島 照夫 (USHIJIMA, Teruo)[‡]

大關 正己 (OHZEKI, Masami)[§]

[†] 電気通信大学電気通信学部

(Faculty of Electro-Communications, The University of Electro-Communications),

[‡] 電気通信大学名誉教授 (Professor Emeritus, The University of Electro-Communications),

[§] 富士フイルム株式会社 (FUJI Film Inc.)

Abstract

Our fundamental solution method (FSM) gives an analytic representation of the approximate solution for the reduced wave problem in the exterior region of a disc. The asymptotic behavior of this representation yields an approximate formula for the scattering amplitude. The following theoretical results are mentioned without proof: the solvability of the approximate formula, an error estimate of the approximate solution, some theoretical results for scattering amplitude, an approximate formula of scattering amplitude, and an error estimate of the approximate formula of scattering amplitude. In the last two sections of this paper, we show the results of our numerical tests for the FSM and an FEM-FSM combined method. The FEM-FSM combined method solves the problem in a domain exterior to a simple closed curve.

1 はじめに

我々は、2次元外部帰着波動問題に対して有限要素・基本解近似結合解法を提案し、その数学的正当化を目指して円外帰着波動問題の基本解近似解法を研究してきた。この報告では、研究の過程で得られた散乱振幅の近似公式を含めて概観する。以下では、有限要素法をFEM、基本解近似解法をFSMと略すことがある。

我々の基本解近似解法は選点法に基づくものである。この解法をディリクレ境界条件を課した円外帰着波動問題に適用する。得られる近似解は波源の強さを表す係数 Q_j を

*This work was partially supported by Japan Society for the Promotion of Science Grant-in-Aid for Scientific Research (B) 14340031 and (C) 16540141.

係数とする基底関数の重ね合わせによって表示される。基底関数は、波源を置く点、すなわち波源点に特異性を持つヘルムホルツ方程式の基本解の定数倍であるものを用いる。この近似解の表示から、近似解の遠方での漸近的振る舞いが得られ、散乱振幅の近似公式を導くことが出来る。

以前、本論文の第2著者はラプラス方程式の一般的な形状の外部問題へのFEM-CSM結合解法の理論解析[21]において結果を得た。ここでCSMは代用電荷法の略である。その自然な拡張として一般的な形状の散乱体の2次元外部帰着波動問題に対するFEM-FSM結合解法[23]の研究に着手したが、2次元外部帰着波動問題への基本解近似解法の厳密な理論解析による研究は少なかった。そこで、我々は円外帰着波動問題の基本解近似解法について理論および数値計算による研究を開始した。

いくつかの予備的な結果はUshijima[22]で報告した。Ushijima and Chiba[24]では近似問題($E_f^{(N)}$)の解が一意存在するための条件を示した。次のUshijima and Chiba[25]では、理論および実際の観点から、高振動数の場合を含めた誤差評価を示した。Chiba and Ushijima[4]ではノイマン問題において誤差が $O(\gamma^{N/2})$ で、その次[5]ではディリクレ問題において誤差が $O(\gamma^{N/2}N^{-1})$ で、それぞれ指数的に減少することを示した。ここで、 γ は波源点の載る円の半径を選点のそれで割ったもの、 N は選点の数である。

さらに、ディリクレ問題において、フーリエ-ハンケル級数からの散乱振幅の級数の導出の証明、近似解からの近似散乱振幅公式の導出、近似散乱振幅公式の誤差の指数的減少($O(\gamma^{N/2}N^{-1})$)を報告するべくChiba-Ushijima[6]を準備している。

これらの結果は、境界データがある広いクラスに属するという条件のもとで得られた。また、これらの研究において、多倍長計算による数値実験が理論解析の見通しを得る上で効果的であった。

円内のラプラス方程式への代用電荷法の適用に関する数学的解析の先駆的な結果として、Katsurada and Oakamoto[11]の研究がある。ラプラス方程式への代用電荷法の適用は基本解近似解法の典型的な例である。我々の研究結果はKatsurada and Oakamotoの研究の円外帰着波動問題への自然な拡張と考えられる。

基本解近似解法は外部無限領域の帰着波動問題を数値的に解く方法としてよく知られている。そのなかでも、Sánchez-Sesma and Rosenbluth[18]とSánchez-Sesma[19]の地震波への応用が初期の注目すべき研究である。これらの研究の紹介がMurashima[15]にある。

今回の研究集会の講演で用いた動画とそれに関連する資料は、牛島研究室の大学院博士前期課程の学生であった第三著者[16]の正四角柱による波の散乱のFEM-FSM結合解法による数値計算とその可視化から得られたものである。

以降においては、第2節で連続問題の導入とその級数解(散乱波)の散乱振幅、第3節で基本解近似解法(FSM)の導入、第4節でその可解性の結果、第5節で近似解の誤差評価の理論結果、そして、第6節で散乱振幅の級数に関する結果、近似散乱振幅公式、近似散乱振幅公式の誤差、第7節で3つの数値計算例(数値による誤差評価、合成波、散乱断面積)について述べる。そして、最後の第8節において第三著者によるFEM-FSM結合解法による数値計算について紹介する。

2 円外帰着波動問題と散乱振幅

本節では、連続問題の導入とその解(散乱波の級数)から導かれる散乱振幅の級数について述べる。

散乱波の級数の収束性、散乱波の級数から散乱振幅の級数を導く等の数学解析の結果は6節で述べる。

2.1 円外帰着波動問題

ディリクレ境界条件のもとで、円外帰着波動問題 (E_f) を考察する。これは次のようにして記述される。正数 a, k をそれぞれ円盤の半径、波数 (波数ベクトルの長さ) とする。記号 $|\cdot|$ をユークリッド平面でのノルムとすると、円外領域 Ω_e とその境界 Γ_a を以下のように表す。

$$\Omega_e = \{r \in \mathbb{R}^2; |r| > a\}, \quad \Gamma_a = \{a \in \mathbb{R}^2; |a| = a\}.$$

このとき、ヘルムホルツ方程式、ディリクレ境界条件、ゾンマフェルトの外向き放射境界条件の3つをもって、問題 (E_f) は以下のように記述される。

$$(E_f) \begin{cases} -\Delta u - k^2 u = 0 & \text{in } \Omega_e, \\ u = f & \text{on } \Gamma_a, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right\} = 0. \end{cases}$$

なお、波動方程式: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ を時間方向を変数分離して帰着波動問題を導く際に $u(t, x, y) = e^{-it\omega} u(x, y)$ の形を用いていることを注意する。

ディリクレデータ f のフーリエ係数を

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a) e^{-in\theta} d\theta$$

で与えると、問題 (E_f) の形式解は以下になる。

$$u(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(ka)} e^{in\theta} \quad \text{for } r \geq a. \quad (1)$$

記号 r と a はそれぞれ極座標 (r, θ) と (a, θ) に対応する。ここでは、解 $u(r)$ を散乱波と呼ぶことにする。

2.2 散乱振幅

散乱波 $u(r)$ の散乱振幅 $A(\theta)$ を級数をもちいて形式的に

$$A(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\frac{2n+1}{4}\pi} \frac{f_n}{H_n^{(1)}(ka)} e^{in\theta} \quad (2)$$

