

On Dirichlet problems for some degenerate elliptic equations

立命大 理工 中岡 明

§1. 序

退化した楕円型方程式に対する境界値問題は、数多くの研究がなされているが、その一つの特徴的な困難さは、退化していない場合と比較して、統一的な取り扱いができないことである。例えば、次の二つの方程式を $\mathbb{R}_+^1$ で考えよう。

$$(1.1) \quad -p(x)u'' + u = f(x)$$

$$(1.2) \quad -(p(x)u')' + u = f(x)$$

ここで、 $p(x)$ は非負で有界、そして $x=0$ のみで $p(x)=0$ となるものとする。もしも、 $f(x) \in L^2(\mathbb{R}_+^1)$ とし、解 $u \in L^2(\mathbb{R}_+^1)$ の subspace で求めるとすると、(1.2) に対しては、 $u(x)$ 及び $\sqrt{p(x)}u'(x)$ が $L^2(\mathbb{R}_+^1)$ に属するようなものを求めるのが“自然”であろう。そしてこの時、結果として $(p(x)u')' \in L^2(\mathbb{R}_+^1)$ となる。さて、 $p(x)$ を $x=0$ の近傍で $\sqrt{x}$ に等しい関数とし、 $u(x)$ も $x=0$ の近傍で $\sqrt{x}$ に等しく、かつその support が有界な関数とすると

明かに, $u(x)$, $\sqrt{p(x)}u'(x)$, そして $(p(x)u')'$ は $L^2(\mathbb{R}_+')$ に属するが, $p(x)u''(x)$ は $x=0$ の近傍で x^{-1} であるから, $L^2(\mathbb{R}_+')$ には属さない。このことは, (1.1) と (1.2) とを同じ関数空間でとり扱うことは適当でないことを suggest している。従って, 退化した方程式を考える場合には, その方程式にうまく attach した関数空間を選ぶ必要がある。

さて, Ω を $\mathbb{R}^n$ の中の half-space 又は smooth な compact hypersurface で囲まれた領域としよう。我々は主として, Ω で定義された次のような 2 階の微分作用素 $A(x, D)$ を考える。即ち $A(x, D)$ は, おのおの十分小なる boundary patch において

(1.3) $A(x, D) = - \sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \partial_j \partial_k + \text{first order operator,}$
と表わされるものとする。ただし, ここで

$$(1.4) \quad \sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \xi_j \bar{\xi}_k \geq c |\xi|^2 \quad \xi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

$$(c > 0, \quad \tilde{a}_{jk} = \overline{\tilde{a}_{kj}})$$

であり, $\partial_0 = p(r) \frac{\partial^{(*)}}{\partial v}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ($j=1, 2, \dots, n-1$) である。又, $r = r(x)$ は, $x \in \Omega$ から, Ω の境界 Γ への距離である。 p については, §2 で詳しく述べる。

(*) $\frac{\partial}{\partial v}$ と $\frac{\partial}{\partial x_j}$ ($j=1, 2, \dots, n-1$) は次のようにして定義する。
 $\forall x_0 \in \Gamma$ に対して, x_0 を原点として, Γ 上に一つの curvilinear coordinate system $\sigma(\Gamma)$ を考える。ここで, x_0 の

十分小さい近傍 $V(x_0)$ を考えよ, $\forall x \in V(x_0)$ に対し, 唯つの実数 y が, Γ 上に存在して, $\vec{y}x$ が, y における normal vector に一致する。次に $\Gamma_r = \{x \in V(x_0); \text{ ~~the~~ } |\vec{y}x| \leq r\}$ とおき, Γ_r には, $\Gamma = \Gamma_0$ の coordinate system $\sigma(\Gamma)$ によって induce された coordinate system $\sigma(\Gamma_r)$ が定義されているものとする。ここで, local coordinate $(v, \tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ を $x \in V(x_0) \cap \Gamma_r$ ($r \geq 0$) に対し次のように定める。

$$(1.5) \begin{cases} v = |\vec{y}x| \\ \tau_j = \text{the } j\text{-th coordinate of } x \text{ through } \sigma(\Gamma_r). \end{cases}$$

