

## 熱音響振動における非線形動力学（実験）

愛知教育大学 矢崎 太一 (Taichi Yazaki)

熊本大学 福島 和洋 (Kazuhiro Fukushima)

九州工大 山田 知司 (Tomoji Yamada)

1. 熱音響振動      熱的に音波を励起（駆動）し、また制御する系を一般に熱音響振動 (Thermoacoustic Oscillation) と呼ぶ（音波の熱的効果も含む）。熱音響振動の歴史は非常に古く、その代表的現象はすでに西洋では2世紀以上前に観測されている（実は国内ではもっと以前に発見され今でも神事に利用されている）。フラスコを製作するとき自発的に発生する気柱音波 (Sondhauss Tube 1850)、ある熱源を含む気柱内で発生する奇妙な音 (Reijke Tube 1859) および我々が注目している急激な温度勾配によって熱的に励起される大振幅気柱自励振動 (Taconis Oscillation 1949) など熱音響振動に伴う現象（不安定性）は数多く知られている。しかし熱音響に伴う多くの Complexity から未だ多くの問題が解決に至っていないのが現状だと理解している。最近この現象が注目さ

れだした。熱音響振動に基づく新型冷凍器（米国を中心として発展し国内でも筑波大学の富永らの“波動冷凍研究会”が発足している）への応用や熱音響振動に伴う非常に豊富な非線形現象の観測がその大きな理由であろう。我々はこれらの系を対流不安定性と同様に非線形非平衡系の代表的現象として位置づけその動力学的性質を実験的に明らかにしてきた。

2. Taconis Oscillation System この振動系を簡単（本質的）な実験系で置き換える。全長 3m, 内半径 1.2mm の両端の閉じたステンレス管の軸方向に沿って高温部 296K（一定）および低温部 4.2K（50Kまで可変）からなる階段型の対称的温度分布を液体ヘリウムの強制冷却法により確立した。作業流体はヘリウム気体を用いた。この振動の安定性を特徴づける重要な変数はそれぞれ高温部および低温部の管の半径に対する温度境界層の比である。すなわち

$$\left( \frac{r_0}{\delta_T} \right)_{Hot}, \quad \left( \frac{r_0}{\delta_T} \right)_{Cold}$$

である。但し  $\delta = \sqrt{\alpha/\omega}$ 、 $\omega$  は振動の角周波数  $\alpha$  は気体の熱拡散係数である。実験的に上記の変数は独立変数ではないのでこれら2式から以下のような独立変数で置き換える。

$$R = r_0 (\alpha_c / \alpha_{cl})^{1/2}, \quad T_H / T_C$$

$\alpha_c, l$  はそれぞれ低温部の断熱音速および管長である。温度比を一定に保ちながら  $R$  を連続的に変化させることで安定不安

定間の中立曲線を実験的に決定した。パラメータとして高温部と低温部の管長の比 $\xi$ をとり実験では0.3を選んだ。結果を図1に示す。温度境界層の厚い領域では管内の高次(2次及び3次)のモードが基本モードよりも早く励起され中立曲線の交差が観測される。この主な原因は $\xi$ の選び方による。

