

Positive entire solutions of higher order semilinear elliptic equations

尾道大学・経済情報学部・寺本 智光 (Tomomitsu Teramoto)
Faculty of Economics, Management & Information Science,
Onomichi University

1. 序

次の高階半線形楕円型方程式の正值全域解の存在・非存在について考える:

$$(1) \quad \sigma \Delta^m u = p(|x|)u^\alpha, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

ここで, $\sigma = +1$ または $\sigma = -1$, $m \geq 2$, $N \geq 3$, $\alpha > 1$ は定数. $p(r) > 0$, $r = |x|$ は $[0, \infty)$ で連続とする.

u が (1) の全域解であるとは, $u \in C^{2m}(\mathbf{R}^N)$ で $\mathbf{R}^N$ で (1) を満たすときをいう. また解として球対称なものを考える.

高階楕円型方程式 (1) の正值全域解については文献 [1, 2] 等多くの研究結果がある. 一般に, 高階の微分方程式は 1 階または 2 階の微分方程式系に変形できることが知られている. 本研究では高階楕円型方程式 (1) を 2 階楕円型方程式系に変形して正值全域解の存在・非存在について考える.

2. 高階方程式の 2 階方程式系への変形

この節では, 高階楕円型方程式 (1) を 2 階楕円型方程式系に変形することを考える.

$$u_1 = \tau_1 u, \quad u_2 = \tau_2 \Delta u, \quad u_3 = \tau_3 \Delta^2 u, \dots, \quad u_m = \tau_m \Delta^{m-1} u$$

とおく, ここで τ_i は $+1$ または -1 である. この置き方により高階楕円型方程式 (1) は形式的に次の 2 階楕円型方程式系に変形される:

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_1 \Delta u_1 = u_2, \\ \sigma_2 \Delta u_2 = u_3, \\ \vdots \\ \sigma_{m-1} \Delta u_{m-1} = u_m, \\ \sigma_m \Delta u_m = p(|x|)u_1^\alpha. \end{cases}$$

ここで, $\sigma_i = +1$ または $\sigma_i = -1$. $\sigma = +1$ のとき $\sigma_i = -1$ の数は偶数, $\sigma = -1$ のとき, $\sigma_i = -1$ の数は奇数である.

本研究では正値全域解を考えているので, 方程式系 (2) で

$$-\Delta u_i = u_{i+1}, \quad \Delta u_{i+1} = u_{i+2}$$

となる $i \in \{1, 2, \dots, m-2\}$ が存在するか, または

$$-\Delta u_{m-1} = u_m, \quad \Delta u_m = p(|x|)u_1^\alpha$$

となる場合, 方程式系 (2) の正値全域解が存在しないことがわかる.

証明. $i = 1$ の場合を示す (他の場合も同様). (2) で

$$-\Delta u_1 = u_2, \quad \Delta u_2 = u_3$$

となっているとする. $(u_1, \dots, u_m)$ を (2) の正値全域解とする. $\Delta u_2 = u_3$ を 2 回積分して

$$\begin{aligned} u_2(r) &= u_2(0) + \int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} u_3(t) dt ds \\ &\geq u_2(0) > 0. \end{aligned}$$

同様に $-\Delta u_1 = u_2$ を 2 回積分して

$$u_1(r) = u_1(0) - \int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} u_2(t) dt ds$$

となる. ここで $u_2(r) \geq u_2(0)$ より

$$\begin{aligned} \int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} u_2(t) dt ds &\geq u_2(0) \int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} dt ds \\ &= \frac{u_2(0)}{2N} r^2 \rightarrow \infty (r \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

よって $u_1(r) \rightarrow -\infty$ となるから u_1 が正値全域解であることに矛盾する.

