

Vector bundles over quaternionic Kähler manifolds

大阪大学 理学部 D.2 新田貴士 (Takashi Nitta)

quaternionic Kähler manifold とはその holonomy 群が $Sp(n) \cdot Sp(1)$ の部分群に還元する Riemannian manifold を言う。この論説においては、quaternionic Kähler manifold 上の vector bundle にある種の connection を定義してその性質を調べるのが目的である。以下に従って述べる。

- §1. 定義
- §2. 問題とその背景
- §3. 結果
- §4. 注意

§ 1. 定義

$4n$ 次元の Riemannian manifold が quaternionic Kähler とはその holonomy 群が $Sp(n) \cdot Sp(1)$ の部分群に還元し、かつ $n=1$ の場合は Riemannian manifold として Einstein, self-dual の場合をいう。即ち M の tangent bundle TM の frame bundle が fibre $Sp(n) \cdot Sp(1)$ の部分群なる principal bundle P に還元する。

そこで $Sp(n) \cdot Sp(1)$ の説明を少ししておこう。 $\mathbb{H}$ を四元数体とする。 $\tilde{P}$ を $Sp(n) \times Sp(1)$ の $\mathbb{R}^{4n} (\simeq \mathbb{H}^n)$ への自然な表現とする。つまり $\tilde{P}$ は次で定義されている。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}: Sp(n) \times Sp(1) & \longrightarrow & SO(4n) \quad \text{on } \mathbb{R}^{4n} (\simeq \mathbb{H}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (h_1, h_2) & \longmapsto & \tilde{P}(h_1, h_2): \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n \\ & & \downarrow \\ & & h \longmapsto h_1 h h_2^{-1}. \end{array}$$

この時 $\tilde{P}(-id, -id) = \tilde{P}(id, id)$ だけれども

$$\text{Ker } \tilde{P} = \{ (id, id), (-id, -id) \} \simeq \mathbb{Z}_2$$

となり準同型定理より $\underset{N-2}{\text{Im } \tilde{P}} = Sp(n) \times Sp(1) / \mathbb{Z}_2$

である。 $\text{Im } \tilde{f}$ (= Image of $\tilde{f}$) を $\text{Sp}(n) \cdot \text{Sp}(1)$ と書いた。
 $\tilde{f}$ から決る $\text{Sp}(n) \cdot \text{Sp}(1)$ の $\mathbb{R}^{4n} (\simeq \mathbb{H}^n)$ への表現を f とする。
 f を調べよう。 そのためにまず f を複素化して調べる。 f
 の複素化 $f^{\mathbb{C}}$ は $\text{Sp}(n) \times \text{Sp}(1)$ の $(\mathbb{R}^{4n})^{\mathbb{C}} (\simeq (\mathbb{H}^n)^{\mathbb{C}})$ への表現
 $f^{\mathbb{C}}$ からきている。 $\text{Sp}(n) \times \text{Sp}(1)$ の表現が $\text{Sp}(n) \cdot \text{Sp}(1)$ の
 表現におちるかどうかは、 $\Sigma_2 (\simeq \{(\text{id}, \text{id}), (-\text{id}, -\text{id})\})$
 で不変かどうかだけが問題だから 以下では、めんどうなの
 で同じ記号 ($\sim$ をつけない) で書くことにする。 $f^{\mathbb{C}}$ は
 $\text{Sp}(n) \cdot \text{Sp}(1)$ の $(\mathbb{H}^n)^{\mathbb{C}}$ への自然な表現である。
 $(\mathbb{H}^n)^{\mathbb{C}} = (\mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H})^{\mathbb{C}} = \mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$ であることに注意する。
 そこで f_n (resp. f_1) を $\text{Sp}(n)$ (resp. $\text{Sp}(1)$) の
 $\mathbb{C}^{2n} (\simeq \mathbb{H}^n)$ (resp. $\mathbb{C}^2 (\simeq \mathbb{H})$) への自然な表現、即ち、

$$\begin{aligned} f_n: \text{Sp}(n) &\longrightarrow \text{SU}(2n) && \text{on } \mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{H}^n \\ (\text{resp. } f_1: \text{Sp}(1) &\longrightarrow \text{SU}(2) && \text{on } \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{H}) \end{aligned}$$