従って $x = (x_1, \dots, x_n)$ として

$$(1.6) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial \tau_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial \tau_j} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \end{cases}$$

である。

我々は, ここで, ある weight をもった Sobolev space において, Dirichlet problem に対する解の存在及び, その時の lower order terms について考察する。

§ 2. Half-space $\mathbb{R}_+^n$ における weighted Sobolev spaces.

我々の問題を扱う空間を設定するには, まず $\mathbb{R}_+^n$ における

それから考えた方が便利である。そこで、 $\mathbb{R}_+^n$ にお^{ける}~~ける~~ weighted Sobolev spaces を導入しよう。

$p(x)$ は次のような real-valued function としよう。

$$i) \quad p(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^1) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}_+^1})$$

$$ii) \quad 0 \leq p(x) \leq M \quad \text{"} p(x) \text{ は } x=0 \text{ のみで } 0 \text{ になる。}$$

$$iii) \quad C_1 x^\alpha \leq p(x) \leq C_2 x^\alpha \quad \text{かつ} \quad |p^{(m)}(x)| \leq C_m x^{\alpha-m}$$

$$(m=1, 2, \dots) \text{ が } x=0 \text{ の近傍で成り立つ。} \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$iv) \quad 0 < \gamma \leq p(x) \quad \text{かつ} \quad |p^{(m)}(x)| \leq K_m \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$\text{が } x \rightarrow \infty \text{ のとき成り立つ。}$$

さて、 $p(x)$ を $x < 0$ に対しては、 $p(-x)$ で拡張し、その拡張された関数を $\tilde{p}(x)$ であらわす。又、 $\phi(x)$ 及び $\tilde{\phi}(x)$ は次の式によって定義する。

$$(2.1) \quad \phi(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{p(\xi)}$$

$$(2.2) \quad \tilde{\phi}(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\tilde{p}(\xi)}.$$

定義 2.1. $\mathbb{R}_+^n = \{(x, y); x > 0, y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ 上の distribution $u(x, y)$ が $W^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ ~~に~~ に属しているとは

$$(2.3) \quad \|u\|_{m, \phi}^2 = \sum_{j+|k| \leq m} \int_{\mathbb{R}_+^n} |D_p^j D_y^k u|^2 d\phi dy$$

が有限の場合を云う。ただし、 $D_p = -i p(x) \frac{\partial}{\partial x}$ であり

$D_y^k = (-i)^{|k|} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\right)^{k_{n-1}}$ であり, m は ^{非負} 整数である。

定義 2.2. $\mathbb{R}^n$ 上の distribution $u(x, y)$ が $W^m(\mathbb{R}^n, \tilde{\phi})$ に属しているとは,

$$(2.4) \quad \|u\|_{m, \tilde{\phi}}^2 = \sum_{j+|k| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u|^2 d\tilde{\phi} dy$$

が有限の場合を云う。ただし, $D_{\tilde{\rho}} = -i \tilde{\rho}(x) \frac{\partial}{\partial x}$ である。

明らかに, $W^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ 及び $W^m(\mathbb{R}^n, \tilde{\phi})$ は, (2.3) 及び (2.4) によって Hilbert spaces を作る。又, 自然な制限によって $W^m(\mathbb{R}^n, \tilde{\phi}) \subset W^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ である。

$W^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ については, 通常の Sobolev space と同様の性質を示すことが出来る。即ち

命題 2.1. $u(x, y) \in W^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ とすると, $D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u$ ($j+|k| \leq m$) の trace $D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u(0, y) = \lim_{x \downarrow 0} D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u(x, y)$ が $H^{m-j-|k|-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ の中に存在して

$$(2.5) \quad |D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u(0, \cdot)|_{m-j-|k|-\frac{1}{2}} \leq \text{const} \|u\|_{m, \phi}$$

$$(2.6) \quad |D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u(0, \cdot)|_s \leq \text{const} (\varepsilon \|u\|_{m, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi})$$