基本モードの中立曲線は線形安定理論で既に予言されており、実験結果との一致は非常によい。しかし中立曲線内部での分岐構造等についての研究は全くなされていない。

内部での大振幅領域で起こる非線形現象を実験的

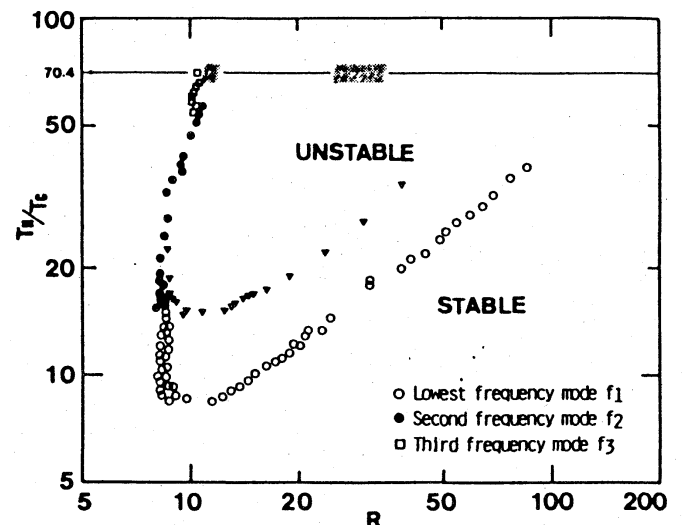


FIG.1 Experimental phase diagram as a function of temperature ratio  $T_H/T_C$  vs  $R=r(ac/ac_l)^{1/2}$ . Under constant temperature ratio  $T_H/T_C=70.4$  competition between two adjacent oscillatory modes leads to quasiperiodic states in the shaded regions. Stability limits for an asymmetric tube closed at  $X=0$  and  $L$  are shown by solid triangles.

に調べた。温度比一定(70.4:高温部は室温,低温部は液体ヘリウムに浸す)の基でコントロールパラメータ $R$ を連続的に増加させる。この過程で起こるモード間の非線形相互作用によるカオスの観測について以下に示す。

### 3. 複数モードの競合によるカオスの発生 中立曲線の交差

は複数モードの同時励起を可能にさせ、それらの非線形競合により準周期運動、引き込み現象およびカオスなどの観測を

可能にする。図2はRの連続的増加に伴う観測された圧力揺らぎとそのパワースペクトルを示す。基準振動モード2次および3次の高次モードの競合により3-トーラスを経てカオスに転移する道筋が存在する。しかし講演でも述べたようにRの増加によって2-トーラスの

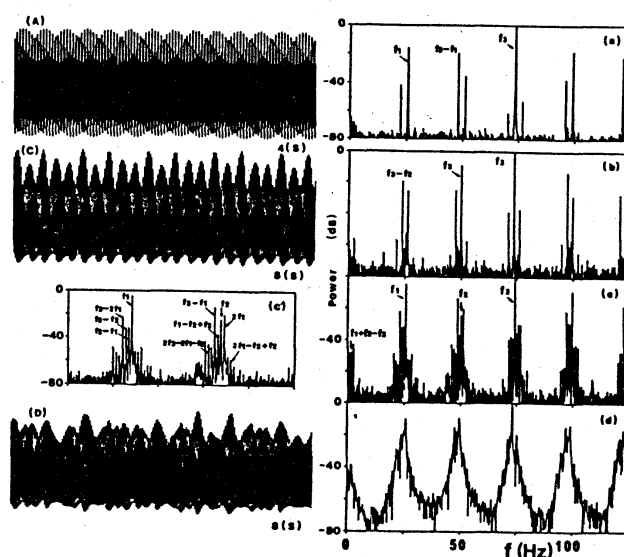


図 2

ルートに転移しカオスに発展する場合もある(省略)。全ての時系列は 12bit 16Kwordsを用いて解析された。いずれにせよ中立曲線内部での分岐構造は非常に複雑であることが予想される(名古屋大学の杉岡・桑原が熱音響系の数値計算を行っており有限振幅での振舞いを調べている)。図2に示した

