

Elliptic Fixed Points の安定性について.

廣田大. 工. 石井 一平

1. D を $\mathbb{R}^2$ の原点を含む領域とし, T を D から $\mathbb{R}^2$ の中への diffeomorphism で原点を fix するものとする。即ち,

$(x_1, y_1) = T(x, y)$ は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O_2 \quad ; \quad A \in GL(2, \mathbb{R})$$

O_2 : 2次以上の項.

と書き表すものとする。 λ_1, λ_2 を A の固有値とする。このとき, $|\lambda_j| = 1$ ($j=1, 2$) ならば, 原点は T の elliptic fixed point であるという。ここでは, elliptic fixed point における安定性について考える。ここでは, いくつかの定義を述べる。

定義

(I) T が原点 O において stable

$\iff$ 任意の O の近傍 U に対し, $T(V) \subset V$, $V \subset U$ となる O の近傍 V が存在する。

(II) T が 0 において unstable

$\Leftrightarrow$ ある 0 の近傍 U が存在して、任意の $a \in U$ ($a \neq 0$) に対し、 $T^n(a) \notin U$ となる整数 n がとれる。

(III) T が 0 において mixed

$\Leftrightarrow T$ が 0 において stable でも unstable でもない。

(IV) T が 0 において 正(負)に asymptotic

$\Leftrightarrow$ 任意の 0 の近傍 U に対し、 $T(V) \subset U$, $\bigcap_{n \geq 0} \overline{T^n(V)} = \{0\}$
 $(\bigcap_{n \leq 0} \overline{T^n(V)} = \{0\}, T^{-1}(V) \subset U)$ となる 0 の近傍 V が存在する。

Remark. 定義 (I), (II), (III) は [2] に従ったものであるが、

"unstable" が "stable" の否定ではないことに注意。又、

定義 (IV) において、正又は負に asymptotic であることと、単に asymptotic であるという。

以上のような定義を与えると、次の定理が得られる。

定理: $|\lambda_j| = 1$ ($j=1, 2$) とする。このとき、 $\lambda_j^n \neq 1$

for $\forall n \in \mathbb{Z}$ ($j=1, 2$) ならば、次のいずれかが起こる。

1) T は 0 において unstable ではない。

2) T は 0 において asymptotic である。

この定理の証明は省略するが、それは Birkhoff が [1] において twist map に関して行なっている証明と類似の方法によってなされる。尚、twist map については、よく知られているように、後に Moser が stable であることを証明している。[2].

この定理によって、例えば、 T が保測的である場合には、2) は起り得ないから、 A の固有値が 1 の中根でないということだけから、 T は 0 において unstable ではないことがわかる。次の節でこの定理の顕著な応用例であることの holomorphic iteration を調べてみよう。

2. holomorphic mapping

$$z_1 = f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots; \quad |\lambda| = 1$$

を考える。まず一々定義を与える。

定義: f に対する Schröder series $\varphi(z) = z + b_2 z^2 + \dots$

とは、 $f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z)$ の formal solution のことである。

λ が 1 の中根でなければ、 f に対する Schröder series は必ず存在する。

holomorphic iteration については次のことがわかっている。

(A) $\lambda^n = 1$ かつ f は 0 において stable

$$\Leftrightarrow f^n(z) \equiv z.$$

(B) $\lambda^n = 1$ かつ $f^n(z) \neq z$

$\Rightarrow f$ は 0 において mixed.

(C) $|\lambda| = 1$, $\lambda^n \neq 1$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$ のとき.

f が 0 において stable

$\Leftrightarrow f$ に対する Schröder series が収束.

(D) $|\lambda| = 1$ かつ ある $C, \nu (> 0)$ に対し.

$|\lambda^n - 1| > C n^{-\nu}$ が任意の自然数 n について成り立つ.

$\Rightarrow f$ は 0 において stable.

(E) $|\lambda| = 1$, $\lambda^n \neq 1$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$ で. Schröder series が発散するような f は存在する.

以上によって、 λ が 1 の n 根でなく、 f に対する Schröder series が発散する場合を除いては、 f が stable, unstable, mixed のうちのどの場合にあるかは、完全に決定されている。そして、Schröder series が発散する場合でも、stable ではないということはおろかる。従ってこの場合に、unstable mixed のいずれであるかを決定することができ、holomorphic iteration の ~~stable, unstable, mixed~~ stable, unstable, mixed の分類は完了することになる。前節の定理を応用すれば。

次の結果を得る.

命題: $M=1$ かつ λ は 1 の中根ではないとする. このとき, f に対する Schröder series が発散.

$\Rightarrow f$ は 0 において mixed.

$\therefore$) 前節の定理 1, (C) により, f が 0 において, asymptotic ではないことを示せば十分である.

そこで f が 0 で正に asymptotic であるとして, 矛盾を導く. 正に asymptotic とすると, 定義により, 0 の近傍 U と 自然数 n が存在して, $\overline{f^n(U)} \subset U$ となる. 簡単のため $n=1$ とする. いま,

$$f_r(z) = (1+r)\lambda z + a_2 z^2 + \dots \quad (r \in \mathbb{R})$$

と f_r を定義すれば, $|r|$ が十分小ならば $\overline{f_r(U)} \subset U$ が成り立つ. 一方 $r < 0$ のとき, f_r は 0 において負に asymptotic である. 従って, $f_r(V) \supset V$, $V \subset U$ となる 0 の近傍 V がとれる. すると, $\overline{f_r(U)} \subset U$ 及び $f_r(V) \supset V$ より, $V \subset D \subset U$, $f_r(D) = D$ となる. D の存在がわかる. D は simply connected, open として, 一般性を失わないことはすぐわかる. そこで D を,

$\{|z| < 1\}$ に写し、且、 $0 \in \text{fix}$ する holomorphic map
 φ とすると、 $\varphi \circ f_r \circ \varphi^{-1}$ は $\{|z| < 1\}$ に 0 自身に
 写す holomorphic map. 故、 τ

$$\varphi \circ f_r \circ \varphi^{-1}(z) = \mu z \quad (|\mu| = 1)$$

でなければならぬ。 $k=3$ か。

$$\varphi \circ f_r \circ \varphi^{-1}(z) = (1+r)\lambda z + \dots$$

であるから、これは矛盾である。

f が 0 自身に asymptotic とした場合にも、同じ方法で矛盾に
 到達する。

References

- [1]. G.D. Birkhoff, Surface transformations and their
 dynamical applications, Acta Math. vol 43 1-119 (1920)
- [2]. C.L. Siegel, J.K. Moser, Lectures on celestial
 mechanics, Springer (1971).