($s < m-j-|k|-\frac{1}{2}$, $\forall \varepsilon > 0$)

がなりたつ。

命題 2.2. 1) $u(x, y)$ と $D_p^m u(x, y)$ が $W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ に属しているとする。 $D_p^k u(x, y)$ ($1 \leq k \leq m-1$) も $W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ に属しており

(2.7) $\|D_p^k u\|_{0, \phi} \leq C(k, m) (\varepsilon \|D_p^m u\|_{0, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi})$ が $\forall \varepsilon > 0$ に對して成り立つ。

2) もしも, $D_y^k u$ ($|k| \leq m$) と $D_p^m u$ とが $W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ に属しているとする。 $u \in W^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ であり, $\forall \varepsilon > 0$ に對して

$$(2.8) \quad \sum_{j+|k| < m} \|D_p^j D_y^k u\|_{0, \phi} \leq \varepsilon \sum_{j+|k| = m} \|D_p^j D_y^k u\|_{0, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi}$$

が成り立つ。

次の補題は、低階の項を扱うのに重要である。

補題 2.1. $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ で $\alpha < 1/3$ とする。このとき, $\frac{\partial u}{\partial x} \in W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ であり $\forall \varepsilon > 0$ に對して

$$(2.9) \quad \|\partial u / \partial x\|_{0, \phi} \leq \varepsilon \|u\|_{2, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi}$$

が成り立つ。

Remark もしも $\alpha \geq 1/3$ とすると, $\partial u / \partial x \notin W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ となるような $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ がある。例之は, $x=0$ の近傍で, $\phi(x) g(y)$ ($g(y) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$) に等しいような関数を考えればよい。

定義 2.3. $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ の $W^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ での completion を $W_0^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ で表わす。

次の命題は、命題 2.1. より明らかである。

命題 2.3. $u(x, y) \in W_0^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ とする。このとき、 $D_p^j D_y^k u$ ($j+|k| \leq m-1$) の trace は全て 0 である。

さて、 D_p は $W_0^1(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ の内積に関して、formally self-adjoint であるが、 $-\lambda \frac{\partial}{\partial x}$ のそれは

$$(2, 10) \quad -\lambda \frac{\partial}{\partial x} + (-\lambda) p' p^{-1}$$

で与えられる。そして $p' p^{-1}$ は $x=0$ の近傍で x^{-1} の order である。次の補題がなりたつ。

補題 2.2. もしも $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi) \cap W_0^1(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ で $\alpha < 1/3$ ならば、 $u/x \in W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ であり、 $\forall \varepsilon$ に対して

$$(2, 11) \quad \|u/x\|_{0, \phi} \leq \varepsilon \|u\|_{2, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi}$$

がなりたつ。更に、 $\alpha \geq 1/3$ なら $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi) \cap W_0^1(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ で $u/x \notin W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ なるものがある。

補題 2.3. $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi) \cap W_0^1(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ とする。

もしも、 $\beta < 1-\alpha$ ならば、 $x^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial y_j}$ ($j=1, 2, \dots, n-1$) $\in W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ であり、 $\forall \varepsilon > 0$ に対して

(2, 12) $\|x^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial y_j}\|_{0, \phi} \leq \varepsilon \|u\|_{2, \phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \phi}$
 がなりたつ。

最後に、一つの関数の族を導入する。

定義 2.4. $\alpha(x, y) \in \beta^m(\mathbb{R}_+^n, \rho)$ であるとは、
 $D_y^j D_y^k \alpha(x, y)$ ($j+|k| \leq m$) がすべて連続で有界である時
 をいう。

Remark. $\beta^m(\mathbb{R}_+^n, \rho)$ は十分に沢山の要素をもっている。
 実際 $\alpha(x, y) \in \beta^m(\mathbb{R}_+^n)$ とすれば、 $\alpha(\phi(x), y) \in \beta^m(\mathbb{R}_+^n)$
 であり、 $\varphi(x, y) + \text{const} \in \beta^m(\mathbb{R}_+^n, \rho)$ ($\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$) である。

§3. 一般の領域 Ω における weighted Sobolev spaces.

