

Boolean valued combinatorics

東大 教養 難波完爾

自然数の全体 N と、実数の全体 R (連続体, continuum) の
位数 (基数, 濃度, cardinality) に対する素朴な問題, 即ち G.
Cantor の連続体仮説 "すべての集合 A に対して

$$\bar{N} \leq \bar{A}, \bar{A} \leq \bar{R} \rightarrow \bar{R} \leq \bar{A}, \bar{A} \leq \bar{N}$$

は成立するか", 又同じことであるが無限基数の標準的列

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\omega, \dots$$

に対して $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ なる $2^{\aleph_0} = \bar{R}$ がどこに位置するかの仮説

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

については, Cantor 自身, そして後には Lusin 等によっても
深く研究されたが, その証明可能性に対する具体的結果は K.
Gödel によって得られた. 即ち

"連続体仮説の否定を証明することは出来ない"

であり, これは勿論, 次のこと、同じである.

"連続体仮説を仮定しても矛盾しない"

そして 1963 年に至って, 逆方向の決定的結果が P. J. Cohen

によって証明された。即ち

‘連続体仮説の否定を仮定しても矛盾しない’

というのである。これらによって連続体仮説はその肯定も否定も Zermelo-Fraenkel の集合論の公理から証明出来ないことが知られるに至ったのであるが、実際にそれが“正しい”かどうかは未知のものである。

さて、その後 R. M. Solovay と D. Scott によって P. J. Cohen の用いた “forcing” の概念が代数的に明確に記述された。即ち

“complete Boolean algebra とその dual space”

である。勿論 dual space の元とは $h: B \rightarrow 2$ への homomorphism のことである。これらの概念を用いて、一般に、場合によっては無意識に用いられている、論理体系とその公理。即ち

古典述語論理

Zermelo-Fraenkel の集合論

についての性質をより明確に記述し得たといつてよいと思う。

少しくといののであるが、一応 Zermelo-Fraenkel の集合論の公理を記しておく。これは例えば category の全体の category CAT 等のものは除いて、その中ではかなり自由に数学を展開できるもので、公理もある程度素朴な形を保っている。

Extensionality (外延性)

$$\forall x \in a (x \in b), \forall x \in b (x \in a) \rightarrow a = b$$

Pair (对集合) $\{a, b\}$

$$\exists c \forall x (x \in c \equiv x = a \vee x = b)$$

Sum (和集合) $\cup a$

$$\exists b \forall x (x \in b \equiv \exists y \in a (x \in y))$$

Power (中集合) $\wp(a)$

$$\exists b \forall x (x \in b \equiv \forall y \in x (y \in a))$$

Empty set (空集合) $\emptyset, 0$

$$\exists a \forall x (\neg x \in a)$$

Infinity (无限公理)

$$\exists a (0 \in a \wedge \forall x \in a (x+1 \in a))^{1)}$$

Comprehension (分出公理), Sub set (部分集合)

$$\exists b \forall x (x \in b \equiv x \in a \wedge P(x))$$

Replacement (置換公理)

$$\forall x \in a \exists y P(x, y) \equiv \exists y \forall x \in a \exists z \in y P(x, z)$$

Foundation (基礎公理), Induction (歸納法)

$$\exists x P(x) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge \forall y \in x \neg P(y))$$

$$\forall x (\forall y \in x P(y) \rightarrow P(x)) \rightarrow \forall x P(x)^{2)}$$

Axiom of choice (選擇公理)

$$\forall x \in a \exists y P(x, y) \equiv \exists y \forall x \in a P(x, y(x))$$

¹⁾ $x+1 = x \cup \{x\}$, $x \cup y = \cup \{x, y\}$ ²⁾ 互: 对偶.