で定義する。このとき、散乱波は遠方で以下のように振る舞うことが期待される。

$$u(r) \sim \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} A(\theta) \quad \text{as } r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

3 基本解近似解法

3.1 波源点と選点

正整数 N を選び、固定する。正数 ρ を波源点を置く原点を中心とする円の半径とする ($0 < \rho < a$)。選点を置く円が Γ_a である。選点 a_j と波源点 ρ_j を以下のように定義す

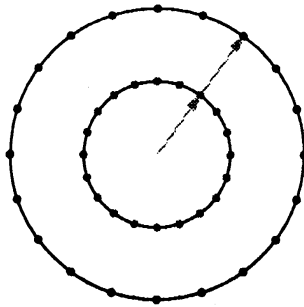


図1 外側の円 (Γ_a) = 選点を置く円, 内側の円 = 波源点を置く円

る. (図1参照)

$$\theta_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad \mathbf{a}_j = (a, \theta_j), \quad \rho_j = (\rho, \theta_j) \quad \text{for } 0 \leq j \leq N-1.$$

ここでは, このような選点・波源点の配置を, 選点波源点等間隔同相配置と呼ぶことにする.

3.2 基本解近似問題

選点波源点等間隔同相配置をとり, 座標 (r, θ) と波源点 (ρ, θ_j) に複素数 $re^{i\theta}$ と $\rho e^{i\theta_j}$ を対応させ, 第1種ハンケル関数 $H_0^{(1)}(\cdot)$ を用いて, 基底関数 $G_j(\mathbf{r})$ を以下のように定義する.

$$G_j(\mathbf{r}) = H_0^{(1)}(k|r e^{i\theta} - \rho e^{i\theta_j}|), \quad 0 \leq j \leq N-1.$$

問題 (E_f) に対応する近似問題 $(E_f^{(N)})$ を次のように定義する. 記号 $\mathbf{a}_j$ は極座標 (a, θ_j) に対応する.

$$(E_f^{(N)}) \begin{cases} u^{(N)}(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{N-1} Q_j G_j(\mathbf{r}), \\ u^{(N)}(\mathbf{a}_j) = f(\mathbf{a}_j), \quad 0 \leq j \leq N-1. \end{cases}$$

ここで Q_j は, $(E_f^{(N)})$ から導かれる Q_j を未知数とする連立一次方程式を解くことによって得られる波源の強さである.

正規化されたパラメータを以下のように導入する:

$$\gamma = \frac{\rho}{a}, \quad \delta = \frac{r}{a}, \quad \kappa = ka.$$

特に, κ を正規化された波数と呼ぶことにする. このとき, 基底関数は以下のように表現される.

$$G_j(\mathbf{r}) = H_0^{(1)}(\kappa|\delta - \gamma e^{-i(\theta - \theta_j)}|), \quad 0 \leq j \leq N-1. \quad (4)$$

4 近似問題の可解性

以下の核関数 g を導入する.

$$g(\theta) = H_0^{(1)}(\kappa|1 - \gamma e^{-i\theta}|). \quad (5)$$

そのとき, Graf の加法定理 [26] から以下を得る.

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(\kappa) J_n(\gamma\kappa) e^{in\theta}.$$

核関数 $g(\theta)$ のフーリエ係数を g_n とする.

$$g_n = H_n^{(1)}(\kappa) J_n(\gamma\kappa) \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

仮定 1 任意の正数 κ を固定する. 適切に $\gamma \in (0, 1)$ を選ぶことにより核関数 $g(\theta)$ は以下の条件 (g) を満たす.

$$(g) \quad g_n \neq 0 \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}.$$

注意 1 正規化された波数 κ を固定する. このとき, (g) は κ に依存する有限個を除く勝手な $\gamma \in (0, 1)$ について満たされる.

近似問題 $(E_f^{(N)})$ の可解性について以下の結果を得ている [24].

定理 1 離散フーリエ係数 $G_n^{(N)}$ を以下で定義する:

$$G_n^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g(\theta_j) e^{-in\theta_j}. \quad (7)$$

条件 (g) のもと, 正整数 N_0 があって, 以下の条件 $(G^{(N)})$ が任意の $N \geq N_0$ について成り立つ. ここで, 正整数 N_0 は κ と γ に依存する.

$$(G^{(N)}) \quad G_n^{(N)} \neq 0 \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}.$$

近似問題 $(E_f^{(N)})$ から導かれる Q_j を未知数とする連立一次方程式の係数行列は巡回行列なので, この方程式を条件 $(G^{(N)})$ のもとに離散フーリエ変換を使って解くことが出来る [9]. このとき, 波源の強さ Q_j は

$$Q_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{F_k^{(N)}}{G_k^{(N)}} e^{ij\theta_k} \quad \text{for } 0 \leq j \leq N-1 \quad (8)$$

で計算される. ここで $F_k^{(N)}$ は以下で定義される離散フーリエ係数である.

$$F_k^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(\theta_j) e^{-ik\theta_j}. \quad (9)$$

5 近似解の誤差の理論評価

基本解近似解法の誤差評価として、以下の結果を得ている [5].

仮定 2 ディリクレデータ f のフーリエ係数を f_n , 核関数 g のフーリエ係数を g_n としたとき, それらの商の上限で表されるディリクレデータ f の密度ノルム $|||q|||$ は有限である.

$$|||q||| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{f_n}{g_n} \right| < \infty.$$

定理 2 仮定 1 と 2 のもとで, 正整数 N_0 が存在して, $N \geq N_0$ において, 以下の評価が成り立つ.

$$\sup_{|r| \geq a} |u(r) - u^{(N)}(r)| < \frac{900 |||q||| \gamma^{N/2}}{\pi(1-\gamma) N}. \quad (10)$$

正整数 N_0 は κ と γ に依存するが, ディリクレデータ f には依存しない.

6 散乱振幅に関する理論結果

仮定 2 で規定される帰着波動問題の解のクラスに対して, 以下の結果が得られている [6].

定理 3 仮定 2 のもとで, 式 (1) の右辺で与えられる $u(r)$ の無限級数表示は $r \geq a$ と $\theta \in [0, 2\pi]$ において絶対かつ一様に収束する.

定理 4 仮定 2 のもとで, 式 (2) の右辺で与えられる $A(\theta)$ の無限級数表示は $\theta \in [0, 2\pi]$ において絶対かつ一様に収束する.

定理 5 仮定 2 のもとで, 以下の公式が成り立つ.

$$A(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \right)^{-1} u(r).$$

この極限移行は $\theta \in [0, 2\pi]$ について一様である.

定義 1 散乱波 $u(r)$ の近似散乱振幅 $A^{(N)}(\theta)$ を以下のように定義する. この定義において r は極座標 (r, θ) を表している.

$$A^{(N)}(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \right)^{-1} u^{(N)}(r).$$

すなわち, $u(r)$ の近似解 $u^{(N)}(r)$ の散乱振幅が $A^{(N)}(\theta)$ である.