以上より, (2) で正値全域解を考える場合, 次の形の方程式系を考えればよいことになる:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = u_2, \\ \vdots \\ \Delta u_j = u_{j+1}, \\ -\Delta u_{j+1} = u_{j+2}, \\ \vdots \\ -\Delta u_m = p(|x|)u_1^\alpha. \end{cases}$$

次に高階方程式 (1) の正値全域解がどのような方程式系を満たすかを考える.

u を (1) の正値全域解とする. このとき次を満たす $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, $r_* \geq 0$ が存在する (文献 [1](Theorem 2.1) 参照):

$$(1)_j \quad \begin{cases} (\Delta^i u)(r) > 0, & r \geq r_*, \quad i = 1, 2, \dots, j-1, \\ (-1)^{i-j} (\Delta^i u)(r) \geq 0, & r \geq 0, \quad i = j, j+1, \dots, m. \end{cases}$$

注意 1. $\Delta^i u$ は増加または減少である.

方程式 (1) の正値全域解の全体を $\mathcal{K}$, (1) の正値全域解で $(1)_j$ を満たすものの全体を $\mathcal{K}_j$ とする:

$$\mathcal{K} = \{u \in C^{2m}[0, \infty); u \text{ は (1) の正値全域解}\},$$

$$\mathcal{K}_j = \{u \in \mathcal{K}; u \text{ は (1)}_j \text{ を満たす}\}.$$

この $\mathcal{K}_j$ は j 次の Kiguradze クラスとよばれている.

m が偶数か奇数か, σ が $+1$ か -1 により $\mathcal{K}$ は次のように分類される:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_m, \quad m \text{ は奇数, } \sigma = +1,$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_{m-1}, \quad m \text{ は奇数, } \sigma = -1,$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_m, \quad m \text{ は偶数, } \sigma = +1,$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_3 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_{m-1}, \quad m \text{ は偶数, } \sigma = -1.$$

u を (1) の $\mathcal{K}_j$ クラスの正値全域解とする. このとき

$$\begin{cases} u_i = \Delta^{i-1} u, & i = 1, 2, \dots, j, \\ u_i = (-1)^{i-j+1} \Delta^{i-1} u, & i = j+1, \dots, m, \end{cases}$$

とおくと $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ は次の方程式系を満たす:

$$(3)_j \quad \begin{cases} \Delta u_1 = u_2, \\ \vdots \\ \Delta u_j = u_{j+1}, \\ -\Delta u_{j+1} = u_{j+2}, \\ \vdots \\ -\Delta u_m = p(|x|)u_1^\alpha. \end{cases}$$

よって $\mathcal{K}_j$ クラスの正値全域解を考える場合, 方程式系 $(3)_j$ を考えればよい.

3. 2階楕円型方程式系

前節では, 高階楕円型方程式 (1) を 2階楕円型方程式系 $(3)_j$ に変形した. この節では方程式系 $(3)_j$ ではなく, $(3)_j$ の一般的な形の方程式系の正値全域解の存在・非存在について考える.

次の 2階楕円型方程式系について考える:

$$(S) \quad \sigma_i \Delta u_i = P_i(|x|) u_{i+1}^{\alpha_i}, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

ここで, $\sigma_i = +1$ または $\sigma_i = -1$, $\alpha_i > 0$ は定数で $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m > 1$ を満たすとする. 係数関数 $P_i(r) > 0$, $r = |x|$ は $[0, \infty)$ で連続とする.

A, ξ_i を次のように定義する：

$$A = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m,$$

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & (\sigma_i = +1 \text{ のとき}), \\ 1 & (\sigma_i = -1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ に対し Λ_i を

$$\Lambda_i = \lambda_i - 2 + \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_{i+j} - 2) \prod_{k=0}^{j-1} \alpha_{i+k}$$

で定義する. 方程式系 (S) の正值全域解の存在・非存在については次の Theorem, Conjecture がある：

Theorem A. P_i は

$$P_i(r) \geq \frac{C_i}{r^{\lambda_i}}, \quad r \geq r_0 > 0$$

を満たすとする, ここで, $C_i > 0$, λ_i は定数. このとき

$$\Lambda_i + (A - 1)(N - 2)\xi_i \leq 0$$

を満たす $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ が存在するか, または $\sigma_i = -1$ となる i に対し

$$\lambda_i - 2 + \sum_{j=1}^{\ell-1} (\lambda_{i+j} - 2) \prod_{k=0}^{j-1} \alpha_{i+k} + \xi_{i+\ell}(N - 2) \prod_{k=0}^{\ell-1} \alpha_{i+k} \leq 0$$

を満たす $\ell \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ が存在すれば (S) の正值全域解は存在しない.