通常 ZF と記せば Axiom of choice (AC) を除いた上記公理を意味し ZFC は AC を含めた時の名称である。

B を Boolean algebra とする。即ち

$$a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$a + (b \cdot c) = (a + b)(a + c) \quad a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a + (b \cdot -b) = a \quad a(b + -b) = a$$

を満足するものとする。 B には自然な順序

$$a \leq b \quad \equiv \quad ab = a \quad \equiv \quad a + b = b$$

があり、 B の任意の部分集合 A が最小上界 μ を有するとき、即ち

$$\forall x \in A \quad (x \leq \mu)$$

$$\forall y \quad (\forall x \in A \quad (x \leq y) \rightarrow \mu \leq y)$$

が成立するとき B は完備ブール代数 (complete Boolean algebra) といい、最小上界を

$$\sum A \quad \sup_{x \in A} x$$

等と記する。完備ブール代数の代表的な例は：

1. 位相空間 X の正則開集合¹⁾の全体。それは開集合を nowhere dense set の全体の Ideal で割った商代数でもある。
2. Borel 集合族 B 上の σ -finite な測度 μ に対し、それを μ 測度 0 の Ideal で割った商代数。

¹⁾ $\text{int } \bar{A} = A$

完備ブール代数の中で最も簡単なものは真1, 偽0の2元より成るもので

$$2 = \wp(1) = \{0, 1\}$$

であり, すべての完備ブール代数の部分代数である.

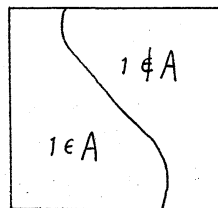
Solovay - Scott の考え方は

“集合と表現函数の同一視”

であって, $A \subset X$ をその表現函数

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases} = \|x \in A\| \in 2$$

で表現されていると考えれば, B を完備ブール代数として, $x \in A$ の真偽値 $\|x \in A\|$ としては B の元のどれでも可能と考えたのである. 例えは下の図では通常測度で $1 \in A$ も $1 \notin A$ もほぼ $\frac{1}{2}$ の確率を有し互に背反なものと考えている.



集合論では集合と元とする集合を可能な限り考える. このことに対応して表現函数の方では, 表現函数の集合で定義され B の値を有する函数を可能な限り考える. ことを意味する. これは帰納法によって次のように定義される. 即ち

$$u \in V^{(B)} \equiv u; V^{(B)} \rightarrow B$$

を満足する最小な class (類) というものである。即ち

$$u \in U \equiv u; U \rightarrow B$$

ここに $u; U \rightarrow B$ は U の一部分から B への写像の意味である。
上記性質を有すれば

$$V^{(B)} \subset U$$

というのが帰納法といった意味である。

集合論の = の基本的述語記号 $=$, $\in$ については,

$$u = v \equiv \forall x \in u (x \in v) \wedge \forall x \in v (x \in u)$$

$$u \in v \equiv \exists x \in v (x = u)$$

にならうて, $V^{(B)}$ の元 u, v についての帰納法で

$$\|u = v\| = \prod_{x \in \text{dom}(u)} (u(x) \Rightarrow \|x \in v\|) \cdot \prod_{x \in \text{dom}(v)} (v(x) \Rightarrow \|x \in u\|)$$

$$\|u \in v\| = \sum_{x \in \text{dom}(v)} (v(x) \cdot \|x = u\|)$$

と定義する。ここに $\Rightarrow$ は論理記号 "ならば" に対応するもの

で $a \Rightarrow b = -a + b$ であり, or , $+$ が和, and , $\cdot$ が積,

$implies$, $\Rightarrow$ は指数に対応し, 例えは $a \Rightarrow b$ を b^a のように記

せば $(a \Rightarrow b)(c \Rightarrow b) = (a + c \Rightarrow b)$ のような指数の法則を満足する。

これらは例えは

$$b^a b^c = b^{a+c} \quad (a^b)^c = a^{bc} \quad (ab)^c = a^c b^c$$

ここに, $\cdot$ の体系に対する基本的性質を記しておく。

1. 古典述語論理で証明可能な論理式はすべて値1を有する
即ち“正しい”。

2. 等号に関する公理

$$u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n, A(u_1, \dots, u_n) \rightarrow A(v_1, \dots, v_n) \\ \rightarrow u = u$$

が成立する。

3. 束縛された論理記号に対して

$$\| \exists x \in u A(x) \| = \sum_{x \in \text{dom}(u)} u(x) \| A(x) \|$$

が成立する。

4. maximum principle (最大値定理)

$V^{(B)}$ の元 u が存在して

$$\| \exists x A(x) \| = \sum_{x \in V^{(B)}} \| A(x) \| = \| A(u) \|$$

が成立する。

5. conditional maximum principle (条件付最大値定理)

$$\| \exists x B(x) \| = \| B(u) \| \quad \text{で} \quad \| \exists x B(x) \wedge A(x) \| = \| A(u) \|$$