Ω を $\mathbb{R}^n$ の中の領域とし、その境界は smooth で compact な
 hypersurface とする。まず、次の定義から始めよう。

定義 3.1. ω を Ω の境界の某の十分小さい closed
 neighbourhood とし、 ω では、 $\frac{\partial}{\partial \nu}$, $\frac{\partial}{\partial \tau}$ が定義されて
 いるものとする。 ω 上の関数 $\alpha(x)$ が $\beta^m(\omega, \rho)$ に属し
 ているとは、 $(\rho(r) \frac{\partial}{\partial \nu})^j (\frac{\partial}{\partial \tau})^k \alpha(x)$ ($j+|k| \leq m$) が
 全て有界連続である場合を云う。

Remark. $\alpha(x) \in \beta^m(\omega, \rho)$ は、例えば、次のようにして作ら

れる。 $\alpha(v, \tau) \in \beta^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ とし、その support は十分小さいとする。

$a(x) = \alpha \circ \theta^{-1}(v, \tau)$ とかくと $a(x) \in \beta^m(\omega, \rho)$ である。ただし

θ^{-1} は、(1.5) で定義された $\theta; x \rightarrow (v, \tau)$ の逆変換である。

さて、 $\bar{\Omega}$ の finite covering $\{\omega_p\}$ で、次のようなもの ε とする。

1) $\bar{\Omega}$ の境界 Γ に contact ^{する} ~~near~~ covering neighborhood (これを ω_λ^* で表わす) については、十分小なる $\varepsilon > 0$ に對して

$$\bigcup_{\lambda} \omega_\lambda^* \supset \bar{\Omega}_\varepsilon$$

2) inner coverings (これを $\tilde{\omega}_\mu$ で表わす) については、

$$\bigcup_{\mu} \tilde{\omega}_\mu \subset \bar{\Omega}_{\varepsilon/2}$$

ただし、 $\bar{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \bar{\Omega}; \text{dis}(x, \Gamma) < \varepsilon\}$ である。そして次のような $\bar{\Omega}$ 上の partition of unity V_ε とする。

1) $\text{supp. } \varphi_\lambda^* \subset \omega_\lambda^*$, $\text{supp. } \tilde{\varphi}_\mu \subset \tilde{\omega}_\mu$, $\{\varphi_\lambda^*\} \cup \{\tilde{\varphi}_\mu\}$

ただし、 $\tilde{\omega}_\lambda^*$ については $\partial/\partial v$, $\partial/\partial \tau$ が define されているとする。

2) $\sum \varphi_\lambda^{*2} + \sum \tilde{\varphi}_\mu^2 = 1$, $\varphi_\lambda^* \in \beta^\infty(\bar{\omega}_\lambda^*, \rho)$, $\tilde{\varphi}_\mu \in C^\infty(\tilde{\omega}_\mu)$.