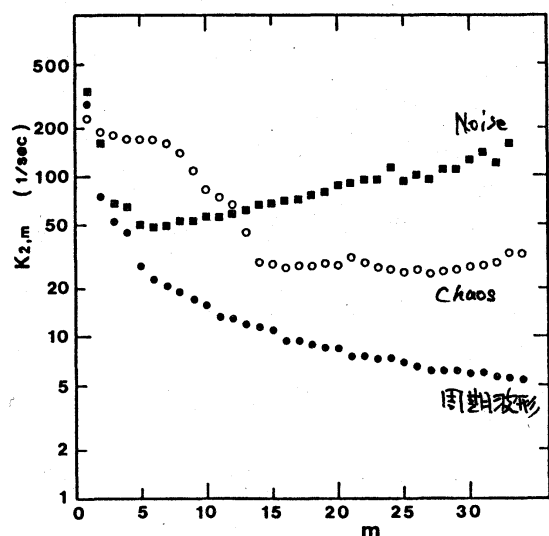


図 3

非周期波形が決定論的カオスであることを実証しておく。時系列の約10000点を用いて再整理し埋め込み法を用いて35次元まで位相空間を構成し相関積分を計算した。図3はKolmogorov Entropyを相関積分の結果から見積ったものであ

る。埋め込み次元を増加するとともに非周期的波形にたいし Entropy が一定値に収束していることがわかる。少なくとも Lyapunov 指数の 1 つは正の値をとる。このように熱音響気柱振動はモード間の強い非線形結合によりカオスを生み出すことが明かとなった。我々は熱音響系を用いて準周期運動からカオスへの臨界点近傍で成立するいくつかの普遍性を実験的に調べた。目的は熱音響という非常に複雑な系が 1 次元の簡単な正弦写像と同じ Universal Class に属するか? を明らかにすることである。

#### 4. Forced Thermoacoustic Oscillations 高温部と低温部

の比を適当に選ぶと管内で励起される気柱振動モードは制限される。とくにこの比が 1 に近いと励起モードは基本波のみに抑えられる。この熱音響モードに外から力学的に周期的な力を加え準周期運動を経たカオス転移点近傍で成立する様々な普遍性を調べた。周波数の比（巻数比）は黄金平均の逆数に選んだ。この値は有理数で最も近似しにくい値であることが理由である。また非線形性の強さは外力の振幅を変えることにより変化させた。黄金平均への調整は圧力揺らぎを周波数軸を対数にし直接スペクトルアナライザーで自己相似性を確認しながら行った。時系列は適当なサンプリング周波数と外力の周波数に応じてサンプリングしたストロボ的な 2 種

類をそれぞれ 16384 点ずつ採用した。

5. カオス転移が起こる条件 準周期運動からカオスへの転移が観測されるためには 無摂動でのタコニス振動の振幅に厳しい制限が課せられる。この状況は対流系やスピン波系に共通している。図4は振動不安定性が励起された直後（少振幅）に外力を加えた圧力揺らぎのスペクトルを示す。非線形

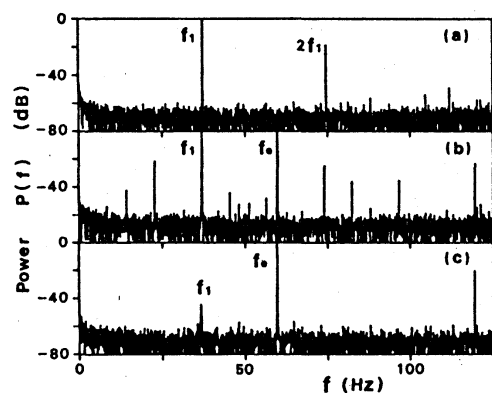


図 4

相互作用による小数のピークからなる準周期運動の後でさらに外力を増すと振動不安定性のピークが抑制される。不安定性のより大きな振幅のもとでの外力に対する振舞いは非常に複雑である。我々の目

ざす臨界点には到達しないが、ある外力の臨界振幅を越えると上記の様な抑制現象が観測される。しかし外力は決して系の流れを完全に支配することはできない。図5は外力の増加に伴った圧力揺らぎを外力の周波数に応じてサンプリングしたストロボ的信号を示す。系が完全に外力に支配されるとこの振幅は完全にゼロとなるはずである。準周期運動では一様な振幅の波形が得られるはずである。図5は抑