となる $V^{(B)}$ の元 u が存在する。

6. ZFC の公理はすべて $V^{(B)}$ の中で“正しい”即ち値1を有する。

したがって、ZFCより等号に関する公理を用いて古典述語

論理で、要するに普通に、証明可能な論理式は値1を有する。

したがって、適当な B について $V^{(B)}$ の中で $\|A\| < 1$ であれば ZFC から証明出来ないものである。例えば

$$2 = \{0, 1\}$$

の元に $\frac{1}{2}$ ずつの確率を与えた空間の位相の直積の上の測度から作られる完備ノール代数 B については

$$\|2^{\aleph_0} = \aleph_2\| = 1$$

が正しくなってしまうのである。

さて 1 ~ 5 等の証明には、 α を順序数として

$$\sum_{p < \alpha} a_p = \sum_{p < \alpha} (a_p - \sum_{q < p} a_q)$$

及び definition by cases (場合分け定義) が用いられる。即ち

$(a_p \mid p \in A)$ を 1 の分解、即ち

$$\sum_{p \in A} a_p = 1 \quad p \neq q \rightarrow a_p \cdot a_q = 0$$

とすると、 u_p の線型結合

$$u = \sum a_p u_p$$

くわしくは $V^{(B)}$ の元として

$$\text{dom}(u) = \bigcup_{p \in A} \text{dom}(u_p)$$

$$u(x) = \sum_{x \in \text{dom}(u_p)} a_p \cdot u_p(x)$$

とすると、

$$a_p \leq \|u\| = \|u_p\|$$

が成立するのである。ここに用いられる $\|u=v\|$ が Kronecker や Dirack の δ に対応するもので、関係

$$\sum_u \|A(u)\| \|u=v\| = \|A(v)\|$$

$$\int f(x) \delta(x-y) dx = f(y)$$

の類似であることは注意すべき点である。

二つの完備フル代数の間の complete な homomorphism に対する標準的分解

$$B_1 \xrightarrow{h} h(B_1) \xrightarrow{i} B_2$$

即ち h は projection, i は injection であって、これらに依いて

$$V(B_1) \xrightarrow{h} V(h(B_1)) \xrightarrow{i} V(B_2)$$

が帰納法により、自然に定められる。即ち

$$h(x) \in \text{dom}(h(u)) \equiv x \in \text{dom}(u)$$

$$h(u)(h(x)) = \sum_{\substack{h(x)=h(x') \\ x' \in \text{dom}(u)}} h(u(x'))$$

と定めれば、再び帰納法により

$$\|h(u)=h(v)\| = h(\|u=v\|)$$

$$\|h(u) \in h(v)\| = h(\|u \in v\|)$$

等が成立する。 h が projection であれば、 i の拡大も projection であり、injection に対応しても同様である。 h が projection, surjection なら

$$V^{(b_2)} = \{h(u) \mid u \in V^{(b_1)}\}$$

であるから、論理式の構成に関する帰納法で

$$h(\|A(u_1, \dots, u_n)\|) = \|A(h(u_1), \dots, h(u_n))\|$$

が証明出来るが、 h が injection の場合は bounded formula, 即ち

$\forall x \in u, \exists x \in u$ の形の束縛記号のみ含む論理式について

$$h(\|A(u_1, \dots, u_n)\|) = \|A(h(u_1), \dots, h(u_n))\|$$

は成立するが、一般の論理式については交換可能性は必ずしも成立しない。そして、この性質の故に色々の独立性の証明が可能なのである。

例えば、和集合 $a = \cup b$ については

$$\forall x \in a \exists y \in b (x \in y) \wedge \exists y \in b \forall x \in y (x \in a)$$

で bounded であるが、中集合 $a = p(b)$ については

$$\forall x \in a \forall y \in x (y \in b) \wedge \forall x (\forall y \in x (y \in b) \rightarrow x \in a)$$

であって、意味をそのまま、素朴に記した表現では後半の $\forall x$ が bounded でない。

又、 a が順序数であるという概念 $\text{Ord}(a)$ は

$$\forall x \in a \forall y \in x (y \in a) \wedge \forall x \in a \forall y \in x \forall z \in y (y \in x)$$