注意 2. Theorem A の結論「正值全域解は存在しない」を「終局的に増加する, または減少する正值解は存在しない」に変更しても成立する.

Theorem B. 少なくとも 1 つの σ_i は +1 とする. P_i は

$$(3) \quad P_i(r) \leq \frac{C_i}{r^{\lambda_i}}, \quad r \geq r_0 > 0$$

を満たすとする, ここで, $C_i > 0$, λ_i は定数. このとき

$$\sigma_i \Lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\Lambda_i + (A - 1)(N - 2)\xi_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

ならば (S) の正值全域解が存在する.

Conjecture. 少なくとも 1 つの σ_i は +1 とする. P_i は (3) を満たすとする.

$$\Lambda_i + (A - 1)(N - 2)\xi_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

かつ $\sigma_i = -1$ となる i に対し

$$\lambda_i - 2 + \sum_{j=1}^{\ell-1} (\lambda_{i+j} - 2) \prod_{k=0}^{j-1} \alpha_{i+k} + \xi_{i+\ell} (N - 2) \prod_{k=0}^{\ell-1} \alpha_{i+k} > 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, m-1,$$

ならば (S) の正値全域解が存在する.

4. 主結果

この節では, 前節の 2 階楕円型方程式系に対する結果を方程式系 $(3)_j$ に適用して, 高階方程式 (1) の正値全域解の存在・非存在について考える.

最初に, Theorem A, Theorem B, Conjecture を形式的に方程式系 $(3)_j$ に適用してみる.
 p は

$$\frac{C_1}{r^\lambda} \leq p(r) \leq \frac{C_2}{r^\lambda}, \quad r \geq r_0 \geq 0$$

を満たすとする. 今

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{m-1} = 1, \alpha_m = \alpha, \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = 0, \lambda_m = \lambda \end{aligned}$$

より Λ_i は簡単に計算できて,

$$\Lambda_i = \lambda - 2\alpha(i-1) - 2(m-i+1), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

となる. よって Theorem A より $N \leq 2(m-j)$ または

$$\begin{aligned} \lambda &\leq 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) \quad (N \geq 2(m-j) + 2 \text{ のとき}), \\ \lambda &\leq 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 \quad (N = 2(m-j) + 1 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

ならば $(3)_j$ の正値全域解は存在しない.

Theorem B より

$$\begin{aligned} 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) &< \lambda < 2\alpha j + 2(m-j) \quad (N \geq 2(m-j) + 2 \text{ のとき}), \\ 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 &< \lambda < 2\alpha j + 2(m-j) \quad (N = 2(m-j) + 1 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

ならば $(3)_j$ の正値全域解が存在する.

Conjecture より $N > 2(m-j)$ かつ

$$\begin{aligned} \lambda &> 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) \quad (N \geq 2(m-j) + 2 \text{ のとき}), \\ \lambda &> 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 \quad (N = 2(m-j) + 1 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

ならば $(3)_j$ の正値全域解が存在する.

次に方程式系 $(3)_j$ に Theorem A をそのまま適用できるかどうか考えてみる.

$(3)_j$ と (S) では次のような違いがある:

$$\begin{aligned} \text{(S): } & u_i > 0, \quad r \geq 0, \\ & i = 2, \dots, j, \\ \text{(3)}_j: & u_i > 0, \quad r \geq r_* \geq 0, \end{aligned}$$

すなわち, 方程式系 $(3)_j$ では $u_2, \dots, u_j$ が全域で正値でない可能性がある.

