

KMO-ランジュヴァン方程式と Einstein の 関係式について

北大・理 岡 部 靖 憲

§ 1. 序

時間の経過と共に起こるランダム現象の中で見いだされた法則を、数学的にモデル化したのが確率過程論である。現在の段階は、確率論の中で発展し整備された確率過程論を、他の分野とのかかわりを通じて、その真価を問われる時であり、又、逆に確率過程論に新たな研究をひき起こす時でもある。

この第2回久保セミナーで話させていただくことは、統計物理学における Einstein の関係式 をその中にもつ 揺動散逸定理 の数学的構造を明らかにすることを目的として、10年前から始め、遅れの項をもつ確率微分方程式が導入され特徴付けられた KMO-ランジュヴァン方程式論 を紹介することです。数学のもつ普遍性により、この理論は離散時間の確率過程にも及び、カオスなどのランダムな時系列に対する統計力学的研究のひとつの糸口になると思われる。この研究の過程において、Einstein の関係式は連続時間の場合、久保ノイズに基づくときは成立し、白色ノイズに基づくときはズレが生じるが、離散時間の場合、久保ノイズ、白色ノイズ、どれに基づいてもズレが生じることが分かり、両方のノイズの相違を情報理論的にみるために2種類のエントロピーを計算した。離散時間のメッシュを限りなく小さくすれば、久保ノイズに基づいたときの Einstein の関係式のズレはなくなる。エントロピーに関する変分原理に基づいて、久保ノイズを特徴付けることは、今後の自分に対する揺動力と課し、近い将来散逸できる様研究するつもりです。

§ 2. 連続KMO-ランジュヴァン方程式論 ([7] ~ [18])

$X = (X(t); t \in \mathbb{R})$ を実弱定常過程で、平均は0、共分散関数 R は次の表現をもつとする；

$$(2.1) \quad R(t) = \int_{[0, \infty)} e^{-|t|\lambda} \sigma(d\lambda) \quad (t \in \mathbb{R})$$

ここで σ は $[0, \infty)$ 上の Borel 測度で、

$$(2.2) \quad \sigma(\{0\}) = 0, \quad 0 < \sigma([0, \infty)) < \infty$$

$$(2.3) \quad \int_0^\infty \lambda^{-1} \sigma(d\lambda) < \infty$$

をみたすとする。

$A = A(\xi)$ を R のスペクトル密度とすると、次のことがわかる：

$$(2.4) \quad R(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} A(\xi) d\xi$$

$$(2.5) \quad A(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda^2 + \xi^2} \sigma(d\lambda)$$

h と $[R]$ を X の outer 函数, mobility 函数 とする：

$$(2.6) \quad h(\zeta) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + \lambda\zeta}{\lambda - \zeta} \frac{\log A(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda \right) \quad (\zeta \in \mathbb{C}^+)$$

$$(2.7) \quad [R](\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{i\zeta t} R(t) dt \quad (\zeta \in \mathbb{C}^+)$$

定理 2.1 次の性質をみたす三つ組 $(\alpha_j, \beta_j, \rho_j) (j=1, 2)$ が唯一つつ存在する：

$$(i) \quad \alpha_j > 0, \beta_j > 0$$

$$(ii) \quad \rho_j \text{ は } [0, \infty) \text{ 上の Borel 測度で, } \rho_j(\{0\}) = 0, \int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda} \rho_j(d\lambda) < \infty$$

$$(iii) \quad \begin{cases} h(\zeta) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\beta_1 - i\zeta - i\zeta \int_0^\infty \frac{1}{\lambda - i\zeta} \rho_1(d\lambda)} \\ [R](\zeta) = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\beta_2 - i\zeta - i\zeta \int_0^\infty \frac{1}{\lambda - i\zeta} \rho_2(d\lambda)} \end{cases}$$

定義 2.1 三つ組 $(\alpha_1, \beta_1, \rho_1)$ と $(\alpha_2, \beta_2, \rho_2)$ とを夫々, R に付随する 第 1 KMO-ランジュヴァンデータ, 第 2 KMO-ランジュヴァンデータ という。

