

$S^4 \times S^2$ 上の free involution

に つ いて

中央大 理工 松 江 友 文

$S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$ とする。

$\alpha : S^2 \rightarrow S^2$ を $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$

により定義する。

$T : \Sigma^4 \rightarrow \Sigma^4$ を homotopy 4-sphere 上の smooth free involution とし (T, Σ^4) と書くことにする。

$A : S^4 \rightarrow S^4$ を antipodal map とする。

$T \times \alpha : \Sigma^4 \times S^2 \rightarrow \Sigma^4 \times S^2$ を $(T \times \alpha)(x, y) = (Tx, \alpha y)$

により定義する。

$A \times \alpha : S^4 \times S^2 \rightarrow S^4 \times S^2$ も同様に

$(A \times \alpha)(x, y) = (Ax, \alpha y)$ により定義する。

すると次の定理が云える。

定理. 任意の (T, Σ^4) に対し,

$(\Sigma^4 \times S^2) / (T \times \alpha)$ は $(S^4 \times S^2) / (A \times \alpha)$
に diffeomorphic である。

(証明)

 $\Sigma^4 \rightarrow \Sigma^4/T$ の mapping cylinder を M^5 とする. $\partial M^5 = \Sigma^4$, $\exists W^5$: contractible manifold.よって $\partial W^5 = \Sigma^4$ $M^5 \cup_{\Sigma^4} W^5 = N^5$ とすると N^5 は $\mathbb{R}P^5$ に homotopy equivalent. $\mathbb{R}P^5$ と homotopy type の等しい smooth 5-manif.

は、次の Brieskorn involution の orbit space に diffeo.

$$V_{2k+1} = \{ (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4 \mid z_0^{2k+1} + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \}$$

$$S^7 = \{ (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4 \mid z_0 \bar{z}_0 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3 = 1 \}$$

 $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ とすると, $V_{2k+1} \cap S^7$ は S^5 に diffeo. それを S_{2k+1}^5 とかき,free involution $T_{2k+1} : S_{2k+1}^5 \rightarrow S_{2k+1}^5$ を

$$T_{2k+1}(z_0, z_1, z_2, z_3) = (z_0, -z_1, -z_2, -z_3) \text{ により}$$

定義する。すると homotopy $\mathbb{R}P^5$ は S_{2k+1}^5 / T_{2k+1}
 ($k=0, 1, 2, 3$)
のどれかに diffeo であることがわかっている。上で作った N^5 を S^5 の free involution の orbit space

と考えると、その involution は明らかに desuspend

することがわかるから S_1^5/T_1 か S_7^5/T_7 のどちらかに

difeo.

これらのことから次の2つの場合について定理を証明すべ

ばよい。

(i) $N^5 = S_1^5 / T_1$, この場合は Σ^4 / T と S^4 / A が

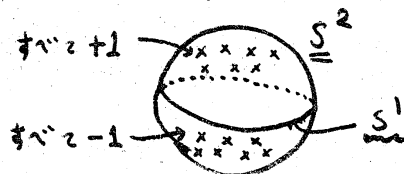
k -cobordant であることより明らかに定理は云える。

(ii) $N^5 = S_\eta^5 / T_\eta$, この場合は次のようになる。

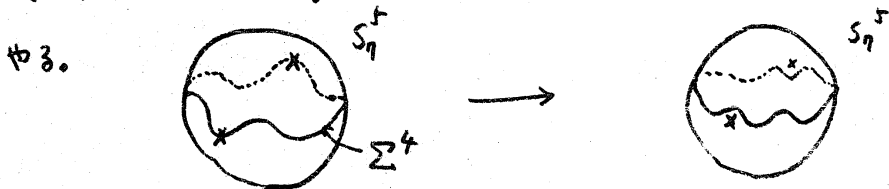
$$\begin{aligned} S^\eta \supset \underline{S^2} &= S^\eta \cap \{I_m \mid z_1 = z_2 = z_3 = 0\} \\ &\supset \underline{S^1} = S^\eta \cap \{z_1 = z_2 = z_3 = 0\} \end{aligned}$$