注意 1 から $\Delta^i u$, $i = 1, 2, \dots, j$, は増加である. よって $u_2, \dots, u_j$ は終局的には増加な正値解となる. よって 注意 2 から「終局的に増加な正値解は存在しない」として Theorem A を適用できる.

次に Conjecture について考える. 方程式系 (S) に対してはまだ Conjecture のままであるが, 方程式系 $(3)_j$ に対しては正しいことがわかった.

証明の概略. $\lambda \geq 2\alpha j + 2(m - j)$ の場合を考えればよい. $\tilde{\lambda} < \lambda$ に対して

$$p(r) \leq \frac{C}{r^\lambda} \leq \frac{C}{r^{\tilde{\lambda}}}, \quad r \geq r_0 \geq 1$$

が成立するので,

$$2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) < \tilde{\lambda} < 2\alpha j + 2(m-j) \quad (N \geq 2(m-j) + 2 \text{ のとき}),$$

$$2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 < \tilde{\lambda} < 2\alpha j + 2(m-j) \quad (N = 2(m-j) + 1 \text{ のとき})$$

を満たすような $\tilde{\lambda}$ が存在することを示せばよい. 一方, このような $\tilde{\lambda}$ は必ず存在する. したがって Theorem B から正値全域解の存在が示される.

以上より高階楕円型方程式 (1) の正値全域解の存在・非存在について次の定理が得られた.

Theorem 1. p は

$$p(r) \geq \frac{C}{r^\lambda}, \quad r \geq r_0$$

を満たすとする, ここで, $C > 0$, λ は定数.

(i) $N \leq 2(m-j)$ または λ が

$$\lambda \leq 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) \quad (N \geq 2(m-j) + 2 \text{ のとき}),$$

$$\lambda \leq 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 \quad (N = 2(m-j) + 1 \text{ のとき})$$

を満たすならば, (1) の $\mathcal{K}_j$ クラス ($1 \leq j \leq m$) の正値全域解は存在しない.

(ii) $N \leq 2m$ または λ が

$$\lambda \leq 2\alpha(m-1) + 2 - (\alpha-1)(N-2)$$

を満たすならば, (1) の $\mathcal{K}_0$ クラスの正値全域解は存在しない.

Theorem 2. p は

$$p(r) \leq \frac{C}{r^\lambda}, \quad r \geq r_0$$

を満たすとする, ここで, $C > 0$, λ は定数. このとき, $N \geq 2(m-j)+1$ かつ λ が

$$\lambda > 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) \quad (N \geq 2(m-j)+2 \text{ のとき}),$$

$$\lambda > 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 \quad (N = 2(m-j)+1 \text{ のとき})$$

を満たすならば, (1) の $\mathcal{K}_j$ クラス ($1 \leq j \leq m$) の正値全域解が存在する.

Example. 次の高階楕円型方程式を考える:

$$(4) \quad \sigma \Delta^m u = \frac{1}{(1+|x|)^\lambda} u^\alpha, \quad x \in \mathbf{R}^N$$

を考える, ここで, $m \geq 2$, $N \geq 2m+1$, $\alpha > 1$, $\sigma = -1$ または $\sigma = +1$. Theorems 1,2 より次のことがわかる:

(i) $\{m \text{ は奇数}, \sigma = +1\}$, $\{m \text{ は偶数}, \sigma = -1\}$ のとき:

$$\lambda > 2m \implies (4) \text{ の正値全域解が存在する.}$$

$$\lambda \leq 2m \implies (4) \text{ の正値全域解は存在しない.}$$

(ii) $\{m \text{ は奇数}, \sigma = -1\}$, $\{m \text{ は偶数}, \sigma = +1\}$ のとき:

$$\lambda \leq 2\alpha(m-1) + 2 - (\alpha-1)(N-2) = N - \alpha(N-2m)$$

$$\implies (4) \text{ の正値全域解は存在しない.}$$

$$\lambda > 2\alpha + 2(m-1) \implies (4) \text{ の正値全域解が存在する.}$$

以上のことから, $N \geq 2m+1$ の場合, $\{m \text{ は奇数}, \sigma = +1\}$, $\{m \text{ は偶数}, \sigma = -1\}$ のとき, $\lambda = 2m$ が (4) の正値全域解の存在・非存在の境目になっていることがわかる. 一方, $\{m \text{ は奇数}, \sigma = -1\}$, $\{m \text{ は偶数}, \sigma = +1\}$ のとき, (4) の正値全域解の存在・非存在の境目はわからない ($\mathcal{K}_0$ クラスの解を除けば境目は $\lambda = 2\alpha + 2(m-1)$).

上記の例では簡単のため $N \geq 2m+1$ としたが, Theorems 1,2 より (4) の $\mathcal{K}_j$ クラス ($1 \leq j \leq m$) の正値全域解の存在・非存在の境目は

$$\lambda = 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) \quad (N \geq 2(m-j)+2 \text{ のとき}),$$

$$\lambda = 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 \quad (N = 2(m-j)+1 \text{ のとき})$$

である.

5. 正值全域解の挙動

前節までは方程式 (1) の正值全域解の存在・非存在のみを考えたが、この節では (1) の正值全域解の挙動について考えてみる。なお、この節では (1) の $\mathcal{K}_j$ クラスの正值全域解 u と方程式系 $(3)_j$ の正值全域解は同じものとみなすことにする。

方程式系 $(3)_j$ の正值全域解については次の Proposition が成立する。

Proposition. $(u_1, \dots, u_m)$ を $(3)_j$ の正值全域解とする。このとき次のことが成立する。

(i) $N \geq 2(m-j) + 3$ のとき:

$$u_i(r) \geq \begin{cases} Cr^{2(j-i)}, & i = 1, 2, \dots, j, \\ Cr^{2(m-i+1)-N}, & i = j+1, \dots, m. \end{cases}$$

(ii) $N = 2(m-j) + 2$ のとき:

$$u_i(r) \geq \begin{cases} Cr^{2(j-i)} \log r, & i = 1, 2, \dots, j, \\ Cr^{2(j-i)}, & i = j+1, \dots, m. \end{cases}$$

(iii) $N = 2(m-j) + 1$ のとき:

$$u_i(r) \geq Cr^{2(j-i)+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

証明の概略. 方程式系 $(3)_j$ の正值全域解に対して次のことが成立する。

$$(5) \quad \begin{cases} u_i(r) \geq C_i \int_0^{r/2} s u_{i+1}(s) ds, & i = 1, 2, \dots, j, \\ u_i(r) \geq C_i r^{2-N} \int_0^{r/2} s^{N-1} u_{i+1}(s) ds, & i = j+1, \dots, m-1. \end{cases}$$

u_m は $\Delta u_m \leq 0$ を満たすから

$$u_m(r) \geq Cr^{2-N}$$

が成立する。この式を (5) に代入して順々に計算すると Proposition の結論が得られる。

注意 3. $N \leq 2(m-j)$ の場合, $u_i(r) \rightarrow -\infty$ ($r \rightarrow \infty$) となる $i \in \{j+1, \dots, m-1\}$ が存在する。これは u_i が正值全域解であることに矛盾する。よって $(3)_j(\mathcal{K}_j \text{ クラス})$ の正值全域解を考える場合, 空間次元 N は $N \geq 2(m-j) + 1$ でなければならない。

次に $N \geq 2(m-j) + 3$ として, $u_1(r)/r^2$ の $r \rightarrow \infty$ のときの極限を考える。Proposition とロピタルの法則より

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_1(r)}{r^{2j}} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_1'(r)}{2jr^{2j-1}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\int_0^r s^{N-1} u_2(s) ds}{2jr^{N+2(j-1)}} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^{N-1} u_2(r)}{2j(N+2(j-1))r^{N+2j-3}} = C \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_2(r)}{r^{2(j-1)}}, \end{aligned}$$