注意 2.1 第 1 KMO-ランジュヴァン方程式の導出には, 条件 (2.2) と (2.4) の他に,

$$(2.8) \quad \int_0^\infty \lambda \sigma(d\lambda) < \infty$$

が必要である。

これらの命名正当化のために, 白色ノイズ $\dot{B}$ と久保ノイズ I を導入する： $B = (B(t); t \in \mathbb{R})$ は標準的ブラウン運動で

$$(2.9) \quad X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \hat{h}(t-s) dB(s)$$

をみたすもので、 $\dot{B}$ はその微分である。久保ノイズ I は

$$(2.10) \quad I(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{h}{[R]} \hat{\varphi} \right) |t| dB(t) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

で定義される超過程である。

定理 2.2 超過程として、 X は次の確率微分方程式をみたす：

$$(2.11) \quad \dot{X} = -\beta_1 X - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \dot{r}_{1,\varepsilon} * X + \alpha_1 \dot{B}$$

$$(2.12) \quad \dot{X} = -\beta_2 X - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \dot{r}_{2,\varepsilon} * X + \alpha_2 I$$

ここで

$$(2.13) \quad r_{j,\varepsilon}(t) = \chi_{(0,\infty)}(t) \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t\lambda} \rho_j(d\lambda) \quad (1 \leq j \leq 2, \varepsilon > 0).$$

定義 2.2 方程式 (2.11) と (2.12) を夫々、第 1 KMO ランジュヴァン方程式、第 2 KMO ランジュヴァン方程式 という。

例 2.1 正数 α, β に対して、共分散函数 $R_{\alpha,\beta}$ が

$$(2.14) \quad R_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\alpha^2}{2\beta} e^{-\beta|t|}$$

で与えられる $X_{\alpha,\beta}$ は マルコフ性 をもち、Orstein-Uhlenbeck のブラウン運動 とよばれ、第 1 (及び第 2) KMO ランジュヴァン方程式は次で与えられる：

$$(2.15) \quad \dot{X}_{\alpha,\beta} = -\beta X_{\alpha,\beta} + \alpha \dot{B}$$

$$(2.16) \quad \dot{X}_{\alpha,\beta} = -\beta X_{\alpha,\beta} + \frac{\alpha^2}{2\sqrt{2\pi}\beta} I$$

例 2.2 16 年前、Alda-Wainwright は、コンピューターシミュレーションによって、剛体球の速度自己共分散函数の長時間における挙動は (2.14) と違って、指數的減衰をせず、 $t^{-\frac{3}{2}}$ というゆっくりした減衰をする現象を発見し、その後、多くの研究が実験と理論（久保理論）両面において行なわれ、この Alda-Wainwright 効果をもつブラウン運動 Stokes と Boussinesq によって、19c 末に扱われていた方程式に揺動力を加えることによって記述されることが分った ([1], [2], [5], [6], [25])：

$$(2.17) \quad m^* X(t) = -6\pi r \eta X(t) - 6\pi r^2 (\rho \eta \pi^{-1})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \dot{X}(s) ds + W(t)$$

ここで、時刻 t での揺動力 $W(t)$ をうけ、粘性 η 、密度 ρ の液体中を、時刻 t での速度が $X(t)$ で動く半径 r 、質量 m の球の運動を考えていて、 $m^* = m + \frac{2}{3} \pi r^2 \rho$ で与えられる有効質量である。 $W = (W(t): t \in \mathbf{R})$ が久保ノイズ、白色ノイズどちらの場合も、(2.17) の解 X の共分散関数 R は (2.1) の形をし、Alda-Wainwright 効果を示す ([14])。

注意 2.2 (2.17) における遅れの項は、

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = c \cdot \int_0^\infty e^{-t\lambda} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} d\lambda \quad (c = (\int_0^\infty e^{-s} \frac{1}{\sqrt{s}} ds)^{-1})$$

とかけるので、(2.17) は (2.11) or (2.12) の特別な場合である。

注意 2.3 KMO-ランジュヴァン方程式 (2.11) と (2.12) において、共分散関数 R と遅れ関数 $r_j = r_j(t) = \chi_{(0,\infty)} \int_0^\infty e^{-t\lambda} \rho_j(d\lambda)$ の long time の挙動の関係は [18] で論じられている。

次に、 X の拡散定数 D を

$$(2.18) \quad D = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E([\int_0^t X(s) ds]^2)}{2t}$$