とすると、上のことから

$$f^{\mathbb{C}} = f_n \otimes f_1$$

となる。従って、

$$TM = P \times_{\substack{\rho \\ (\rho_n^{\otimes 2} \otimes \rho_1)_{\text{real}}}} (\mathbb{R}^{4n}) \quad , \quad TM^{\mathbb{C}} = P \times_{\substack{\rho^{\mathbb{C}} \\ \rho_n^{\otimes 2} \otimes \rho_1}} (\mathbb{C}^{4n}) \quad ,$$

$$T^*M = P \times_{\substack{\rho^* \\ (\rho_n^{*\otimes 2} \otimes \rho_1^*)_{\text{real}}}} (\mathbb{R}^{4n}) \quad , \quad T^*M^{\mathbb{C}} = P \times_{\substack{\rho^{*\mathbb{C}} \\ \rho_n^{*\otimes 2} \otimes \rho_1^*}} (\mathbb{C}^{4n}) \quad ,$$

ここで $(\quad)_{\text{real}}$ は表現の real form を表わした。

quaternionic Kähler manifold は twistor space と呼ばれる complex manifold を $S^2 (= \mathbb{P}^1\mathbb{C})$ -bundle として持つことが知られている。 ρ_1 を $Sp(1) (\simeq SU(2))$ の $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への自然な作用とします。すると、 $\rho_1'(-id) = \rho_1'(id)$ より、この作用は $Sp(n) \cdot Sp(1)$ の $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への作用に自然に拡張できる。つまり、 $Sp(n)$ の方は動かさずに $Sp(1)$ の方を ρ_1' で作用させる。その $Sp(n) \cdot Sp(1)$ の $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への作用を ρ_1'' と書いておきます。 quaternionic Kähler manifold M の twistor space Z とは、

$$Z = P \times_{\rho_1''} \mathbb{P}^1\mathbb{C} \quad \text{である。}$$

Salamon [S] によつて Z には様々の構造が入る事が知られている。例えば、 Z には自然に complex structure が入る。 fibre $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = S^2_{N-4}$ の anti-podal map が Z 上に

$\tau: Z \longrightarrow Z$ ($\tau^2 = \text{id}$) なる map を定める。
 更に M の Riemannian manifold としての scalar curvature
 が正の時に Z は自然に Kähler manifold になる。

§2. 問題とその背景

以下では、次の問題を考える。

“quaternionic Kähler manifold 上の vector bundle に
 canonical な connection を定義してその性質を調べる。”

問題の意味を説明するために 上の canonical とはどういう
 ことを例で説明する。

例1. N を complex manifold, F を N 上の C^∞ -
 Hermitian vector bundle とする。 ∇ を F 上の Hermitian
 connection とする時、 ∇ が $(1,0)$ -connection
 とは、その curvature R^∇ が $\text{End } F$ valued type- $(1,1)$
 form である時、即ち

$$R^\nabla \in \Gamma(N, \text{End } F \otimes \wedge^{1,1} T^*N)$$

をいう。その時、 $(1,0)$ -connection ∇ を用いて F 上に complex structure が入ることが知られている。
その意味で $(1,0)$ -connection は complex manifold 上の Hermitian vector bundle に canonical な connection である。

例2. 例1の場合に加えて、 N を Kähler manifold とする。即ち、Kähler form が存在し、Kähler form をかけるといふ

$$L: \wedge^p T^*N \longrightarrow \wedge^{p+2} T^*N$$

なる operator が存在する。通常のように L の adjoint を

$$\Lambda: \wedge^{p+2} T^*N \longrightarrow \wedge^p T^*N$$

と書く。その時 ∇ ($(1,0)$ -connection) が Einstein-Hermitian connection とは、ある定数 c が存在して

$$\sqrt{-1} (id \otimes \Lambda) R^\nabla = c id_F \in \text{End } F$$

の時をいう。Einstein-Hermitian connection は代数幾何の stable vector bundle と深い関係があることが知られている。そういう意味で Kähler manifold 上の Hermitian vector bundle には Einstein-Hermitian