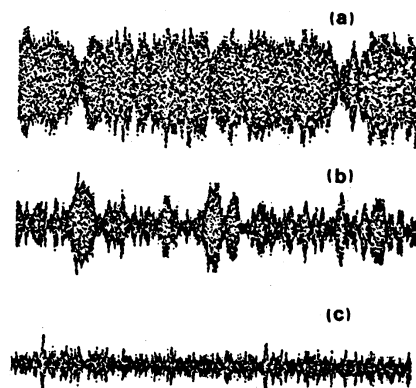


図 5

制過程に発生する新たな間欠的非周期振動を示している。これは既に分類されている3つのタイプの間欠カオスには決して属さない。なぜなら波高の異なった多くのバースト波形から構成されているからである。バースト振幅になんらかの分布が存在しているように見える。すなわち振幅に分布持つ新たなタイプ間欠カオスであることが予想される。現在解析中である。とにかく準周期からカオス転移を観測するためには不安定性の振幅（またはコントロールパラメータ）に何らかの制限が課せられる。臨界点は2つの振動モード（熱音響振動および外力）の振幅と周波数をパラメータとする多重空間の Multicritical Point と見なされ、多重空間はある平面（系の巻数に依存するが）で2種類の領域に分類される。少振幅領域と大振幅領域である。我々が目指すカオス臨界点は少振幅領域には決して存在しない。大振幅領域のみにその転移点は存在する。カオスが観測される最小の振幅が Multicritical Point の最小値に対応するはずである。以下では大振幅領域で観測された準周期運動からカオス転移点付近で成立するスケール普遍則の実験結果を示す。

6. 準周期からカオス転移。 振動不安定性の振幅を大振幅領域になるよう  $R$  を設定する。 周波数の比を黄金平均に調整しながら外力の振幅を増していくと図6に示すように系は

準周期運動 (b) からカオス臨界点 (C) に達する。しかしさらに外力を増しても決してより乱れた運動には至らず、少振幅領域で観測されたように系の流れは外力に支配される傾向にある。しかし流れは完全には支配されず連続スペクトルが残るのを観測している (d)。臨界点近傍の Local Scaling Universalities の一つはパワースペクトラムの低周波数領域の envelope

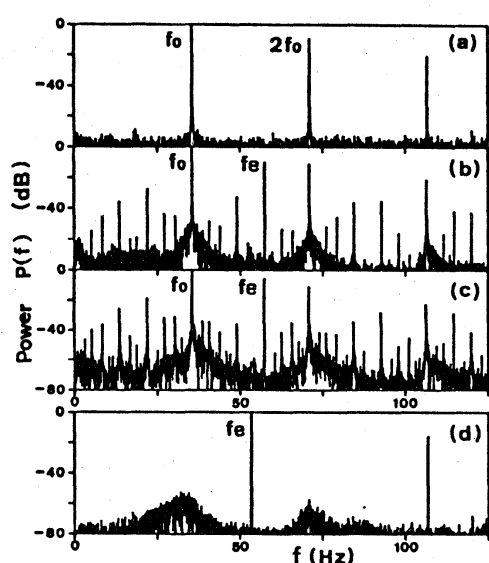


図 6

envelopeに見られる可能性がある。

我々はこれを明らかにするために図 6 に示されたスペクトルの低周波数部分のパワーを周波数の 2 乗でスケールしさらにこれを周波数の対数軸で再整理した。結果を図 7 に示す。臨界点近傍では低周波領域ではそのパワーは周波数の 2

乗でスケールされさらに臨界点以下では周波数の 4 乗でスケールされることが実験的に明らかになった。ここでラベル 1、2、3 のピークは異なった Seed を持った Fibonacci 数列の相隣合う数で外力と振動不安定のスペクトルを線形結合したピークを示す。ラベル 1、2 および 3 は Seed (1, 1)、(2, 2) および (1, 3) から作られる Fibonacci 数列に対応したピークである。臨界点近傍に近づくに従いスケールベキ法則が 4 乗から 2 乗に乗り