で定めると、 D は次の様に表現される。

$$(2.19) \quad D = \int_0^\infty R(t) dt$$

この量は、(2.3) により有限な値をとる。

定理 2.3 第 1 KMO-ランジュヴァン方程式 (2.11) において

$$(i) \quad \frac{\alpha_1^2}{2} = R(0) C_{\beta_1, r_1}$$

ここで

$$(2.20) \quad C_{\beta_1, r_1} = \pi \{ \int_{\mathbf{R}} |\beta_1 - i\xi (1 + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^\infty e^{i\xi \epsilon} r_{1,\epsilon}(t) dt)|^{-2} d\xi \}^{-1}$$

$$(ii) \quad D = \frac{R(0)}{\beta_1} \frac{C_{\beta_1, r_1}}{\beta_1}$$

$$(iii) \quad D = \frac{\alpha_1^2}{2\beta_1^2}$$

$$(IV) \quad C_{\beta_1, \alpha_1} - 1 \left(= \int_0^\infty \frac{R(t)}{R(0)} r_{1,0}(t) dt \right) \geq 0$$

定理 2.4 第2 KMO-ランジュヴァン方程式 (2.12) において,

$$(i) \quad \alpha_2 \mathbf{I} \text{ のスペクトル測度 } = \frac{R(0)}{\pi} \operatorname{Re} (\beta_2 - i\xi \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty e^{i\xi t} r_{2,\varepsilon}(t) dt) d\xi$$

$$(ii) \quad D = \frac{R(0)}{\beta_2}$$

定理 2.4 の (i) と (ii) は夫々、久保の第2 揺動散逸定理、Einstein の関係式である。定理 2.3 の (i) と (ii) は夫々、一般化された第2 揺動散逸定理、一般化された Einstein 関係式とよばれている。

注意 2.5 例 2.1 の O. U. の B. M. のときは,

$$(2.21) \quad D = \frac{\alpha^2}{2\beta^2}$$

が成り立っている。この意味では、白色ノイズに基づく定理 2.3 の関係式 (iii) はマルコフ系からはずれていない。久保ノイズに基づくときは、(2.21) の様な関係式は成り立たない。

§ 3. 離散 KMO-ランジュヴァン方程式論 ([19] ~ [21])

連続的な現象を実験・観測するとし、離散時間でプロットする場合、もとの連続系をどの位のこの離散系が近似しているかが大事と思われるが、そのためにも離散系の理論が必要となる。

例 3.1 $\mathbf{X} = (X(t) : t \in \mathbf{R})$ を § 2 で扱ったものとするとき各 $\varepsilon > 0$ に対して $\mathbf{X}_\varepsilon \equiv (X(\varepsilon n) : n \in \mathbf{Z})$ の共分散函数 R_ε は

$$(3.1) \quad R_\varepsilon(n) = \int_0^1 t^{|n|} \sigma_\varepsilon(dt)$$

となる。

そこでもっと一般に、 $\mathbf{X} = (X(n) : n \in \mathbf{Z})$ を実弱定常過程で、平均は 0、共分散函数 R は次の表現をもつとする：

$$(3.2) \quad R(n) = \int_{[-1,1]} t^{|n|} \sigma(dt)$$

ここで、 σ は $[-1, 1]$ 上の Borel 測度で

$$(3.3) \quad \sigma(\{-1, 1\}) = 0, \quad 0 < \sigma([-1, 1]) < \infty$$

$$(3.4) \quad \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \sigma(dt) < \infty$$

注意 3.1 (3.1) の σ_ε は (3.3) と (3.4) を満足する。

$\Delta = \Delta(\theta)$ を R のスペクトル密度とする：

$$(3.5) \quad R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \Delta(\theta) d\theta$$

このとき

$$(3.6) \quad \Delta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{|1-te^{i\theta}|^2} \sigma(dt)$$

さらに, h と $[R]$ を夫々 X の outer 函数, mobility 函数とする：

$$(3.7) \quad h(z) = \exp \left(\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log \Delta(\theta) d\theta \right) \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1)$$

$$(3.8) \quad [R](z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} R(n) z^n \quad (z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1)$$