で bounded であるが、 a が基数、又は initial number である：

と、即ち $\text{Card}(a)$ は

$$\text{Ord}(a) \wedge \forall x \in a \forall f: x \rightarrow a \exists y \in a \forall z \in x (f(z) \neq y)$$

であって $\forall f$ の部分は bounded でない。実際に適当な Boolean

algebra によって bounded でないことが示される。さて簡単なことであるが少し注意しておく、 $a = \wp(b)$ とか $\text{Card}(a)$ の中の bounded でない quantifier は両方とも $\forall$ 、即ち universal であって $\exists$ 、即ち existential ではないが、これは偶然ではなくかなり多くの素朴な概念が unbounded な $\forall$ のみを含む、これを“すべて”と Π になぞらえて Π_1 の性質と称している。又例えば集合 a でその中で集合論の公理がすべて満足されるような a の存在性などは unbounded な $\exists$ を一つ含むので“exist”に対応する記号 Σ を用いて Σ_1 の性質と称している。又、例えは measurable cardinal の存在、即ち集合 x の中集合 $\wp(x)$ で定義された可算加法的測度 $\mu: \wp(x) \rightarrow \{0,1\}$ で singleton の上で 0 となるもの、即ち $\mu(\{x\}) = 0$ の存在等は $\exists x \forall y P(x,y)$ の形の論理式で表現され Σ_2 の性質と呼ばれている。したがって、これらの概念は完備ブール代数の選択によってかなり自由に意味が変化したのである。

このように論理式の形に注目するときには ZFC の公理も仲々興味深い。例えば置換公理

$$\forall x \in a \exists y P(x,y) \equiv \exists y \forall x \in a \exists z \in y P(x,z)$$

とか axiom of choice

$$\forall x \in a \exists y P(x,y) \equiv \exists y \forall x \in a P(x,y(x))$$

等は unbounded な束縛記号を保ちながら bounded な束縛記号と

交換する：と主張している。

さて標準的分解

$$V^{(B_1)} \xrightarrow{h} V^{(h(B_1))} \xrightarrow{i} V^{(B_2)}$$

に対して h は *surjection* であるから、真偽値は h と交換可能であって、証明可能性とか独立性に関してはいさしあたり興味はない。そこで $V^{(h(B_1))} \xrightarrow{i} V^{(B_2)}$ の部分に注意する。

特に $2 \subset B$ であるので

$$v : V = V^{(2)} \longrightarrow V^{(B)}$$

について考えてみよう。勿論 V と $V^{(2)}$ の自然な関係は

$$\check{a} \in \text{dom}(\check{v}) \equiv a \in b$$

$$\check{v}(\check{a}) = 1$$

と定めるのが自然である。

1 の分解と $V^{(2)}$ の元について少し記しておく。今

$$\|u \in V^{(2)}\| = 1$$

とすると

$$\|u \in V^{(2)}\| = \|\exists x \in V^{(2)} (u=x)\| = \sum_{x \in V} \|\check{x}=u\|$$

であり $\|u=\check{x}\| \|u=\check{y}\| \leq \|\check{x}=\check{y}\|$ であるから $x \neq y$ ならば $\|\check{x}=\check{y}\|=0$

よって $w(x) = \|u=\check{x}\|$ は集合

$$b = \{x \mid \|u=\check{x}\| > 0\}$$

を *index* にもつ 1 の分解であり、又遂に標準的一次結合

$$w = \sum_{x \in b} v(x) \check{x}$$

は $\check{b}$ の元を意味している。

$\check{b}$ 上の B -valued vector と $V^{(B)}$ の元について $\|u \subset \check{b}\| = 1$ とすると $\|\check{x} \in u\| = v(x)$ ($x \in \check{b}$) は $\check{b}$ 上の vector であり、又このような v は $\check{b}$ の部分集合を決定するので

" $\check{b}$ 上の B -値 vector は $\check{b}$ の subset"

である。勿論、共通部分には成分各の積が、そして空であることは長さ $\sum v(x) = 0$ 、空でないことは $\sum v(x) = 1$ 、又互に素であることには、内積 $\sum v_1(x)v_2(x) = 0$ 、即ち直交性が対応している。同様にして

" (ab) 型の B -値 matrix は $\check{a} \times \check{b}$ の relation"