移ることが実験的に明かとなった。とくに臨界点近傍におけるべき法則は他の実験系（対流系および半導体系）でも観測されている。彼らは実験で得られた事実が1次元正弦写像の回転角のスケールべき法則と一致していることを主張した。すなわち実験的観測量が正弦写像の回転角に対応する。しかし観測量は正弦写像の回転角ではなくその一次元写影

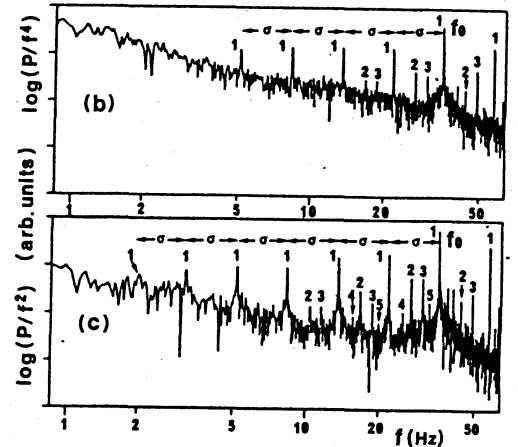


図 7

(Cartesian coordinate) に対応すべきであることは実験的にPoincare横断面を時系列から再構成することを考えれば明白な事実である。一次元正弦写像の臨界点での写影のスペクトルは周波数の4乗でスケールされる。しかし今までの実験は、すべて臨界点では周波数の2乗則を支持している。我々の実験で得られた4乗則から2乗則へのべき法則の変化は、この問題を解決する大きなヒントとなる。図7(b)および(c)に

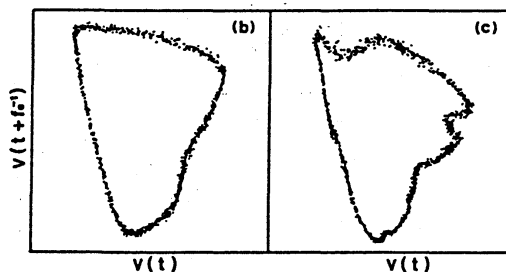


図 8

対応したPoincare横断面を図8に示す。臨界点に近づくに従い横断面は緩やかな歪から鋭い歪を持ったものに変化することがわかる。我々はこのPoincare横断面の変化が熱音

響系で観測されたベキ法則の変化に反映していると確信している。回転角については勾配1の線形(mod1)写像で近似して動径方向は連続的閉曲線をもつモデルと不連続で接続されるモデル(九州大学森のグループ)で観測量として Cartesian coordinate の時系列を計算しそのスペクトルを調べた。結果を図9に示す。このモデルは実験結果のベキ法則の変化をよく説明している。愛教大の宮代等によりこのモデルに基づく詳細な計算がなされ横断面に沿って一つでも不連続な場所があると2乗則を示し他は4乗則になることが確認されている。スペクトルの自己相似性は圧力揺らぎのみならず局所的リアプノフ数の揺らぎのたしこみにも現れる。実験で得ら

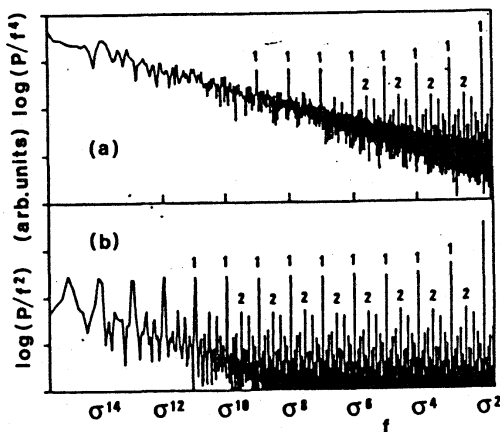


図9

れた回転角に対する写像を用いてこの揺らぎのたしこみを計算した。図10はそのスペクトルを調べた結果である。Fibonacci 数列で特徴づけられる自己相似構造がリアプノフ数の揺らぎに