定理 3.1 次の三つ組 $(\alpha_j, \beta_j, \rho_j)$ ($1 \leq j \leq 2$) が唯ひとつ存在する：

$$(i) \quad \alpha_j > 0, \quad \beta_j > 0$$

$$(ii) \quad \rho_j \text{ は } [-1, 1] \text{ 上の Borel 測度で, } \rho_j(\{-1\}) = 0, \quad 0 \leq \rho_j([-1, 1]) < \infty$$

$$(iii) \quad \begin{cases} h(z) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\beta_1(1+z) + 1-z + (1-z^2) \int_{-1}^1 \frac{1}{1-tz} \rho_1(dt)} & (|z| < 1) \\ [R](z) = \frac{\alpha_2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\beta_2(1+z) + 1-z + (1-z^2) \int_{-1}^1 \frac{1}{1-tz} \rho_2(dt)} & (|z| < 1) \end{cases}$$

定義 3.1 三つ組 $(\alpha_1, \beta_1, \rho_1)$ と $(\alpha_2, \beta_2, \rho_2)$ を夫々, R に付随する 第 1 KMO-ランジュヴァンデータ, 第 2 KMO-ランジュヴァンデータ という。

$\xi = (\xi(n) : n \in \mathbb{Z})$ を白色ノイズで

$$(3.9) \quad X(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^n \hat{h}(n-m) \xi(m)$$

をみたすものとして, 久保 noise $I = (I(n) : n \in \mathbb{Z})$ は

$$(3.10) \quad I(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{h}{[R]} \right)^{\wedge}(n-m) \xi(m)$$

で定まる弱定常過程である。

注意 3.2 (2.10) の連続系の久保 noise I は超過程として,

$$(3.11) \quad X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t R(t-s) I(s) ds$$

一方, (3.10) の離散系久保ノイズは,

$$(3.12) \quad X(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^n R(n-m) I(m)$$

として表現される。

(ii) 従って, 白色ノイズと久保ノイズは, 連続系・離散系を問わず, $\hat{h}$ と $\chi_{[0,\infty)}$ R を夫々応答関数とみたときの入力にあたる出力は共通の X である。

定理 3.2 X は次の確率差分方程式をみたす:

$$(3.13) \quad X(n) - X(n-1) = -\beta_1 (X(n) + X(n-1)) - (r_1 * X)(n) + \alpha_1 \xi(n)$$

$$(3.14) \quad X(n) - X(n-1) = -\beta_2 (X(n) + X(n-1)) - (r_2 * X)(n) + \alpha_2 I(n)$$

ここで

$$(3.15) \quad r_j(n) = \frac{1}{2\pi} ((1 - e^{2i\cdot}) \int_{-1}^1 \frac{1}{1 - te^{i\cdot}} \rho_j(dt))^{\wedge}(n) \quad (1 \leq j \leq 2)$$

注意 3.3

$$(3.16) \quad r_j(n) = \begin{cases} 0 & (n = -1, -2, \dots) \\ \int_{-1}^1 t^n \rho_j(dt) & (n = 0, 1) \\ \int_{-1}^1 t^{n-2} (t^2 - 1) \rho_j(dt) & (n = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

定義 3.2 方程式 (3.13) と (3.14) を夫々, X に付随する 第 1 KMO-ランジュヴァン方程式, 第 2 KMO-ランジュヴァン方程式 という。

例 3.2 例 2.1 を離散化して, 各 $p \in (-1, 1)$ に対して, X_p でその共分散函数 R_p が

$$(3.17) \quad R_p(n) = p^{|n|} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で与えられるものとする。 $h_p, [R_p]$ は

$$(3.18) \quad \begin{cases} h_p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1-p^2}}{1-pz} & (z \in \mathbf{C}, |z| < 1) \\ [R_p](z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-pz} & (z \in \mathbf{C}, |z| < 1) \end{cases}$$

となり, 定理 3.2 の (3.13) と (3.14) は夫々

$$(3.19) \quad \begin{cases} X_p(n) - X_p(n-1) = -\frac{1-p}{1+p} (X_p(n) + X_p(n-1)) + 2\sqrt{\frac{1-p}{1+p}} \xi(n) \\ X_p(n) - X_p(n-1) = -\frac{1-p}{1+p} (X_p(n) + X_p(n-1)) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+p} I(n) \end{cases}$$

となる。 X_p はマルコフ性をもつ。

離散系に対する揺動散逸定理を求めるために, (2.18) にならって, X の拡散定数 D を

$$(3.20) \quad D = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} E([\sum_{n=0}^N X(n)]^2)$$