定義 3.2. $\bar{\Omega}$ 上の distribution $u(x)$ が $W^m(\Omega, \rho)$ に属しているとは、

$$(3.1) \quad \|u\|_{m, \rho, \Omega}^2 = \sum_{j+|k| \leq m} \sum_{\lambda} \int_{\Omega} \left| \left(\rho(r) \frac{\partial}{\partial v} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^k (\varphi_\lambda^* u) \right|^2 \frac{dx}{\rho(r)} \\ + \sum_{|l| \leq m} \sum_{\mu} \int_{\Omega} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^l (\tilde{\varphi}_\mu u) \right|^2 \frac{dx}{\rho(r)}$$

が有限の場合を云う。

Remark, (3, 1) で与えられた ノルム は, ε や 単位 の 分解 の 送り方 に depend するが, 他 の 送り方 を しても, 同 等 の ノルム を 与 える の で, $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ で もって, 任 意 に 固 定 さ れ た $W^m(\Omega, p)$ の topology を 表 わ す こと に す る。

又, $W_0^m(\Omega, p)$ で もって $C_0^\infty(\Omega)$ の $W^m(\Omega, p)$ での comp-
-bition を 表 わ す こと に す る。明 示 か に, $W^m(\Omega, p)$ 及 び $W_0^m(\Omega, p)$
は, $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ に よ っ て Hilbert space に な る。

(1.5) で 定 義 さ れ た 変 換 を 考 へ る こと に よ っ て, 次 の 命 題 や 補 題 が 得 ら れ る。

命 題 ~~1.3~~₃ 1. $\forall u(x) \in W^m(\Omega, p)$ ~~に対して~~ $D^\beta u(x)$
($|\beta| < m$) は Γ へ の trace $\gamma D^\beta u \in H^{m-|\beta|-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ を も ち。

$$(3, 2) \quad |\gamma D^\beta u|_{m-|\beta|-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq \text{const} \|u\|_{m,p,\Omega}$$

$$(3, 3) \quad |\gamma D^\beta u|_{s,p} \leq \varepsilon \|u\|_{m,p,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}$$

$$(s < m - |\beta| - \frac{1}{2}, \quad \forall \varepsilon > 0)$$

が な り た つ。

補 題 ~~1.3~~₃ 1. $u(x) \in W^2(\Omega, p)$ ($\alpha < \frac{1}{3}$) と す る と,
 $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in W^0(\Omega, p)$ ($j=1, 2, \dots, n$) と あり, $\forall \varepsilon > 0$ に 対 し て

$$(3, 4) \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{0,p,\Omega} \leq \varepsilon \|u\|_{2,p,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}$$

が な り た つ。

補題 3.2, $u(x) \in W^2(\Omega, p) \cap W_0^1(\Omega, p)$ ($\alpha < 1/3$)
 とする。 $u/r(x) \in W^0(\Omega, p)$ であり, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(3.5) \quad \|u/r\|_{0,p,\Omega} \leq \varepsilon \|u\|_{2,p,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}$$

がなりたつ。

補題 3.3, $u(x) \in W^2(\Omega, p) \cap W_0^1(\Omega, p)$ とする。各 ω_λ^* に対して, $\beta < 1-\alpha$ のとき $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(3.6) \quad \int_{\omega_\lambda^* \cap \Omega} \left| r^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 \frac{dx}{p(r)} \leq \varepsilon \|u\|_{2,p,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}$$

がなりたつ。

§4 Dirichlet problems. さて, 次の方程式を考へよう。

$$(4.1) \quad \begin{cases} Au \equiv - \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u \\ = f(x) \in W^0(\Omega, p) \\ u|_P = 0 \end{cases}$$

ここで, A は, 各 ω_λ^* において, 次のように表わされるとする。

$$(4.2) \quad A = - \sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \partial_j \partial_k + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{b}_j(x) \partial_j + \tilde{c}_0(x) \frac{\partial}{\partial r} \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{c}_j(x) r^{-\beta} \partial_j + \tilde{d}_0(x) \frac{1}{r} + d(x)$$

ただし, $\sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq c |\xi|^2$, ($\beta < 1-\alpha$) ($\tilde{a}_{jk} = \overline{\tilde{a}_{kj}}$)

であり, 各係数については, $\tilde{a}_{jk} \in \beta^3(\omega_\lambda^*, p)$, $\tilde{b}_j(x), \tilde{c}_j(x) \in \beta^1(\omega_\lambda^*, p)$