$(S^\eta - S_\eta^5) \rightarrow S^1$ なる Milnor fibering の 1 つの fiber と $\underline{S^1}$ との交わりを調べることにより $\underline{S^1}$ と S_η^5 は S^η の中で linking number η で link していることがわかる。

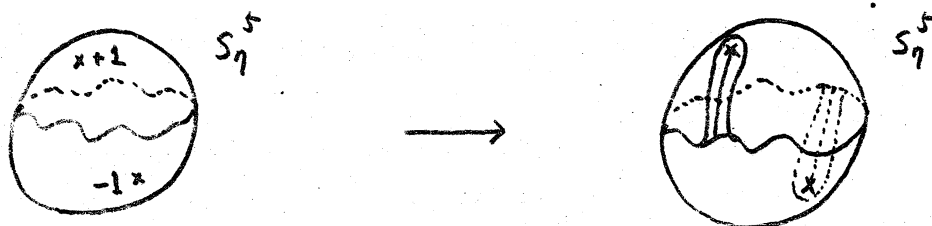
一方 $\underline{S^2} \cap S_\eta^5 = \{1410 \text{ の点} \}$ であり、これらの点は T_η -invariant である。 $\underline{S^2}$ と S_η^5 に適当に向きをつけてその交わりを調べてみると、 $\underline{S^1}$ と S_η^5 の link の状態より次の図のようになる。



又, $N^5 = S_\eta^5 / T_\eta$ としていることより (T_η, S_η^5) の中に invariant (T, Σ^4) があると考えよう。まず最初に, (T, Σ^4) を equivariant に $S^2 \cap S_\eta^5$ がさばずしめる。



次に下図の操作をする。



この操作により S^7 の中に (T, Σ^4) と equivariant diffeo. で, T^7 -invariant な $(T', \Sigma^{4'})$ で且つ, $\underline{S}^2$ と $\Sigma^{4'}$ とは S^7 の中で linking number 1 で link しているという二つをみたす $(T', \Sigma^{4'})$ が得られる。

よって, S^7 から, $\underline{S}^2$ と $\Sigma^{4'}$ の equivariant tubular nbhd. を取り出したもの X^7 は, $S^4 \times \underline{S}^2$ と $\Sigma^{4'} \times S^2$ の間の T^7 -invariant な k -cobordism を与えている。

一方 $T^7|S^4 \times \underline{S}^2$ は $A \times \alpha : S^4 \times \underline{S}^2 \rightarrow S^4 \times \underline{S}^2$ であり,

$T^7|\Sigma^{4'} \times S^2$ は $T' \times \alpha : \Sigma^{4'} \times S^2 \rightarrow \Sigma^{4'} \times S^2$ と書ける。

いることは明らかである。故に $X^7/(T^7|X^7)$ は,

$(S^4 \times \underline{S}^2)/(A \times \alpha)$ と $(\Sigma^{4'} \times S^2)/(T' \times \alpha)$ との間の k -cobordism.

(T, Σ^4) と $(T', \Sigma^{4'})$ が equivariant diffeo. であることより $(\Sigma^4 \times S^2)/(T \times \alpha)$ と $(S^4 \times \underline{S}^2)/(A \times \alpha)$ とは diffeomorphic. Q. E. D.

この定理は, homotopy $\mathbb{R}P^5$ は Brieskorn involution の orbit space として, すべて表わされるという結果を用

いて証明したのであるが、次の事が云えていれば、ただちに
 出る結果である。「homotopy RP^4 はすべて RP^4 に
 k -cobordant」。

ところが Cappell と Shaneson は、 RP^4 に、いくつかの $S^2 \times S^2$ を connected sum したものに關しては、
 homotopy type が等しいが k -cobordant ではないもの
 が存在することを証明した。

しかし著者は、 RP^4 に關する結果に關しては何の手がかり
 も得ていない。