で定める。連続系のときの表現 (2.19) と異なり, この D は次の表現をもつ:

$$(3.21) \quad D = \sum_{n=0}^{\infty} R(n) - \frac{R(0)}{2}$$

定理 3.3 第 1 KMO-ランジュヴァン方程式 (3.13) において

$$(i) \quad \frac{\alpha_1^2}{2} = R(0) C_{\beta_1, r_1},$$

ここで

$$(3.22) \quad C_{\beta_1, r_1} = \pi \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\beta_1(1 + e^{i\theta}) + 1 - e^{i\theta} + 2\pi \tilde{r}_1(\theta)|^{-2} d\theta \right)^{-1}$$

$$(ii) \quad D = \frac{R(0)}{2\beta_1} \frac{C_{\beta_1, r_1}}{2\beta_1}$$

$$(iii) \quad D = \frac{\alpha_1^2}{2(2\beta_1)^2}$$

$$(iv) \quad \frac{C_{\beta_1, r_1}}{2\beta_1} - 1 \left(= \frac{1}{R(0)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\lambda+t}{1-\lambda t} \sigma_1(dt) \rho_1(dt) \right) \geq 0$$

定理 3.4 第 2 KMO-ランジュヴァン方程式 (3.14) においては,

(i) $\alpha_2 I$ のスペクトル測度

$$= \frac{R(0)}{2\pi} \{ 2(1 + \beta_2 + r_2(0)) \operatorname{Re}(\beta_2(1 + e^{i\theta}) + 1 - e^{i\theta} + 2\pi\tilde{r}_2(\theta) - |\beta_2(1 + e^{i\theta}) + 1 - e^{i\theta} + 2\pi\tilde{r}_2(\theta)|^2) \} d\theta$$

$$(ii) \quad D = \frac{R(0)}{2\beta_2} (1 + r_2(0))$$

例 3.3 例 3.2 におけるマルコフ性をもつ X_p に対しては,

$$(3.23) \quad D_p = \frac{R_p(0)}{2\beta_p} \quad (\beta_p^{(1)} = \beta_p^{(2)} \equiv \beta_p)$$

これを考慮して,

定義 3.3 定理 3.3 (i), 3.4 (i) を一般化された第 2 揺動散逸定理, 定理 3.3 (ii), 3.4 (ii) を一般化された Einstein 関係式という。

注意 3.4 離散時間のときは, 久保ノイズに基づいても, マルコフ系に対する Einstein 関係式 (3.22) は成り立たず, それより少しずれた形 (定理 3.4 (ii)) が成立する。しかし連続系, 離散系をとわず, 白色ノイズに基づくときは, 定理 3.3 (iii) は, マルコフ系に対するものと一致する。何か物理的意味があるのだろうか。

この章の残りで, 例 3.1 について考察する。連続系 X に対する第 1 (第 2) KMO-ランジュバンデータを夫々 $(\alpha_1, \beta_1, \rho_1)$ ($(\alpha_2, \beta_2, \rho_1)$) として, 離散系 X_ε に対する第 1 (第 2) KMO-ランジュヴァンデータを夫々 $(\alpha_1^{(\varepsilon)}, \beta_1^{(\varepsilon)}, \rho_1^{(\varepsilon)})$ とする。 $\varepsilon \downarrow 0$ としたときの挙動として,

定理 3.5 各 $j \in \{1, 2\}$ に対して

$$(i) \quad \frac{\alpha_j^{(\varepsilon)}}{\sqrt{\varepsilon}} \longrightarrow \alpha_j \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0$$

$$(ii) \quad \frac{2\beta_j^{(\varepsilon)}}{\varepsilon} \longrightarrow \beta_j \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0$$

$$(iii) \quad \frac{2(\chi_\varepsilon^{-1} \varphi \rho_j^{(\varepsilon)})}{\varepsilon} \longrightarrow \rho \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0$$

$$(iv) \quad \frac{C_{\beta_1^{(\varepsilon)}, r_1^{(\varepsilon)}}}{2\beta_1^{(\varepsilon)}} \longrightarrow \frac{C_{\beta_1, r_1}}{2\beta_1} \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0$$

$$(v) \quad 1 + r_2^{(\varepsilon)}(0) \longrightarrow 1 \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0$$