($j=0, 1, \dots, n-1$) かつ $\tilde{d}_0(x), \tilde{d}(x) \in \beta^0(\omega_\lambda^*, \rho)$ とする。

Dirichlet problem を扱うには, いわゆる Gårding の不等式が重要な働きをするが, そのために次の補題を準備する。

補題 ~~4.4~~^{4.1}. $u(x) \in W_0^1(\Omega, \rho)$ とし, $\alpha < 1/2$ とする。

この時 $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(4.3) \quad \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} u \right| \frac{dx}{\rho(r)} \leq \varepsilon \|u\|_{1, \rho, \Omega}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \rho, \Omega}^2 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(4.4) \quad \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{r} \frac{dx}{\rho(r)} \leq \varepsilon \|u\|_{1, \rho, \Omega}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \rho, \Omega}^2$$

$$(4.5) \quad \int_{\omega_\lambda^* \cap \Omega} r^{-\beta} \left| \frac{\partial u}{\partial r} u \right| \frac{dx}{\rho(r)} \leq \varepsilon \|u\|_{1, \rho, \Omega}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{0, \rho, \Omega}^2 \quad (\beta < 1 - \alpha)$$

がなりたつ。

補題 ~~4.4~~^{4.1} を使って, 次の命題を示すことができる。

命題 ~~4.4~~^{4.1} (Gårding の不等式) 作用素 A の principal part の係数は $C^1(\Omega)$, その他は $C^0(\Omega)$ に属しているものとする。更に (4.2) において, $\tilde{a}_{jk}(x) \in \beta^1(\omega_\lambda^*, \rho)$, $\tilde{b}_j(x), \tilde{c}_j(x), \tilde{d}_0(x), \tilde{d}(x) \in \beta^0(\omega_\lambda^*, \rho)$ とする。このとき, $\forall u(x) \in W_0^1(\Omega, \rho)$ ($\alpha < 1/2$) に対して, 正の定数 C と K があって

$$(4.6) \quad \operatorname{Re} \langle Au, \bar{u} \rangle_{\rho, \Omega} \geq C \|u\|_{1, \rho, \Omega}^2 - K \|u\|_{0, \rho, \Omega}^2$$

がなりたつ。ここで, $\langle, \rangle_{\rho, \Omega}$ は $W_0^1(\Omega, \rho)$ の内積より induce された $W_0^1(\Omega, \rho)' \times W_0^1(\Omega, \rho)$ 上の sesqui-linear

form である。又, $\alpha \geq 1/2$ とすると, (4-6) は一般に成り立たない。

定義 4.1. $u(x) \in W_0'(\Omega, p)$ ($\alpha < 1/2$) が全ての $v(x) \in W_0'(\Omega, p)$ ($\alpha < 1/2$) に對して

$$(4.7) \quad \langle \overline{A^* u}, v \rangle_{p, \Omega} = \langle f, v \rangle_{p, \Omega}$$

をみたしてゐるとき, $u(x)$ は (4.1) の weak solution

という。ここで A^* は $W^0(\Omega, p)$ の内積に関する formal adjoint である。

補題 4.2 $a_{j,k}(x) \in \beta^3(C\Omega_\delta)$, $b_j(x) \in \beta^1(C\Omega_\delta)$
 $c(x) \in \beta^0(C\Omega_\delta)$ ($\delta > 0$) とし, 各 ω_λ^* に對して, $\tilde{a}_{j,k}(x) \in \beta^3(\omega_\lambda^*, p)$
 $\tilde{b}_j(x), \tilde{c}_j(x) \in \beta^1(\omega_\lambda^*, p)$ かつ $\tilde{d}_0(x), \tilde{d}(x) \in \beta^0(\omega_\lambda^*, p)$ とする
 と, A^* の係数は命題 4.1 の仮定をみたす。