定理 6 可解条件 $(G^{(N)})$ のもとで, 近似散乱振幅 $A^{(N)}(\theta)$ は以下のように表される.

$$A^{(N)}(\theta) = \sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} Q_j e^{-i\kappa\gamma \cos(\theta-\theta_j)} \quad \text{with } \theta_j = \frac{2\pi j}{N}. \quad (11)$$

ここで Q_j は (8) で与えられる.

定理 7 可解条件 $(G^{(N)})$ のもとで、正整数 N_0 があって $N \geq N_0$ において以下の不等式が成り立つ.

$$\sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |A(\theta) - A^{(N)}(\theta)| < \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |H_n^{(1)}(\kappa)|^{-1} \frac{900 \|q\| \gamma^{N/2}}{\pi(1-\gamma) N}.$$

正整数 N_0 は κ と γ に依存するが、ディリクレデータ f には依存しない.

7 数値例

基本解近似解法の 3 つの数値例として、数値計算による誤差評価、円柱周りの合成波の計算、円による散乱波の散乱振幅の計算を示す. これらの計算には多倍長演算が用いられている. ただし、一部の計算は倍精度演算 (IEEE 754[10]) で計算を行った. なお、この件で言及している図 2, 図 3, 図 4 は本報告の参考文献につづいて収めている.

7.1 数値例 1: 基本解近似解法の数値計算による誤差評価

境界である円上に計算点を取り、近似解の誤差の振る舞いを数値計算で調べた. 多倍長演算は誤差の指数的減少を確認するのに有効であった.

7.1.1 境界データが $f = e^{i\kappa \cos \theta}$ の場合

ディリクレデータとして次をとる.

$$f = e^{i\kappa \cos \theta}.$$

これはベッセル関数の母関数をつかえば、以下のように展開できる [26].

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\kappa) e^{in\theta}.$$

フーリエ係数を $f_n = i^n J_n(\kappa)$ とする. 仮定 1 のもとで、 $n \rightarrow \pm\infty$ のとき、以下が成り立つ. ここで $g_n = H_n^{(1)}(\kappa) J_n(\gamma\kappa)$ とベッセル関数とハンケル関数の次数による漸近公式を用いた [1].

$$|f_n| = \left| \frac{f_n}{g_n} \right| |g_n| = \left| \frac{J_n(\kappa)}{H_n^{(1)}(\kappa) J_n(\gamma\kappa)} \right| |g_n| \sim \sqrt{\frac{\pi|n|}{2}} \left(\frac{e\kappa}{2\gamma|n|} \right)^{|n|} |g_n|.$$

これより、正定数 C があって

$$|f_n| \leq C |g_n| \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}$$

が満たされる. よって、仮定 2 が成り立ち、定理 2 によって近似解の誤差評価が得られる.

7.1.2 近似解の計算

選点波源点等間隔同相配置を採用し、式 (7), (8), (9) と高速フーリエ変換を用いて波源の強さ Q_j を計算した。そして、 Γ_a 上に等間隔にとった計算点における近似解の値を近似公式を用いて求めた。

選点の数を N 、計算点の個数を NN として、計算桁数などの他の計算パラメータの値を表 1 に記した。選点数が 1024 以下のときは計算点数を 2048 とし、2048 以上のときは 16384 とした。

表 1 近似解の計算パラメータ

	κ	γ	$N = 2^n$	NN	Decimal place
Left column	1, 10, 100, 1000	$0.1 \leq \gamma \leq 0.9$	$1 \leq n \leq 10$	2048	30
Left column	1000	$0.1 \leq \gamma \leq 0.9$	$11 \leq n \leq 13$	16384	30
Right column	1, 10, 100, 1000	$0.1 \leq \gamma \leq 0.9$	$1 \leq n \leq 10$	2048	1600
Right column	1000	$0.1 \leq \gamma \leq 0.9$	$11 \leq n \leq 13$	16384	1600

7.1.3 誤差評価

誤差評価式は以下を用いた。以下で定義した $\tilde{a}_j$ は Γ_a 上にとる計算点である。

$$E^{(NN)}(N) = \max_{0 \leq j \leq NN-1} |u(\tilde{a}_j) - u^{(N)}(\tilde{a}_j)|, \quad \tilde{a}_j = a e^{i\tilde{\theta}_j}, \quad \tilde{\theta}_j = \frac{2\pi j}{NN}. \quad (12)$$

誤差評価の計算結果は、左右それぞれ 4 つのグラフの列として、図 2 に示した。それぞれの列においてグラフは、上から順に正規化された波数 $\kappa = 1, 10, 100, 1000$ に対応する。左の列が 30 桁計算に、右の列が 1600 桁計算に対応する。それぞれのグラフにおいて、それぞれの折れ線は $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ に対応する。折れ線と γ の対応については、図 2 の下部を参照のこと。縦軸は式 (12) の値の 10 を底とする対数、横軸は選点数を表す。

十分大きい N のもとでは、低い波数 ($\kappa = 1, 10$) では、1600 桁計算で指数的な誤差の減少がみられるが、 $\kappa = 100, 1000$ の場合 1600 桁では指数的な減少の実現には足りない。また、多くのケースでパラメータ γ が小さいほど、速く減少することを見て取れる。

高い波数のもとでは γ が小さい場合、不十分な桁数では誤差が減少しにくくなる。逆に $\kappa = 1000$ で 30 桁計算の場合でも、 $\gamma = 0.9$ に対しては N を十分先までとれば 10 桁程度の精度が得られる。

7.2 数値例 2: 合成波

平面波が半径 1 の円柱にぶつかったときの、半径 1 から 3 までの円環領域での合成波の様子を近似解法を用いて計算した。計算は 30 桁計算で行った。

7.2.1 合成波

入射波 $u_i(\mathbf{r})$ に対応する散乱波 $u(\mathbf{r})$ は境界データが $f = -u_i(\mathbf{a})$ である問題 (E_f) の解である。そのとき、合成波 $u_t(\mathbf{r})$ は

$$u_t(\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r})$$

であたえられる。

7.2.2 合成波の計算

入射波を $u_i(\mathbf{r}) = e^{ikx}$ とし、波数を $k = 5$ と 50 にとった。円柱の半径を 1 とすると、正規化された波数はそれぞれ $\kappa = 5$ と 50 となる。この場合、ディリクレデータは $f = -e^{ik \cos \theta}$ である。

近似解法を使って散乱波を計算し、それを入射波と合成した。合成波の計算点は同心円状に等間隔にとった L 個の円上に配置した。これ等の円の最小のものは境界 Γ_a である。各同心円上の計算点の数は近似解法における選点の数 N と等しくした。境界 Γ_a 上では計算点と選点は一致するようにとった。計算は 30 桁でおこなった。計算に用いたパラメータの値は表 2 に示した。

表 2 合成波の計算パラメータ

	a	k	r	γ	N	L	Decimal place
$\kappa = 5$	1	5	$1 \leq r \leq 3$	0.5	1024	128	30
$\kappa = 50$	1	50	$1 \leq r \leq 3$	0.9	2048	256	30