を意味しており、 u, v をそれぞれ $(ab), (bc)$ 型の matrix とするとき、その積

$$uv(x, z) = \sum_{y \in \check{b}} u(x, y) v(y, z)$$

は二つの関係の積に対応している。

次に、函数 $f: \check{a} \rightarrow \check{b}$ についても、その graph と考えれば

$$\text{domain: } \|\forall x \in \check{a} \exists y \in \check{b} (\langle y, x \rangle \in f)\| = 1$$

$$\text{uniqueness: } \|\forall x \in \check{a} \forall y_1, y_2 \in \check{b} (\langle y_1, x \rangle \in f \wedge \langle y_2, x \rangle \in f \rightarrow y_1 = y_2)\| = 1$$

であるから $u(y, x) = \|\langle \check{y}, \check{x} \rangle \in f\|$ とすると

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \check{a}} u(y, x) &= 1 & (x \in \check{a}) \\ \sum u(y_1, x) u(y_2, x) &= 0 & (y_1 \neq y_2) \end{aligned}$$

であり、上式は行ベクトルの長さ 1 で、下式は列ベクトルが

互に直交する：と意味している。

$$\text{surjection: } \|\forall y \in \check{L} \exists x \in \check{A} (\langle yx \rangle \in f)\| = 1$$

$$\text{injection: } \|\forall y \in \check{L} \forall x_1, x_2 \in \check{A} (\langle yx_1 \rangle \in f \wedge \langle yx_2 \rangle \in f \rightarrow x_1 = x_2)\| = 1$$

は，列ベクトルの長さ 1，行ベクトルが互に直交する：と意味している。したがって bijection は unitary matrix に対応している。しかし，例えば provability measure μ によって作られた完備ブール代数として $u(yx)$ が x, y について independent とすれば，一般には disjoint ではないので $\mathcal{B}$ 値の unitary matrix $u(y, x)$ から，実数値の matrix $(\mu(u(y, x)))$ を作っても unitary とは限らない。

この様な立場から素朴な性質について少しふれておこう。

1. Box argument (pigeon hole principle)

(nn)型の行列 u ，その転置 u^* について

$$u^*u = 1_n \equiv uu^* = 1_n$$

2. Axiom of choice

$$\exists u: a \xrightarrow{\text{onto}} b \longrightarrow \exists v: b \xrightarrow{1-1} a \quad (uv = 1_b)$$

に対しては， $u^*u \geq 1_a$ ， $uu^* = 1_b$ に対して

$$vv^* \leq 1_a, v^*v = 1_b, uv = 1_a$$

なる v が存在する：と意味している。

3. Cantor-Bernstein theorem

$$\exists u: a \xrightarrow{1-1} b, \exists v: b \xrightarrow{1-1} a \longrightarrow \exists w: a \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} b$$

この意味は、ある u, v に対して

$$u^*u = 1_a \quad uu^* \leq 1_k \quad v^*v = 1_k \quad vv^* \leq 1_a$$

が成立すれば、ある w に対して

$$w^*w = 1_a \quad ww^* = 1_k$$

となる。具体的にはその証明にしたがって

$$w = \sum_{n \in \omega} (vu)^n (\check{a} - v\check{k}) \cdot u + \sum_{n \in \omega} v(uv)^n (\check{k} - u\check{a}) \cdot v^* + \prod_{n \in \omega} (vu)^n \check{a} \cdot u$$

4. Cantor の定理 $\bar{a} < \overline{2^{\bar{a}}}$

$f: a \rightarrow p(a)$ には自然に (a, a) 型の正方行列が対応している。

いわゆる orthogonal argument は

$$v(x) = -u(x, x)$$

なる vector を考える：ここで、symmetric difference を用いて

$$\|u \neq v\| = \|\exists x \in \check{a} (u(x) \oplus v(x))\| = \sum_{x \in a} ((u(x) - v(x)) + (v(x) - u(x)))$$

であるから、すべての $x \in a$ に対して

$$\sum_{y \in a} v(y) - u(x, y) + \sum_{y \in a} u(x, y) - v(y) = 1$$

なることを意味している。

$\check{a}$ の元は a を index とする 1 の分解、その部分集合は a 上の B 値 vector であるから $V^{(B)}$ の中ではそれらの基数は異なる：