ここで, $\varphi, \chi_\varepsilon$ は次で定義される写像

$$(3.24) \quad \begin{array}{ccccc} (-1, 1] & \xrightarrow{\varphi} & [0, \infty) & \xrightarrow{\chi_\varepsilon^{-1}} & [0, \infty) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ t & \longrightarrow & \frac{1-t}{1+t} & \longrightarrow & \frac{2}{\varepsilon} \frac{1-t}{1+t} \end{array}$$

で, $\chi_\varepsilon^{-1} \varphi \rho_j^{(\varepsilon)}$ は, 合成写像 $\chi_\varepsilon^{-1} \varphi$ による $\rho_j^{(\varepsilon)}$ の像測度である。

注意 3.5 一般化された Einstein 関係式に関して, 観測時間の幅を小さくする。即ち $\varepsilon \downarrow 0$ とするとき, 白色ノイズに基づく離散系のときの Einstein 関係式のずれの大きさは, 連続系のときの白色ノイズに対するものへ近づき, 久保ノイズに基づくときの離散系の Einstein 関係式のずれは, なくなることを定理 3.5 (IV) と (V) は教えてくれる。

§ 4. エントロピー ([21])

しかし, 正数 $\varepsilon > 0$ をとめておく限りは, 白色ノイズに対しては勿論のこと, 久保ノイズに対しても, Einstein 関係式にずれが生ずるので, 確率過程のランダム性・情報量の観点から, 単位時間当りのエントロピーレート, 大偏差原理 (large deviation principle) におけるエントロピーを, 第 1 KMO-ランジュヴァン方程式 (3.13) における揺動力 $\alpha_1 \xi$ と第 2 KMO-ランジュヴァン方程式 (3.14) における揺動力 $\alpha_2 I$ に対して計算し

$$W \equiv \mathbf{R}^{\mathbf{Z}} = \{w: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R} \text{ 函数} \}, \quad X(w) \equiv w(n)$$

として, W 上の Borel 構造 $\mathcal{B} \equiv \sigma(X(n); n \in \mathbf{Z})$ と W 上の定常確率測度の全体 $m_s(W)$ の部分集合 $m_s^G(W)$ を

$$(4.1) \quad m_s^G(W) = \{P \in m_s(W); \mathbf{X} = (X(n); n \in \mathbf{Z}) \text{ は確率空間 } (W, \mathcal{B}, P) \text{ 上で} \\ \text{正規定常過程で, スペクトル密度 } \Delta_P \text{ をもち, } \Delta_P \text{ は } [-\pi, \pi] \text{ で連続, } \Delta_P \\ (-\pi) = \Delta_P(\pi), \log \Delta_P \in L^1(-\pi, \pi)\}$$

で定める。

単位時間あたりのエントロピー: $P \in m_s^G(W)$ に対して,

$$(4.2) \quad H(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(X(1), \dots, X(n))}{n}$$

ここで

$$(4.3) \quad \begin{cases} H(X(1), \dots, X(n)) = - \int_{\mathbf{R}^n} (\log P_n(x)) P_n(x) dx \\ P_n(x) = P((X(1), \dots, X(n)) \in dx) / dx \end{cases}$$

$P \in m_s^G(W)$ に対して, Δ_P の outer 函数を h_P とするとき,

$$(4.4) \quad H(P) = \frac{1}{2} \log(4\pi^2 e) + \log h_P(0)$$

と表現されることは知られている。

大偏差原理におけるエントロピー: $\Pi_n: W \longrightarrow m_s(W)$ を

$$(4.5) \quad \Pi_n(w) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\theta_n^k w(n)}$$

但し, θ は W 上のシフト作用素, $w^{(n)} = (\dots \underbrace{w(1) \cdots w(n)}_{\text{---}} \dots)$ で定め, $P \in m_s(W)$ に対して, $m_s(W)$ 上の確率測度列 P_n を

$$(4.6) \quad P_n = \Pi_n(P)$$

で定義する。このとき, Donsker-Varadhan [4] によって, $\{P_n; n \in \mathbf{N}\}$ に対して large deviation principle が成り立ち, そのときのレート函数 $H_P(\cdot)$ は次の表現をもつことが示された:
 $Q \in m_s(W)$ に対して

$$(4.7) \quad \begin{aligned} H_P(Q) = & E^Q \left(\int_{\mathbf{R}} Q(y|\cdot) \log Q(y|\cdot) dy \right) + \log 2\pi \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dA_Q(\theta)}{A_P(\theta)} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log A_P(\theta) d\theta \end{aligned}$$