も反映している。

Global universality を調べるため外力の振幅を臨界点近傍に合わせて駆動周波数を黄金平均のまわりでスイープすることにより系のストロボ波形を観察した。結果を図11に示

す。  $\text{seed}(1,1)$  を持つ Fibonacci 数列の隣合う比で序列した引き込み領域が Farry tree に従って規則的に周波数領域を占める (devil's staircase) 様子が解

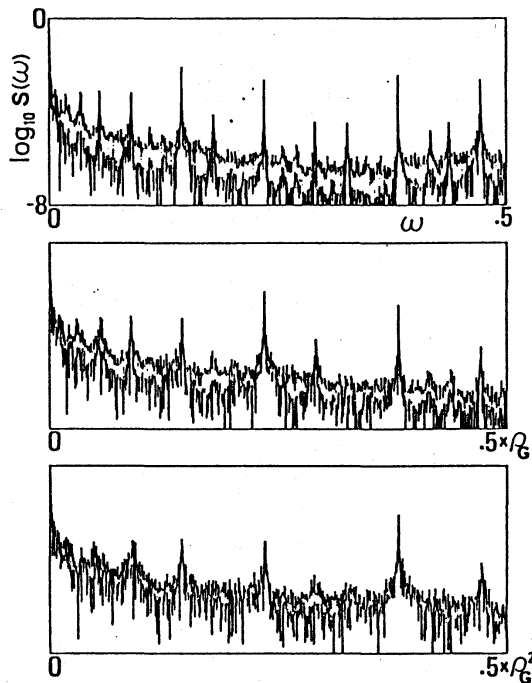


図 10

る (devil's staircase) 様子が解る。臨界点に沿った引き込み領域は Cantor 集合を示すことが予想される。ストロボ波形を解析することによりそのフラクタル次元を見積ることができる。結果は外力の振幅を増加すると共に次元は減少し、臨界点近傍ではおよそ  $0.89 - 0.87$  程度の値をとることが解った

この値は正弦写像で予想されている値に非常に近い。さらにカオス発生点における臨界軌道の多重フラクタル構造を特徴づけるため特異点スペクトルを調べた。結果はある一次元写像のそれとよく一致した。

熱音響系で得られた非線形現象の実験結果の一部を紹介した。非常に複雑な系にもかかわらずその振舞いはある数学的モデルと同じ Universal Class に属することが明かとなっ

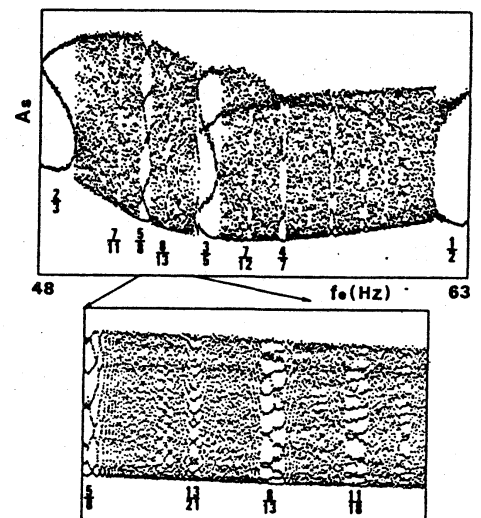


図 17

た。この系に対する写像の適用性はたとえ基礎方程式が解っていなくてもまた解くことが難しくとも熱音響系の定性的な振舞いを効率的に予測することを可能にしてくれる。この事実は今後の熱音響振動系の発展および応用に対して非常に重要であると確信している。

この研究は分子科学研究所（機器センターおよび低温センター）で行われた。液体ヘリウムの供給に関し早坂、加藤および高山氏にお世話になった。さらに文部省科学研究費および石田財団からの助成金によりこの研究をより発展することができた。