とを意味している。勿論、例えば $[0, 1]$ の regular open set

から成る B に対しては、 ω 上の 1 の分解の全体は $2^{\aleph_0}$ 、又 ω

上の B 値 vector の全体も $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ で V の中では同一の

基数を有している。

今まで $V^{(2)}$ の元の subset について述べて来たが、一般には次のようにすればよい。即ちよく知られているように、すべての集合はある基数と 1-1 対応する。よって

$$\sum_{\text{Card}(\alpha)} \|\check{\alpha} = \bar{u}\| = 1$$

であり、基数の集合 $d = \{\alpha \mid \|\check{\alpha} = \bar{u}\| > 0\}$ を index にする 1 の分解である。今 $b_\alpha = \|\check{\alpha} = \bar{u}\|$ とすれば maximum principle により

$$b_\alpha = \|f: \check{\alpha} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} u\|$$

である。よって f が 1-1, onto を用いて α 上の B -vector は f を通じて u の部分集合と 1-1 に対応している。

同様に $u \times u$ 上の関係についても

$$w_f(x, y) = \|(f(\check{x}) f(\check{y})) \in w\|$$

を通じて (α, α) 型の matrix に対応している。又、他の g をもって $\|g: \check{\alpha} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} u\| = b_\alpha$ とすると、 $\|f^{-1}g: \check{\alpha} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \check{\alpha}\| = b_\alpha$ であるから $v = f^{-1}g$ は unitary、よって $f = vg$ である。又

$$w_g(x, y) = \|(g(\check{x}) g(\check{y})) \in w\|$$

とすると、特に w_f, w_g が函数の時には、 $g(\check{x}_1) = f(\check{x}_1)$, $g(\check{y}_1) = f(\check{y}_1)$ より $x_2 = f^{-1}g(x_1) = v(x_1)$, $y_2 = v(y_1)$ であるから

$$w_g(x_2) = y_2 \equiv w_g(v(x_1)) = v(y_1) \equiv v^{-1}w_g v(x_1) = y_1$$

$$w_g(x_2) = y_2 \equiv w_f(x_1) = y_1$$

故に $w_f = v^{-1}w_g v$ となり unitary 同値である。このようにして任意の u の変換は基数による 1 の分解によって直和分解出来

その各成分は b_α 上の unitary 同値を除いて一意に定まる。

次に B -valued matrix と不変集合について少し記しておく。

u は (a, a) 型の正方行列 x を vector として

$$ux = \lambda x$$

を考える。この内容は

$$\lambda \leq \|ux = x\|$$

であって、 $\check{a}$ の部分集合の関係 u による像が $\check{a}$ の集合と不変にすることと意味している。即ち

$$\lambda \leq \| \forall x \in \check{a} (x \in x \equiv \exists y \in x ((xy) \in u)) \|$$

である。このような不変部分空間の意味を考えてみよう。今 $ux \subset x$ とする。例えば $\check{a} = x$ 等はこの例である。さて $V^{(B)}$ の中で帰納法を用いて

$$u^{\alpha+1}x = uu^\alpha x \quad u^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} u^\beta x$$

とすると、 $V^{(B)}$ の中で $u^\alpha x$ は $\check{a}$ の単調な部分集合の列であるので、ある順序数に対して

$$uu^\alpha x = u^{\alpha+1}x = u^\alpha x$$

となる。故に $u^\alpha x$ は probability 1 で固有 vector 即ち不変集合である。 $u^\alpha \check{a}$ は不変集合の中で最大のものであるが $u^\alpha \check{a} = 0$ も可能であって、この場合 u の固有 vector は 0 のみであって nilpotent と呼ばれる。

さて、空でない不変空間の性質を調べてみよう。

$$\forall x \in \check{a} (x \in \mathbb{X} \equiv \exists y \in \mathbb{X} ((xy) \in u))$$

の意味は $\mathbb{X} \subset \check{a}$ の下では

$$\forall x \in \mathbb{X} \exists y \in \mathbb{X} ((xy) \in u)$$

$$\forall x \in \check{a} \forall y \in \mathbb{X} ((xy) \in u \rightarrow x \in \mathbb{X})$$