7.2.3 計算結果の可視化

計算した合成波の絶対値のグラフは図 3 に示した。

合成波の絶対値 $|u_t(\mathbf{r})|$ を以下のように正規化し、 $U_t(\mathbf{r})$ とする。ここで記号 R は極座標 (R, θ) に対応する。

$$0 \leq U_t(\mathbf{r}) = \frac{|u_t(\mathbf{r})|}{\max_{1 \leq R \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi} |u_t(\mathbf{R})|} \leq 1.$$

この正規化された $U_t(\mathbf{r})$ の 0 から 1 までの値を黒から白までのグレイスケールに対応させ、ポストスクリプト言語を用いてグラフに表した。特に、0(黒)は波の静止した状態に、1(白)は波の山または谷に対応する。

波数が高いと、円柱の後ろがより暗くなるのが見て取れる。黒い部分では、入射波と散乱波の位相が逆になって打ち消し合っている。これは影 (shadow) もしくは影散乱 (shadow scattering) と呼ばれる現象 [13] に対応していると思われる。

7.3 数値例 3: 散乱断面積

近似散乱振幅公式を使って、円に波がぶつかるときの散乱波の散乱断面積を計算する。ここでは、計算はすべて倍精度演算で行った。

7.3.1 散乱断面積

入射波 $u_i(\mathbf{r})$ に対応する散乱波 $u(\mathbf{r})$ は境界データが $f = -u_i(\mathbf{a})$ である問題 (E_f) の解である。このとき、散乱断面積 $\sigma(\theta)$ は以下の式で計算できる [2]。

$$\sigma(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \left| \frac{u(\mathbf{r})}{u_i(\mathbf{r})} \right|^2.$$

以下の仮定を導入する。

仮定 3 入射波は以下の極限を満たす。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |u_i(\mathbf{r})| = 1.$$

このとき、遠方では式 (3) が成り立つので、散乱断面積 $\sigma(\theta)$ は

$$\sigma(\theta) = 2\pi |A(\theta)|^2$$

で与えられる。そこで、散乱断面積の近似公式を近似散乱振幅公式を使って次のように定義する。

定義 2 仮定 3のもと、近似散乱断面積 $\sigma^{(N)}(\theta)$ を以下のように定義する。

$$\sigma^{(N)}(\theta) = 2\pi |A^{(N)}(\theta)|^2.$$

7.3.2 数値計算と可視化

入射波として、 $u_i = e^{ikx}$ を選ぶと、ディリクレデータは $f = -e^{ik \cos \theta}$ になる。(このディリクレデータは仮定 3 を満たす。) 仮定 2 が満たされるから、定理 7 によって近似散乱振幅公式に対する誤差評価が得られる。

正規化された波数が $\kappa = 5, 50, 500$ の場合に、上のディリクレデータで計算する。選点の数は N とする。計算はすべて倍精度演算で行った。散乱断面積はグラフとして、図 4 に表した。計算パラメータの値は表 3 に示した。表 3 の A に対応するケースでは散乱振幅を計算する角度は選点の角度と同一にして N 個の近似散乱振幅の値を計算した。表 3 の B と C に対応するケースでは図が滑らかになるように変化の激しい部分では計算点を多くとった。

波数が大きくなるにつれ、原点付近はカーディオイドに似た図形に近づき、そのくぼみから発するビームは波数とともにしぼられている様子が見て取れる。

7.4 ソフトウェア

数値計算には以下のソフトウェアを用いた。ソフトウェアライブラリー MPFR[14] と GMP[8] は多倍長計算のためのものである。MPFR は GMP をベースにその浮動小数

表 3 散乱断面積の計算パラメータ

	a	k	κ	γ	N	Precision
A	1	5	5	0.9	1024	double
B	1	50	50	0.9	2048	double
C	1	500	500	0.9	4096	double

点演算機能を拡張したものである。ベッセル関数の多倍長ルーチン作成には Ooura[17] を、多倍長の高速フーリエ変換ルーチンの作成には Brigham[3] のサンプルコードを、参考にした。倍精度演算 (IEEE 754[10]) で実行する計算には対話型数値計算パッケージ Octave[7] を用いた。

数値計算結果の後処理には以下を用いた。数式処理、データ解析、誤差のグラフ作成、散乱断面積の可視化には Mathematica[28] を用いた。合成波のポストスクリプトによる可視化にはライブラリー “psbasic”[12] を用いた。

8 FEM-FSM 結合解法による水の波の運動の計算

牛島研究室の大学院博士前期課程の学生であった第三著者による、遠方からの波が正四角柱にあたって起きる波の運動の時間変化の FEM-FSM 結合解法を用いた数値計算と可視化 [16] について紹介する。講演の際は可視化の成果を動画で示した。

散乱体を人工境界である十分大きな円で囲み、円の内側の内部問題、円の外側の外部問題に分ける。両問題の整合のために、この円上で Steklov 作用素 (DtN 写像) を採用して透過境界条件を導入する。そして数値解法として、内側では透過境界条件のもとで FEM を、外側では FSM を用いる。この研究においては、Steklov 作用素の近似に FSM を応用することがポイントとなる。これを我々は FEM-FSM 結合解法と呼んでいる。なお、本節で言及している図 5 は本報告の最後に収めている。

8.1 一定水深での柱状物体のまわりの線形水の波問題

記号 Ω で xy 平面上の境界 Γ をもつ有界単連結領域を表す。境界 Γ の外側を Ω とする。このとき、 xyz 空間における柱状領域 $\tilde{\Omega}$ を以下のように導入する。

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times (-h, 0).$$

この柱状領域 $\tilde{\Omega}$ の境界 $\tilde{\Gamma}_0$ と $\tilde{\Gamma}_1$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_0 &= \Gamma \times \{0\}, \\ \tilde{\Gamma}_1 &= \tilde{\Gamma}_a \cup \tilde{\Gamma}_b \quad \text{with} \quad \tilde{\Gamma}_a = \Gamma \times (-h, 0) \quad \text{and} \quad \tilde{\Gamma}_b = \Omega \times \{-h\}.\end{aligned}$$

線形水の波の理論 (Stoker[20]) によると、一定水深の無限水域 $\tilde{\Omega}$ においては、以下の

初期値境界値問題が水の波の速度ポテンシャル Φ を定める.

$$(LWW) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \Phi = 0 & \text{in } \tilde{\Omega}, \\ \Phi_{tt} + g \frac{\partial \Phi}{\partial n} = G & \text{on } \tilde{\Gamma}_0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 & \text{on } \tilde{\Gamma}_1, \\ \Phi|_{t=0} = \Phi^1 & \text{on } \tilde{\Gamma}_0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{t=0} = \Phi^0 & \text{on } \tilde{\Gamma}_0. \end{array} \right.$$

ここで既知関数 G は水面 $\tilde{\Gamma}_0$ での圧力の微小変化量 F の時間微分 $G = \frac{\partial F}{\partial t}$ であたえられる. また, g は重力加速度である. 水面の z 方向の変化 ζ は以下であたえられる.