以上をまとめると, Lax - Milgram の lemma によつて次の定理を得る。

定理 4.1. A の係数は, 補題 4.2 の仮定をみたしてゐるものとする。もし, $\alpha < 1/2$ ならば, $\forall f \in W_0'(\Omega, p)'$ に對して, $\lambda > 0$ を十分大にとれば,

$$\begin{cases} Au + \lambda u = f \\ u|_p = 0 \end{cases}$$

は unique な weak solution をもつ。

次に $f(x) \in W^0(\Omega, p)$ のとき, weak solution $u(x)$ は

$W^2(\Omega, p)$ に属するか, という問題であるが, これは ~~無~~ 条件では
なりたたない。実際 補題 3.1 及び 補題 3.2 からわかる
ように $\alpha < 1/3$ の場合には正しい。即ち 次の定理が成り立つ。

定理 4.2 もしも $f(x) \in W^0(\Omega, p)$ であり, $\alpha < 1/3$ なら
ば, (4.1) の weak solution $u(x)$ は $W^2(\Omega, p)$ に属する。

この定理の証明は, 大体において, 退化していない楕円型
方程式の解に対する differentiability を示す手法 ~~と~~ 同い
であるが, 若干の注意を要する。詳しくは [4] 参照。

次に, $f(x) \in W^s(\Omega, p)$ ならば, 解 $u(x)$ は $W^{s+2}(\Omega, p)$
に属するか, という問題があるが, これも一般には否定
される。

次に Ω が有界領域の場合, Fredholm's alternative
theorem が成り立つ。実際 次の命題が成り立つからである。

命題 4.2. Ω が有界のとき $W_0^1(\Omega, p)$ の有界集合
は $W^0(\Omega, p)$ の precompact set を作る。

§ 5. 高階の方程式に対する Dirichlet problems. 高階
の方程式に対する Dirichlet problem も 2 階の場合と analogous
にとり扱うことができる。 A を Ω で定義された $2m$ 階
の微分作用素として, Ω の内部では楕円型とする。そして
各 boundary patch で 次のように表わされるものとする。

$$(5.1) \quad A = \sum_{|\mu|=2m} \tilde{a}_\mu(x) \partial^\mu + \text{lower order operator.}$$

ここで, $\partial = (p(r) \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tau_{n-1}})$ であり, 更に

$$(5.2) \quad (-1)^m \operatorname{Re} \sum_{|\mu|=2m} \tilde{a}_\mu(x) \xi^\mu \geq c |\xi|^{2m}$$

を仮定する。

我々の方程式は

$$(5.3) \quad \begin{cases} Au = f \in W^0(\Omega, p) \\ (p(r) \frac{\partial}{\partial r})^j u|_r = 0 \quad (j=0, 1, \dots, m-1) \end{cases}$$

である。

定義 5.1. $u(x) \in W_0^m(\Omega, p)$ は, すべての $v(x) \in W_0^m(\Omega, p)$ に対して,

$$(5.4) \quad \langle \overline{A^* v}, u \rangle_{p, \Omega} = \langle f, v \rangle_{p, \Omega}$$

がなりたつとき, (5.3) の weak solution と云う。

補題 5.1. $B(x, D) \in (2m-1)$ 階の作用素とし, T の近傍⁽⁶⁾で, 次のように表わされるものとする。

$$(5.5) \quad B(x, D) = \sum_{j+|k| \leq 2m-1} \tilde{b}_{j, (k)}(x) (p(r) \frac{\partial}{\partial r})^j (\frac{\partial}{\partial \tau})^k + \\ + \sum_{\alpha+j+|k| \leq 2m-1} \tilde{c}_{\alpha, j, (k), l}(x) (p(r) \frac{\partial}{\partial r})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \tau})^j (\frac{\partial}{\partial \tau})^{k-l} \\ + \tilde{d}(x) \quad (\beta < 1-\alpha).$$