の両方が成立する：とであって，上式は $(xy) \in u$ と $x >_u y$ と記す：とにすれば， $x \in \mathbb{X}$ に対して

$$x >_u x_1 >_u x_2 >_u x_3 >_u \dots$$

となる無限下降列がある。即ち well-founded でない。又下式は

$$\forall x \in \mathbb{X} (x <_u y \rightarrow y \in \mathbb{X})$$

である。今

$$\mathbb{X} = \{x \in \check{a} \mid x \text{ is well-foundedでない}\}$$

とすれば，これは $\forall x \in \mathbb{X} (x <_u y \rightarrow y \in \mathbb{X})$ を自然に満足するもので，

これが最大の不変集合で，互に素な集合への分解

$$\check{a} = u^{\alpha} \check{a} + \{x \in \check{a} \mid x \text{ is well-founded}\}$$

は，前者で u は不変，後者では nilpotent であり，well-founded

であるから一つの順序数に対応するが，それが $x \in u^{\alpha} \check{a} - u^{\alpha+1} \check{a}$

なる α である。

さて，無限下降列 $d = x >_u x_1 >_u x_2 >_u \dots$ に対して，その transitive closure は

$$\sum_{n \in \omega} u^n d$$

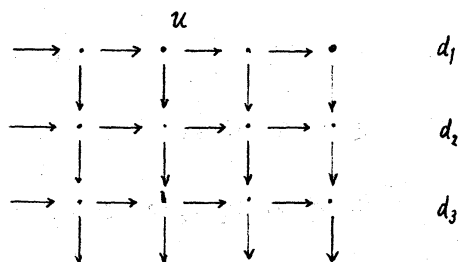
である。よって $ud \cap d$ を用いると，

$$u\left(\sum_{n \in \omega} u^n d\right) = \sum_{n \in \omega} u^{n+1} d = \sum_{n \in \omega} u^n d$$

となり d を含む最小の不変集合である。しかし一般には

$$T(d) = \sum_{n \in \omega} u^n d$$

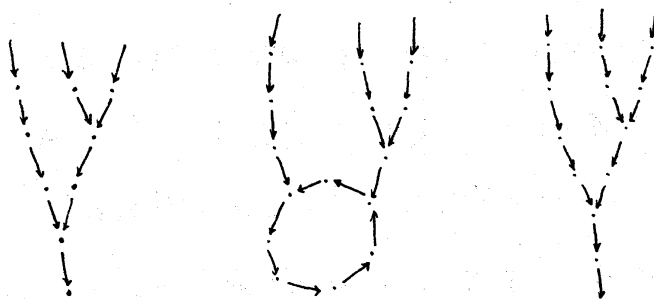
は既約な (極小な) 不変集合ではない



明らかに $T(d)$ の任意個数の和は再び不変集合であるが $T(d_1) \cap T(d_2)$

は一般には不変集合でない。

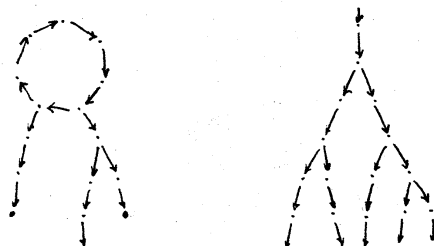
簡単な例をとってみよう。 ω が一価のときは図のようなもの



のであって $T(d)$ は各 branch であって、それらは既約である。

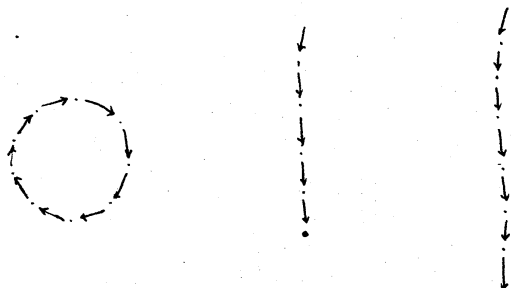
u が高々可算の多価性を有するときは α^* は可算な不変集合の

和である。又 u の逆の関係 u^* が一価であれば、図のようなもの



のであって、各 $\mathcal{I}(d)$ は既約であって、異なるものは互に素である。即ち最大固有空間は既約成分の直和である。

特に u , u^* が共に一価であれば有限の *loop* または *string* の直和に分解する。



又、他の極端な場合、即ち u が対称なときは二元が結べるかどうかで、いわゆる連結成分に分解する。この場合も勿論既約成分の直和である。