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - F \right) \Big|_{\tilde{\Gamma}_0}.$$

関数 G について, $G = 0$ と仮定し, 問題 (LWW) の次の形の解を求める.

$$\Phi = e^{-it\omega} \varphi(x, y) Z(z) \quad \text{with } \omega \in \mathbb{R}.$$

問題 (LWW) の最初の3つの方程式を組にしたものを (HLWW) と書くことにする. そのとき, Φ は (HLWW) の解として求まる. 関数 Φ を見つけるために, 次の補助問題 (e) と (b) を導入する.

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma. \end{array} \right.$$

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Z'' - k^2 Z = 0, & -h < z < 0, \\ Z'(0) - \lambda Z(0) = 0, \\ Z'(-h) = 0. \end{array} \right.$$

Stoker[20] での議論より, 以下の命題が得られる.

命題 1 正数 k をひとつ選んだとき, 問題 (e) において解 $\varphi(x, y)$ が存在すると仮定する. 関数 Z を問題 (b) の k に対応するパラメータ λ を含む解とする. 関係式 $\lambda = k \tanh(kh)$ が成り立つときに限り, 関数 $\Phi = e^{-it\omega} \varphi Z$, $\omega = \sqrt{g\lambda}$ が問題 (HLWW) の解である. すなわち, 分散関係式: $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ が成り立つ.

8.2 非斉次ノイマン条件での外部帰着波動問題

関数 $\varphi = u + e^{i(lx+my)}$, $k = \sqrt{l^2 + m^2}$ に対して, 問題 (e) の解 φ を構成するために以下のヘルムホルツ方程式のノイマン境界値問題の解 u をゾンマフェルトの外向き放射境界条件のもとで求める.

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u - k^2 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{on } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right\} = 0. \end{array} \right.$$

ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は Γ 上での Ω から見て外向きの法線微分であり, g は

$$g = -\frac{\partial}{\partial n} e^{i(lx+my)} \quad \text{on } \Gamma$$

で与えられる.

8.3 FEM-FSM 結合解法

仮想境界 Γ_a と Ω の境界 Γ で囲まれた領域を Ω_i , Γ_a の外側を Ω_e とする. このとき, 問題 (E) を以下の内部問題 (E_g) と外部問題 (F_d) の二つの問題に分けることができる. ここで Λu は, 2.1 節で与えた問題 (E_f) の解 u に対して, Γ_a 上で $u(a)$ を $\frac{\partial}{\partial n} u(a)$ に対応させる Steklov 作用素を表す. ここでの $\frac{\partial}{\partial n}$ は Γ_a における法線微分である. 法線の向きは Ω_e から見て外向き, すなわち Γ_a の内側に向かうものである.

$$(E_g) \begin{cases} -\Delta u - k^2 u = 0 & \text{in } \Omega_i, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{on } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -\Lambda u & \text{on } \Gamma_a. \end{cases}$$

$$(F_d) \begin{cases} -\Delta u - k^2 u = 0 & \text{in } \Omega_e, \\ u = f & \text{on } \Gamma_a, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right\} = 0. \end{cases}$$

外部問題 (F_d) におけるディリクレデータ f は内部問題 (E_g) の解 u の Γ_a 上での値である. 内部問題 (E_g) の表記に現われる法線導関数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ は何れも内部領域 Ω_i から見て外向きの法線方向微分であることに注意する. 以下では内部問題 (E_g) を有限要素法で解くことについて考える. 外部問題 (F_d) は, 内部問題 (E_g) の近似解をディリクレデータとして FSM で解くことにする.

複素数値をとる関数 u と v は次の関数空間 W から選ぶ.

$$u, v \in W, \quad W = H^1(\Omega_i).$$

以下のように記号を定める.

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega_i, & m(u, v) &= \int_{\Omega_i} u \bar{v} \, d\Omega_i, \\ b(u, v) &= \int_{\Gamma_a} \Lambda u \bar{v} \, d\Gamma_a, & G(v) &= \int_{\Gamma} g \bar{v} \, d\Gamma. \end{aligned}$$

ここで, $\bar{v}$ は v の共役複素数である. このとき, 問題 (E_g) の弱形式問題 (Π_g) は以下のようになる.

$$(\Pi_g) \begin{cases} \text{Find } u \in W \text{ such that} \\ a(u, v) - k^2 m(u, v) + b(u, v) = G(v), \quad \forall v \in W. \end{cases}$$

この問題 (Π_g) を離散化して解くのであるが, ここでは半双一次形式 $b(u, v)$ の離散化の概略のみ述べる.

遠方で u がゾンマフェルトの外向き放射条件を満たし、原点中心半径 ρ ($0 < \rho < a$) の円 Γ_ρ の外部での帰着波動問題の滑らかな解であり、 v は円 Γ_ρ の外部で滑らかならば、

$$b(u, v) = - \int_{\Gamma_a} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{v} d\Gamma \quad (13)$$

である。そこで、以下のように境界 Γ_a を N 等分し台形則を使って $b(u, v)$ を離散化した半双一次形式を $b_N(u, v)$ とする。

$$b_N(u, v) = - \frac{2\pi a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial u(a_j)}{\partial r} \overline{v(a_j)}. \quad (14)$$

ここで a_j は Γ_a 上に等間隔にとられた N 個の点である。

ここで u の Γ_a 上での値を元にして得られる円外帰着波動問題の FSM 近似解 $u^{(N)}$ を考える。すなわち $u^{(N)}$ は本報告の 3.2 節で与えた問題 ($E_f^{(N)}$) において $f(a) = u(a)$ において得られる FSM 近似解である。これらは仮想境界 Γ_a の近傍で解析的である。式 (14) の u に $u^{(N)}$ を代入して得られる半双一次形式 $b^{(N)}(u, v)$ を数値計算に用いる：

$$b^{(N)}(u, v) = - \frac{2\pi a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial u^{(N)}(a_j)}{\partial r} \overline{v(a_j)}. \quad (15)$$

有限要素計算の実際においては、人工境界 Γ_a は、 Γ_a に内接する正 N 角形 $\Gamma_a^{(N)}$ に置き換えている。正 N 角形 $\Gamma_a^{(N)}$ の頂点は選点 $a_j, 0 \leq j \leq N-1$, と一致させる。内部境界 Γ も多角形 $\Gamma^{(N)}$ に置き換え、 $\Gamma_a^{(N)}$ と $\Gamma^{(N)}$ の囲む領域 $\Omega_i^{(N)}$ を三角形分割し区分一次連続要素を用いて計算している。

今回述べた手法で導かれる境界半双一次形式に対応する行列要素の計算は離散フーリエ変換を用いて計算する。その数値計算の実施に当っては十分に計算精度をとることが要点になる。特に高波数問題では任意多倍長計算を用いることが不可欠になると判断している。

8.4 正四角柱まわりの波の運動の数値計算

内接円の半径が 100 メートルである正四角柱の島に、遠方から来る一定周期の波がぶつかる運動を数値計算で求め、可視化する。正四角柱周りの平均水深は 28 メートルとする。命題 1 において示された分散関係式を用いて、波数、波の角周波数 ω と時間周期 T を以下の通りに設定する。

$$\omega = 0.164 \text{ radian/sec} \quad T = 38.407 \text{ sec} \quad \text{for } k = 0.01.$$