connection が canonical な connection である。

例3. N' を oriented 4次元 Riemannian manifold とする。その時 $*$ (star operator) が存在し $\Lambda^2 T^*N'$ に $*^2 = \text{id}$ を満たして作用する。 $*$ の eigen value $+1$ なる eigen space を Λ_+ とし、eigen value -1 なる eigen space を Λ_- とすると、

$$\Lambda^2 T^*N' = \Lambda_+ + \Lambda_-$$

となる。 $\Gamma(N', \Lambda_+)$ の元を self-dual form, $\Gamma(N', \Lambda_-)$ の元を anti-self-dual form という。そこで F' を N' 上の metric を持つ vector bundle, ∇' を F' 上の metric connection とする時、 ∇' が self-dual (resp. anti-self-dual) とは、その curvature $R^{\nabla'}$ が $\text{End } F'$ -valued self-dual form (resp. anti-self-dual form) の時をいう。すると self-dual connection, anti-self-dual connection 共に Yang-Mills connection になる。そういう意味で self-dual connection, anti-self-dual connection は oriented 4次元 Riemannian manifold 上の vector bundle に canonical な connection である。

§ 3. 結果

§ 2 の例でもわかる様に、本質的なのは curvature の形である。そこで quaternionic Kähler manifold の 2 form の 分解から始める。

$$\Lambda^2 T^*M = P^* \Lambda^2 \mathcal{F}^* \Lambda^2 \mathbb{R}^{4n}.$$

複素化すると

$$\Lambda^2 T^*M^{\mathbb{C}} = P^* \Lambda^2 \mathcal{F}^{*\mathbb{C}} \Lambda^2 \mathbb{C}^{4n}.$$

$$\begin{aligned} \text{そこで、} \quad \Lambda^2 \mathcal{F}^{*\mathbb{C}} &= \Lambda^2 (\mathcal{F}_n^* \otimes \mathcal{F}_1^*) \\ &= \Lambda^2 \mathcal{F}_n^* \otimes S^2 \mathcal{F}_1^* + S^2 \mathcal{F}_n^* \otimes \Lambda^2 \mathcal{F}_1^*. \end{aligned}$$

ω_n (resp. ω_1) を $\mathbb{C}^{2n}$ (resp. $\mathbb{C}^2$) 上の symplectic form とする。即ち $\mathbb{C}^{2n}$ (resp. $\mathbb{C}^2$) 上の $Sp(n)$ (resp. $Sp(1)$) 不変なる 2 form である。

$$\omega_n \in \Lambda^2 \mathcal{F}_n^* \quad \text{かつ} \quad \mathbb{C}\omega_1 = \Lambda^2 \mathcal{F}_1^* \quad \text{より}$$

$$\Lambda^2 \mathcal{P}_n^* = \mathbb{C} \omega_n + \Lambda_0^2 \mathcal{P}_n^* \quad \text{と直交分解すると、}$$

$$\Lambda^2 \mathcal{P}^{*\mathbb{C}} = \omega_n \otimes S^2 \mathcal{P}_1^* + \Lambda_0^2 \mathcal{P}_n^* \otimes S^2 \mathcal{P}_1^* + S^2 \mathcal{P}_n^* \otimes \omega_1$$

となる。ところが各々の表現を調べてみると、3つ共 real form をもつことがわかる。従って、

$$\Lambda^2 \mathcal{P}^* = (\omega_n \otimes S^2 \mathcal{P}_1^*)_{\text{real}} + (\Lambda_0^2 \mathcal{P}_n^* \otimes S^2 \mathcal{P}_1^*)_{\text{real}} + (S^2 \mathcal{P}_n^* \otimes \omega_1)_{\text{real}}$$