ここで

$$(4.8) \quad \begin{cases} Q(A|w) \equiv Q(X(0) \in A | X(-1), X(-2), \dots)(w) & (A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}), w \in W) \\ Q(y|w) \equiv Q(dy|w)/dy \\ E^Q(X(n)X(0)) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} dA_Q(\theta) \end{cases}$$

————— $\langle \circ \rangle$ —————

$P \in m_s^G(W)$ に対して, $\mathbf{X} = (X(n); n \in \mathbf{Z})$ は確率空間 $(W, \mathcal{B}, P)$ 上で条件 (3.2) ~ (3.4) を

満たすとし, $(\alpha_1, \beta_1, \rho_1), (\alpha_2, \beta_2, \rho_2)$ を夫々第1 KMO-ランジュヴァンデータ, 第2 KMO-ランジュヴァンデータとして, 白色ノイズ $\alpha_1 \xi$ と有色ノイズ $\alpha_2 I$ の分布を夫々 $P_{\alpha_1 \xi}$ と $P_{\alpha_2 I}$ とする。 $P_{\alpha_1 \xi}$ と $P_{\alpha_2 I}$ はともに $m_s^G(W)$ の元である。

定理 4.1

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \begin{cases} H(P_{\alpha_1 \xi}) = \log(\sqrt{2\pi} e \alpha_1) \\ H(P_{\alpha_2 I}) = \log(\sqrt{2\pi} e \alpha_1 \cdot \frac{1 + \beta_2 + r_2(0)}{1 + \beta_1 + r_1(0)}) \end{cases} \\
 \text{(ii)} \quad & \begin{cases} H(P_{\alpha_1 \xi}) - H(P) = \log(1 + \beta_1 + r_1(0)) > 0 \\ H(P_{\alpha_2 I}) - H(P) = \log(1 + \beta_2 + r_2(0)) > 0 \end{cases} \\
 \text{(iii)} \quad & \begin{cases} H_P(P_{\alpha_1 \xi}) = -\log(1 + \beta_1 + r_1(0)) + \frac{1}{2} + \beta_1^2 \\ \quad + \int_{-1}^1 \{\beta_1(1+t) + 1-t\} \rho_1(dt) + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{2-t^2-s^2}{2(1-ts)} \rho_1(dt) \rho_1(ds) \\ H_P(P_{\alpha_2 I}) = -\log(1 + \beta_2 + r_2(0)) + \frac{1}{2} + \beta_2^2 \\ \quad + \int_{-1}^1 \{\beta_2(1+t) + 1-t\} \rho_2(dt) + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{2-t^2-s^2}{2(1-ts)} \rho_2(dt) \rho_2(ds) \end{cases} \\
 \text{(iv)} \quad & \begin{cases} H_{P_{\alpha_1 \xi}}(P) = \log(1 + \beta_1 + r_1(0)) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4C_{\beta_1, r_1}} \\ H_{P_{\alpha_2 I}}(P) = \log(1 + \beta_2 + r_2(0)) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4C_{\beta_2, r_2}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

定理 4.2

- (i) $\rho_2 = 0$ のとき; $H(P_{\alpha_1 \xi}) = H(P_{\alpha_2 I})$
 (ii) $\rho_2 \neq 0$ のとき; $\beta_2 > 1$ ならば

$$\begin{cases} H(P_{\alpha_2 I}) > H(P_{\alpha_1 \xi}) \\ H_P(P_{\alpha_2 I}) > H_P(P_{\alpha_1 \xi}) \\ H_{P_{\alpha_2 I}}(P) > H_{P_{\alpha_1 \xi}}(P) \end{cases}$$

注意 4.1

- (i) $\rho_2 = 0 \iff \rho_1 = 0$
 (ii) $\beta_2 > 1 \iff \beta_1 > 1 \iff \beta_2 > \beta_1$

注意 4.2 白色ノイズに基づく Einstein 関係式のずれと久保ノイズに基づく Einstein 関係式のずれとの比を r とする：

$$(4.9) \quad r = \frac{C_{\beta_1 r_1} \cdot (2\beta_1)^{-1}}{1 + r_2(0)}.$$

$\rho_2 \neq 0$ のとき、次のことを注意する：

$$(4.10) \quad r \left\{ \begin{array}{l} < \\ = \\ > \end{array} \right\} 1 \iff \beta_2 \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 1$$