上のパラメータのもと、半径 500 メートルの人工境界 Γ_a を設定し、パラメータを $\gamma = 0.5$ と $N = 512$ として、FEM-FSM 結合解法を用いて計算した。図 5 の左側は、角柱近傍の波の様子、右側は遠方まで見渡した様子を表している。この図は、第三著者の修士論文 [16] から転載している。[16] では計算結果の可視化には gnuplot[27] を用いた。

参考文献

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Ninth Printing, Dover Publications, New York, 1972.
- [2] Bowman, J. J., Senior, T. B. A. and Uslenghi, P. L. E., *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969.
- [3] Brigham, E. O., *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [4] Chiba, F. and Ushijima, T., A fundamental solution method with multiple-precision computation applied to reduced wave Neumann problems in the exterior region of a disc, *Trans. JSIAM.* 15 (2005) 361–384 (in Japanese) [千葉 文浩 牛島 照夫, 円外帰着波動ノイマン問題へ応用した多倍長計算による基本解近似解法, 日本応用数理学会論文誌, 15 (2005) 361–384].
- [5] Chiba, F. and Ushijima, T., Exponential decay of convergent rate for a fundamental solution method applied to a reduced wave problem in the exterior region of a disc, *submitted*.
- [6] Chiba, F. and Ushijima, T., Computation of scattering amplitude for scattering wave by a disc — approach by a fundamental solution method, *in preparation*.
- [7] Eaton, J. W., *Octave - A high-level interactive language for numerical computations*, Version 2.9.9, <http://www.octave.org/>, 2006.
- [8] Free Software Foundation, *GNU MP The GNU Multiple Precision Arithmetic Library*, Edition 4.2.1, <http://gmplib.org/>, 2006.
- [9] Golub, G. H. and Van Loan, C. F., *Matrix Computations*, Third Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- [10] Kahan, W., *Lecture Notes on the Status of IEEE Standard 754 for Binary Floating-Point Arithmetic*, <http://www.europrog.org/paper/wk1997-01e.pdf>, Elect. Eng. and Computer Sciences, University of California Berkeley, California, 1997.
- [11] Katsurada, M. and Okamoto, H., A Mathematical study of charge simulation method I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math.* 35 (1988) 507–518.
- [12] Mizushima, J., *Postscript Manual*, Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Engineering, Doshisha University, <http://www1.doshisha.ac.jp/~jmizushi/ps.html>, Kyoto, 2006 (in Japanese) [水島 二郎, ポストスクリプトマニュアル, 同志社大学 工学研究科機械システム エネルギー機械工学科, 京都, 2006].
- [13] Morse, P. M. and Feshbach, H., *Method of Theoretical Physics Part II*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [14] The MPFR Team, *MPFR The Multiple Precision Floating-Point Reliable Library*, Edition 2.2.0, INRIA Lorraine/LORIA, <http://www.mpfr.org/>, Nancy, 2005.
- [15] Murashima, S., *Charge Simulation Method and its Application*, Morikita Shuppan, Tokyo, 1983 (in Japanese) [村島 定行, 代用電荷法とその応用 - 境界値問題の半解析的近似解法, 森北出版, 東京, 1983].

- [16] Ohzeki, M. *Numerical Computation of Two-dimensional Exterior Reduced Wave Problem through FEM-FSM Combined Method*, Master Thesis, Department of Computer Science, Graduate School of Electro-Communications, The University of Electro-communications, 2005 (in Japanese) [大関 正己, 有限要素法・基本解近似結合解法による二次元外部帰着波動問題の数値計算, 修士論文, 電気通信大学大学院 電気通信学研究科 計算科学講座, 2005].
- [17] Ooura, T., *Ooura's Mathematical Software Packages*, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ooura/index.html>, Kyoto, 2001.
- [18] Sánchez-Sesma, F. J. and Rosenblueth, E., Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 7 (1979) 441-450.
- [19] Sánchez-Sesma, F. J., A boundary method applied to elastic scattering problems, *Arch. Mech.* 33 (1981) 167-179.
- [20] Stoker, J. J. *Water Waves*, Interscience, New York, 1957.
- [21] Ushijima, T., FEM-CSM combined method for planar exterior Laplace problems, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 18 (2001) 359-382.
- [22] Ushijima, T., Equi-distant collocation method for periodic functions with kernel expression, *Proceedings of Fifth China-Japan Joint Seminar on Numerical Mathematics*, held in Shanghai, August 21-25, 2000, Edited by Z.-C. Shi and H. Kwarada, Science Press, Beijing/New York, 2002, pp.220-226.
- [23] Ushijima, T., FEM-FSM combined method for 2D exterior Laplace and Helmholtz problems, *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, *Proceedings of 12th International Conference of Domain Decomposition Methods*, Chiba, Japan, October 25-29, 1999, Edited by T. Chan, T. Kako, H. Kwarada and O. Pironneau, DDM.org, Printed in Japan, 2001, pp.223-230.
- [24] Ushijima, T. and Chiba, F., A fundamental solution method for the reduced wave problem in a domain exterior to a disc, *J. Comput. Appl. Math.* 152 (2002) 545-557.
- [25] Ushijima, T. and Chiba, F., Error estimate for a fundamental solution method applied to reduced wave problems in a domain exterior to a disc, *J. Comput. Appl. Math.* 159 (2003) 137-148.
- [26] Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.
- [27] Williams, T. and Kelley, C., *gnuplot An Interactive Plotting Program*, Version 4.0, <http://gnuplot.sf.net/>, 2004.
- [28] Wolfram, S., *The Mathematica Book*, Fifth Edition, Wolfram Media Inc, Illinois, 2003.