ただし, $\tilde{b}_{j, (k)}(x) \in \beta^{3m-j-|k|-1}(\omega, p)$, $\tilde{c}_{\alpha, j, (k), l}(x) \in \beta^{2m-\alpha-j-|k|-l}(\omega, p)$

そして $d(x) \in C^0(\omega)$ かつ $|d(x)| \leq Kr^{-2m+1}$ とする。このとき

$\alpha < \frac{1}{2}m$ ならば、 $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(5.6) \begin{cases} \int_{\Omega} |Bu \cdot u| \frac{dx}{p} \leq \varepsilon \|u\|_{m,p,\Omega}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}^2 \\ \int_{\Omega} |B^*u; u| \frac{dx}{p} \leq \varepsilon \|u\|_{m,p,\Omega}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{0,p,\Omega}^2 \end{cases}$$

がなりたつ。ここで $\alpha \geq \frac{1}{2}m$ とするときは一般にできない。

命題 5.1. $\tilde{a}_\mu(x) \in \beta^{3m}(\omega, p)$ とし, lower order term は補題 5.1 の条件をみたすものとし, A の係数は (簡単のため) $C^{3m}(\Omega)$ に属しているものとする。このとき $\alpha < \frac{1}{2}m$ ならば,

$$(5.7) \quad \operatorname{Re} \langle \overline{A^*u}, u \rangle_{p,\Omega} \geq C \|u\|_{m,p,\Omega}^2 - K \|u\|_{0,p,\Omega}^2$$

が、すべて $u(x) \in W_0^m(\Omega, p)$ に対してなりたつ。

以上のことをまとめると、次の定理が得られる。

定理 5.1. $A(x, D)$ は命題 5.1 の条件をみたしているものとする。このとき、 $\alpha < \frac{1}{2}m$ で、 $\lambda > 0$ が十分大とすれば、任意の $f \in W_0^m(\Omega, p)'$ に対して

$$\begin{cases} Au + \lambda u = f \\ u \in W_0^m(\Omega, p) \end{cases}$$

の unique weak solution が存在する。

更に解の differentiability については、次の定理がなりたつ。

定理 5.2. 低階項 $B(x, D)$ は Γ の近傍で

$$(5.8) \quad B(x, D) = \sum_{j+|k| \leq 2m-1} \tilde{f}_{j,(k)}(x) \left(p(r) \frac{\partial}{\partial \nu} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^k + \\ + \sum_{i+j+|k|+l \leq m} \tilde{c}_{i,j,(k),l}(x) \left(p(r) \frac{\partial}{\partial \nu} \right)^i \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^j r^{-l+1-\beta} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^k \\ + \tilde{\alpha}(x)$$

と表わされるものとし、 $|\tilde{\alpha}(x)| \leq K r^{-m}$ とする。このとき

$\alpha < \frac{1}{2m+1}$ なら $f(x) \in W^0(\Omega, p)$ ならば、~~weak~~ weak solution $u(x)$ は $W^{2m}(\Omega, p)$ に属する。ここで、 $\alpha \geq \frac{1}{2m+1}$ といふ一般にできない。

Ω が有界の場合には、Fredholm の alternative theorem がなりたつ。

References

- [1] M. S. Baouendi : Sur une class d'operateurs elliptiques dégénérés. Thèse Paris 1966.
- [2] S. Mizohata : Theory of Partial Differential Equations. Iwanami Tokyo 1965. (in Japanese)
- [3] A. Nakaoaka : Boundary value problems for some degenerate elliptic equations of second order with Dirichlet condition, Proc. Japan Acad. vol 46

1970, 248 - 252

- [4] A. Nakaoaka : On Dirichlet problems for some degenerate elliptic equations. Journal of Math. of Kyoto Univ. vol 10, No 3, 1970 375 ~ 401
- [5] L. Nirenberg : Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. vol 8 1955 648 - 674
- [6] N. Shimakura : Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré. Journal of Math. of Kyoto Univ. vol 9, No. 2, 1969 275 - 335