となる。この分解に応じて $\Lambda^2 T^*M$ は3つの subbundles に分解する。各々 A_2' , A_2'' , B_2 と書くと

$$\Lambda^2 T^*M = A_2' + A_2'' + B_2 \quad .$$

例えば、 $n=1$ の時は $A_2'' = \{0\}$ で $A_2' = \Lambda_+$, $B_2 = \Lambda_-$ となる。そこで E を quaternionic Kähler manifold M 上の vector bundle (体は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) とする。 ∇ を E 上の G -connection (G は compact group で その Lie algebra を $\mathcal{G}$ と書く) とする時、 ∇ が A_2' (resp. B_2)-connection とは、その curvature R^∇ が $\mathcal{G}_E$ -valued A_2' (resp. B_2)-form の時をいう。ここで $\mathcal{G}_E$ は adjoint bundle ($\subset \text{End } E$)

$N-9$

である。例えば、 $n = 1$ の時は A_2' -connection (resp. B_2 -connection) は self-dual connection (resp. anti-self-dual connection) と一致する。

すると自然な疑問として、 A_2' -connection, B_2 -connection は Yang-Mills connection だろうか という事が浮かんでくる。それに対して次の Theorem が成り立つ。

Theorem 1. A_2' -connection, B_2 -connection 共に Yang-Mills connection である。

更に、 B_2 -connection を用いて vector bundle valued の elliptic complex が存在する。まず form の分解から行う。 $\Lambda^i(\mathfrak{p}_n^* \otimes \mathfrak{p}_1^*) = \Lambda^i \mathfrak{p}_n^* \otimes S^i \mathfrak{p}_1^* + (\Lambda^i \mathfrak{p}_n^* \otimes S^i \mathfrak{p}_1^*)^\perp$ と分解し、2つの部分共 real form を持つことに注意すると、

$$\Lambda^i \mathfrak{p}^* = (\Lambda^i \mathfrak{p}_n^* \otimes S^i \mathfrak{p}_1^*)_{\text{real}} + ((\Lambda^i \mathfrak{p}_n^* \otimes S^i \mathfrak{p}_1^*)^\perp)_{\text{real}}$$

となる。この分解に応じて

$$\Lambda^i T^*M = \underset{N-10}{A_i} + B_i \quad \text{と分解する。}$$

$\Lambda^i T^*M$ の A_i 成分への projection を pr_i と書く。

Theorem 2. E を M 上の vector bundle で B_2 - G -connection ∇ をもつとする。その時、次の sequence は elliptic complex である。

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(E) \xrightarrow{d^\nabla} \mathcal{O}(E \otimes T^*M) \xrightarrow{d_1} \mathcal{O}(E \otimes A_2) \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{2n-1}} \mathcal{O}(E \otimes A_{2n}) \rightarrow 0$$

ここで $d_i := (id \otimes pr_{i+1}) \circ d^\nabla$ とし、 $\mathcal{O}(\quad)$ で germ のつくる sheaf を表わす。

この elliptic complex を用いて B_2 - G -connection の moduli space の次元を調べられる。 E を Theorem 2 の様に M 上の vector bundle で B_2 - G -connection ∇ をもつとする。即ち、 E の frame bundle は fibre G なる M 上の principal bundle Q に還元される。

そこで、

$$G_Q := Q \times_{\text{inner}} G, \quad \mathcal{G}_Q := Q \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$$

とする。 E の connection ∇ から $\mathcal{G}_Q$ に自然に connection ∇' が入る。 $\Gamma(M, G_Q)$ は gauge group と呼ばれ、

$$\{E \text{ 上の } B_2\text{-}G\text{-connection} \}$$

N-II

に connection の引き戻しとして作用する。

$$\{E \text{ 上の } B_2\text{-}G\text{-connection}\} / \Gamma(M, G_0)$$

を 同値類という意味で

$$[\{E \text{ 上の } B_2\text{-}G\text{-connection}\}]$$

と書く。

Theorem 3. G を semisimple, ∇ を irreducible $B_2\text{-}G\text{-connection}$ とする。その時, ∇ の infinitesimal deformation ((i.e.) $T_{\nabla}[\{E \text{ 上の } B_2\text{-}G\text{-connection}\}]$) は、次の complex の 1st cohomology H^1 の subspace である。

$$0 \rightarrow \Omega(\mathcal{Q}_0) \xrightarrow{d^{\nabla'}} \Omega(\mathcal{Q}_0 \otimes T^*M) \xrightarrow{d'_1} \Omega(\mathcal{Q}_0 \otimes A_2) \xrightarrow{d'_2} \cdots \xrightarrow{d'_{2n-1}} \Omega(\mathcal{Q}_0 \otimes A_{2n}) \rightarrow 0,$$