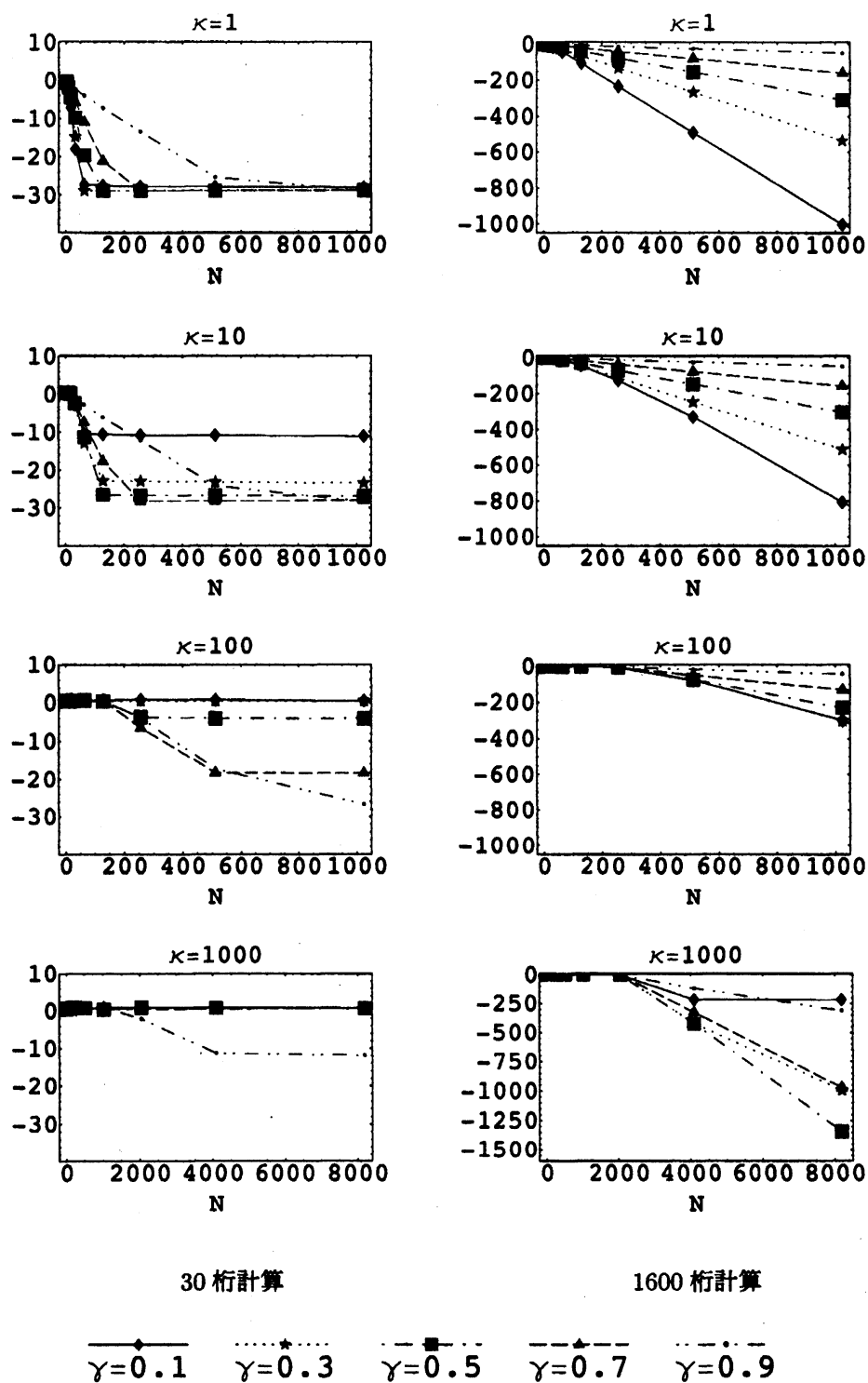


図2 境界 Γ_a 上での誤差の振る舞い: 縦軸は常用対数スケール

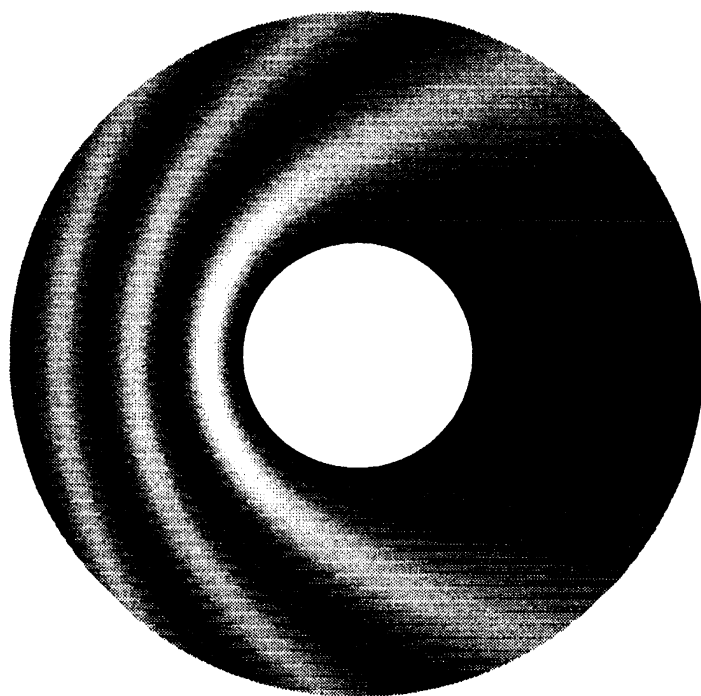
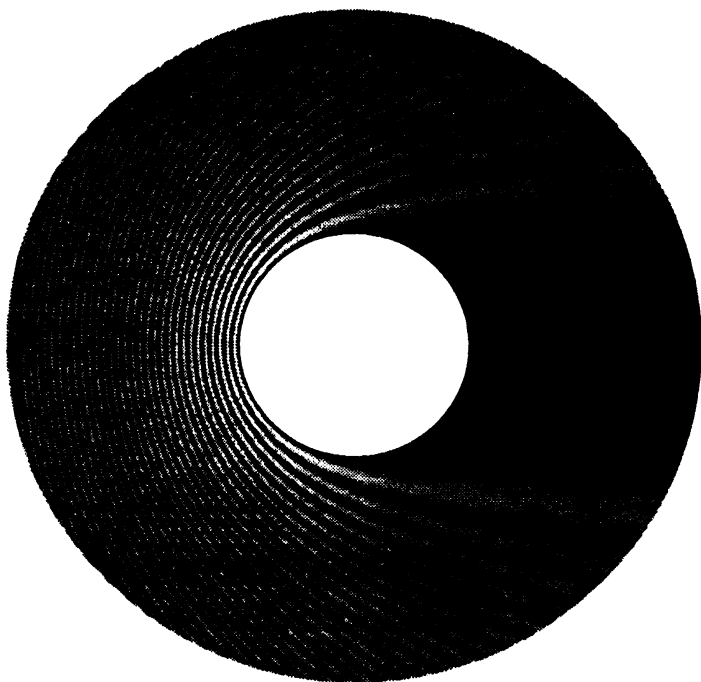
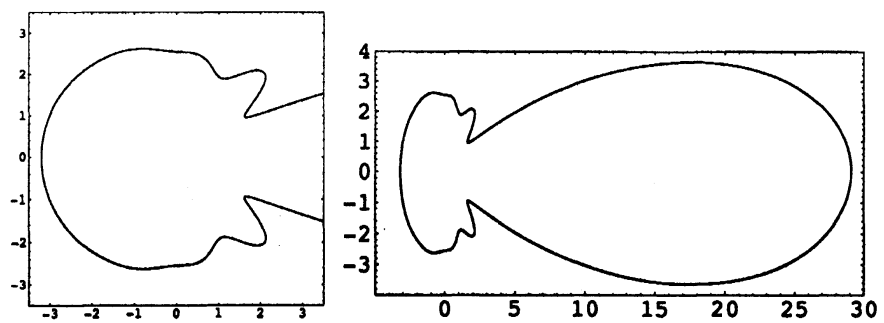
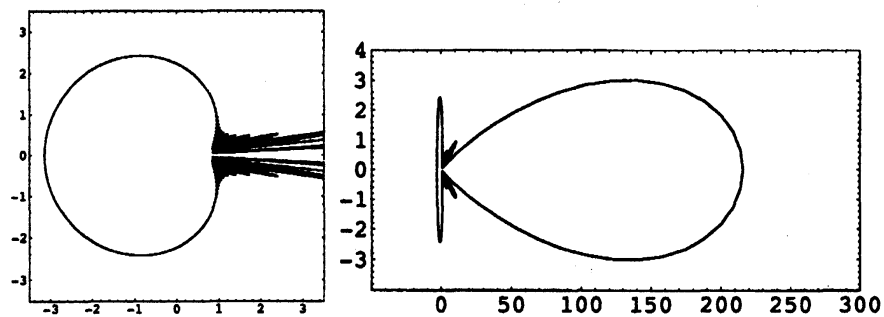
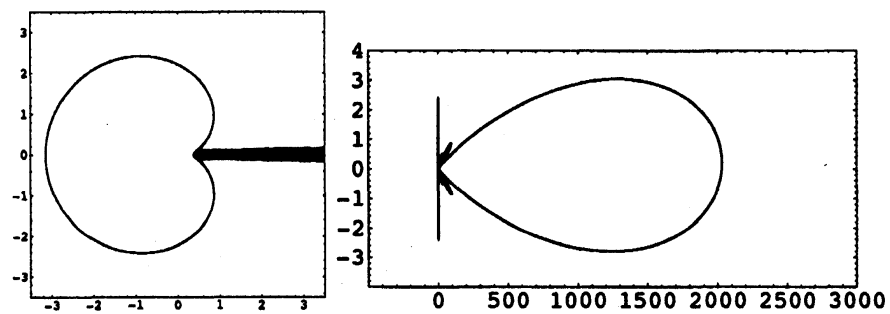
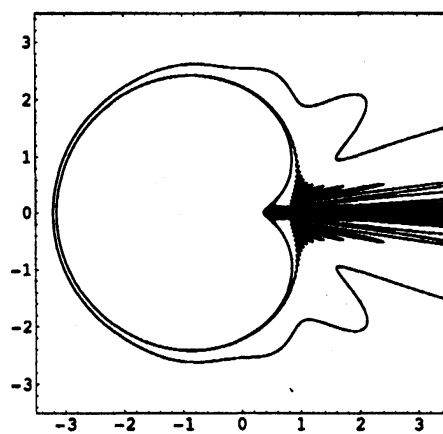
 $\kappa = 5$  $\kappa = 50$