従って、定理 4.2 (ii) の意味することは、 $r < 1$ のとき、即ち、白色ノイズに基づく Einstein 関係式のずれの方が久保ノイズに基づく Einstein 関係式のずれより小さいときは、白色ノイズの方がもとの過程 X に情報理論的に近いということである。そして、 $r < 1$ という条件は、KMO-ランジュヴァン方程式の drift の係数 β_1 と β_2 のいずれかが 1 より大きいということ、あるいは、 $\beta_2 > \beta_1$ ということでチェックされる。

注意 4.3

これ迄紹介してきたことは、無限の遅れの項をもつ確率微分（差分）方程式に基づいたことだが、離散系のときに、観測・実験にかかる共分散函数の定義域が有限ということを考慮にいられた KM₂O-ランジュヴァン方程式論 が構築されている。これは、有限の遅れの項をもち、揺動力は、有色ノイズだが独立性という性質をもつ。非線型の項も導入されるので、ランダム現象の定常性、因果性と異常性に対する検定が提案されている（[22]～[24]）。別の機会に話せたらと思います。

文 献

- [1] B. J. Alder & T. E. Wainwright, Phys. Rev. Lett. **18** (1967) 988-990
- [2] B. J. Alder & T. E. Wainwright, Phys. Rev. **A1** (1970) 18-21
- [3] J. Boussines, Comptes Rendus **100** (1885) 935-937
- [4] M. D. Donsker & S. R. S. Varadhan, Commun. Math. Phys. **97** (1985) 187-210
- [5] E. H. Hauge & A. Martin-hof, J. Stat. Phys. **7** (1973) 259-281
- [6] R. Kubo, RIMS. Kyoto, October, 1979, p.p.50-93 (in Japanese)
- [7] Okabe, Y., J. Fac. Sci. Univ Tokyo, Sect. IA, **26** (1979) 115-165
- [8] Okabe, Y., J. Fac. Sci. Univ Tokyo, Sect. IA, **28** (1981) 169-213
- [9] Okabe, Y., J. Fac. Sci. Univ Tokyo, Sect IA, **28** (1982) 793-804
- [10] Okabe, Y., Sugaku **33** (1981) 306-324 (in Japanese)

- [11] Okabe, Y., Lecture Notes in Control and Information Sciences, **49** (1983) 215-226
- [12] Okabe, Y., Commun. Math. Phys. **98** (1985) 449-468
- [13] Okabe, Y., J. Fac. Sci. Univ Tokyo Sect IA, **33** (1986) 1-56
- [14] Okabe, Y., J. Stat. Phys. **45** (1986) 953-981
- [15] Okabe, Y., Hokkaido Math. J. **15** (1986) 163-216
- [16] Okabe, Y., Hokkaido Math. J. **15** (1986) 317-355
- [17] Okabe, Y., Prob. Theory and Math. Stat. **Vol-2**, 431-436, Prohorov et al. (eds), 1986 VNU Science Press
- [18] Okabe, Y., Lecture Notes in Math., Springer **1299** (1986) 391-397
- [19] Okabe, Y., Hokkaido Math. J. **16** (1987) 315-341
- [20] Okabe, Y., Hokkaido Math. J. **17** (1987) 1-41
- [21] Okabe, Y., to appear in Hokkaido Math. J.
- [22] Okabe, Y., to appear in Prospect of Algebraic Analysis, Academic Press, 1988
- [23] Okabe, Y., in preparation
- [24] Okabe, Y & Y. Nakano, in preparation
- [25] K. Oobayashi, T. Kohno & H. Utiyama. Phys. Rev. **A27** (1983) 2632-2641
- [26] G. C. Stokes, Mathematical and Physical Papers (1966). **Vol. 3**, p.p. 1-141 [reprinted from Trans. Camb. Phil. Soc. **9** (1850)]

相転移の統一理論

—超有効場理論とコヒーレント異常法—

東大・理 鈴木 増雄

1. はじめに

この報告では、超有効場理論とコヒーレント異常法¹⁻²⁴⁾の要点を、式をなるべく使わずに概念的な面に重点を置いて解説する。

相転移の理論的研究は古く前世紀から始まる。その中で最も有名なものは、ファンデルワール