ここで $d'_i := (\text{id} \otimes \text{pr}_{i+1}) \circ d^{\nabla'}$ である。

更に、次の 1-1 対応がある。 $p: Z \rightarrow M$ を projection とする。

Theorem 4.

$$\{ (E, \nabla_E) : M \pm \text{ Hermitian vector bundle } E \\ \text{ with Hermitian } B_2\text{-connection } \nabla_E \}$$

$\downarrow p^* \quad \quad \quad / = /$

$$\{(F, \nabla_F) : Z \pm \text{holomorphic Hermitian vector bundle } F \text{ with Hermitian } (1,0)\text{-connection } \nabla_F \text{ s.t.}$$

- (i) F は $p: Z \rightarrow M$ の fibre 上 trivial ,
(ii) connection ∇_F は Γ で不変 } .

∴ τ は section 1 で定義した $\tau: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ である。

Corollary 5. 特^に (M, g) の scalar curvature が
正の時 (この時は twistor space Z は Kähler
manifold になる事を section 1 で 注意した), Theorem 4
の対応は次のようになる。

$$\{(E, \nabla_E) : M \text{ is Hermitian vector bundle } E \text{ with Hermitian } B_2\text{-connection } \nabla_E\}$$

$\downarrow p^*$ $1:1$

$$\{(F, \nabla_F) : Z \rightarrow \text{holomorphic Hermitian vector bundle } F \text{ with Einstein-Hermitian connection } \nabla_F \text{ s.t. (i) (ii) } \}.$$

§ 4. 注意

この section では、 M は scalar curvature 正で compact とする。 E を M 上の Hermitian vector bundle とすると corollary 5 より

$$\begin{aligned} & P^* \{ \text{Hermitian } B_2\text{-connection on } E \} \\ &= \{ \text{Einstein Hermitian connection on } P^*E \\ & \quad \text{s.t. (i) (ii)} \} \end{aligned}$$

であった。右辺の $\{ \}$ の中の connection は 条件が2つついていて、1つつ取り除いていくと、

$$\{ \text{Einstein Hermitian connection on } P^*E \text{ s.t. (i) (ii)} \}$$

$\cap$

$$\{ \text{Einstein Hermitian connection on } P^*E \text{ s.t. (ii)} \}$$

$\cap$

$$\{ \text{Einstein Hermitian connection on } P^*E \} \text{ となる。}$$

今、Hermitian connection を考えているので、 E の frame bundle は fibre $U(r)$ ($r := \text{rank}(E)$) なる principal bundle Q に還元する。 Q を $\mathbb{Z}$ 上に持ち上げて

P^*Q と P^*Q から $\sqcup(r)_{P^*Q}$ を

$$\sqcup(r)_{P^*Q} := P^*Q \times_{\text{inner}} \sqcup(r)$$

としてつくる。 $\Gamma(Z, \sqcup(r)_{P^*Q})$ の作用で、上の3つの
 $\{ \}$ を割って moduli space とする。 即ち、

$$[\{ \text{Einstein Hermitian connection on } P^*E \text{ s.t. (i) (ii) } \}]$$

$\cap_1$

$$[\{ \text{Einstein Hermitian connection on } P^*E \text{ s.t. (i) } \}]$$

$\cap_2$

$$[\{ \text{Einstein Hermitian connection on } P^*E \}] \quad \text{となる。}$$

Itoh, Kim によって最後の $[\{ \}]$ は 特異点を持つ
 Kähler manifold になる事が知られている。

そして、 $\cap_2$ は Kähler submanifold に、 $\cap_1$ は
 totally real submanifold になる。

reference

[S] S. M. Salamon: Quaternionic Kähler manifolds.
 Inv. Math., 67, 143-171 (1982).