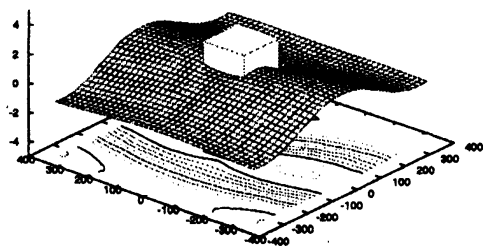
図3 合成波の絶対値の分布

A: $\kappa = 5$ B: $\kappa = 50$ C: $\kappa = 500$ 

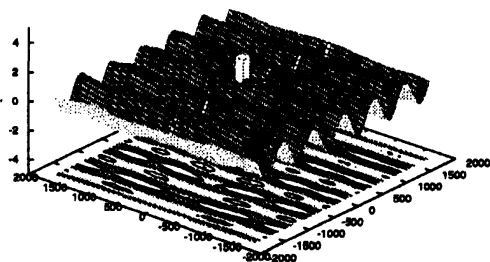
D: A, B, C の合成

図4 散乱断面積

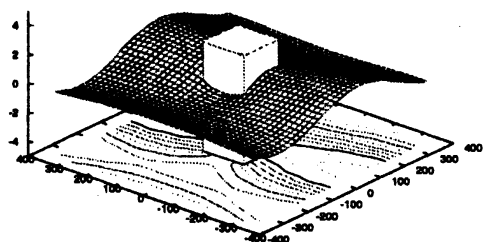
$k=0.010$, $\omega=0.164$, $T=38.407$, $b=0.000$, $\arg=0.0$ (degree).



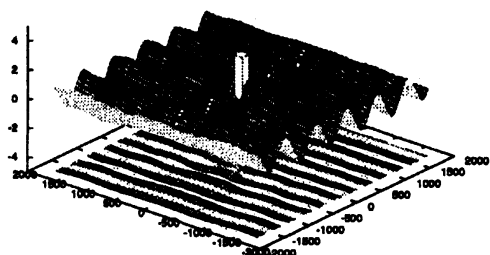
$k=0.010$, $\omega=0.164$, $T=38.407$, $b=0.000$, $\arg=0.0$ (degree).



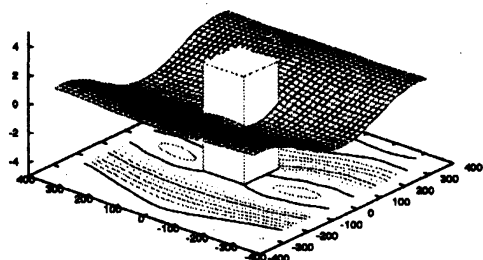
$k=0.010$, $\omega=0.164$, $T=38.407$, $b=4.801$, $\arg=0.0$ (degree).



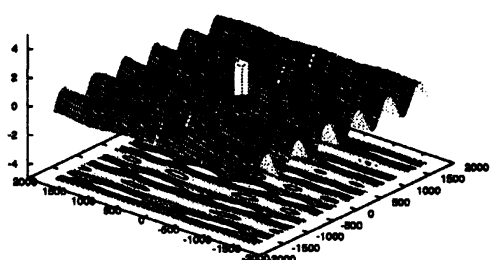
$k=0.010$, $\omega=0.164$, $T=38.407$, $b=4.801$, $\arg=0.0$ (degree).



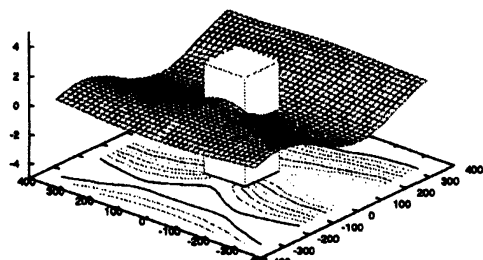
$k=0.010$, $\omega=0.164$, $T=38.407$, $b=18.304$, $\arg=0.0$ (degree).



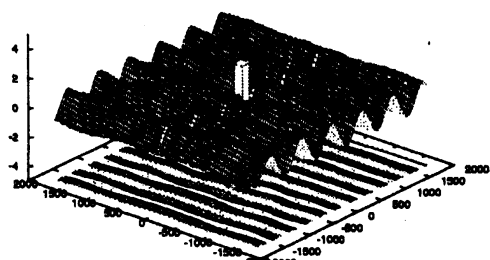
$k=0.010$, $\omega=0.164$, $T=38.407$, $b=18.304$, $\arg=0.0$ (degree).



$k=0.010$, $\omega=0.164$, $T=38.407$, $b=34.004$, $\arg=0.0$ (degree).



$k=0.010$, $\omega=0.164$, $T=38.407$, $b=34.004$, $\arg=0.0$ (degree).



角柱近傍の様子

遠方場の様子

図5 正四角柱まわりの波の運動