ここで, $C > 0$ は定数. 以下同様なことを繰り返して

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_1}{r^{2j}} = C \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_2(r)}{r^{2(j-1)}} = \cdots = C \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_j(r)}{r^2}$$

となる. $u_j(r)$ は正値で増加だから, 正定数に収束するか $+\infty$ に発散するかのどちらかである. $u_j(r)$ が定数に収束する場合は $u_j(r)/r^2$ は 0 に収束する. $u_j(r)$ が $+\infty$ に発散する場合はロピタルの法則より, $u_{j+1}(r)$ の極限に一致する. $u_{j+1}(r)$ は正値で減少するから, 正定数か 0 に収束する. よって最終的に $u_1(r)/r^{2j}$ の $r \rightarrow \infty$ のときの極限は

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_1(r)}{r^{2j}} = \begin{cases} \text{const} > 0 & \text{または} \\ 0 \end{cases}$$

となる. 同様にして $N = 2(m-j) + 2$, $N = 2(m-j) + 1$ の場合や, $u_1(r)/r^{2(j-1)}$ の極限に関して次のことがわかる:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_1(r)}{r^{2(j-1)}} = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} u_j(r) = \begin{cases} \text{const} > 0, \\ +\infty, \end{cases} & N \geq 2(m-j) + 3, \\ +\infty, & N = 2(m-j) + 1, N = 2(m-j) + 2. \end{cases}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_1(r)}{r^{2j}} = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_j(r)}{r^2} = \begin{cases} 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u_{j+1}(r), \end{cases} & N \geq 2(m-j) + 3, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u_{j+1}(r) = \begin{cases} \text{const} > 0, \\ 0, \end{cases} & N = 2(m-j) + 1, N = 2(m-j) + 2. \end{cases}$$

以上より u が (1) の K_j クラスの正値全域解ならば次の 3 つのうちのどれか 1 つが起こる:

- (i) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r)}{r^{2(j-1)}} = \text{const} > 0$,
- (ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r)}{r^{2(j-1)}} = +\infty$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r)}{r^{2j}} = 0$,
- (iii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r)}{r^{2j}} = \text{const} > 0$.

$\mathcal{K}_j$ クラスに属する正値全域解で上の (i),(ii),(iii) を満たすものの全体をそれぞれ,

$$\mathcal{K}_j[\text{min}], \mathcal{K}_j[\text{int}], \mathcal{K}_j[\text{max}]$$

とする:

$$\mathcal{K}_j[\text{min}] = \{u \in \mathcal{K}_j; u \text{ は (i) を満たす.}\},$$

$$\mathcal{K}_j[\text{int}] = \{u \in \mathcal{K}_j; u \text{ は (ii) を満たす.}\},$$

$$\mathcal{K}_j[\text{max}] = \{u \in \mathcal{K}_j; u \text{ は (iii) を満たす.}\}.$$

これにより, $\mathcal{K}_j$ は次のようにわけられる:

$$\mathcal{K}_j = \mathcal{K}_j[\min] \cup \mathcal{K}_j[\text{int}] \cup \mathcal{K}_j[\max].$$

注意 4. Proposition より $N = 2(m - j) + 2$, $N = 2(m - j) + 1$ のとき

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_1(r)}{r^{2(j-1)}} = \infty$$

である. よってこの2つの次元の場合 $\mathcal{K}_j[\min] = \phi$ (空集合) である.

文献 [1](Kusano-Naito) では方程式 (1) よりも一般的な形で $\mathcal{K}_j[\min]$, $\mathcal{K}_j[\text{int}]$, $\mathcal{K}_j[\max]$ クラスの正値全域解についての研究がなされている. ここでは文献 [1] の結果を (1) に適用する. その結果を簡単にまとめると次のようになる.

$1 \leq j \leq m - 1$ とする.

(i) (1) の $\mathcal{K}_j[\max]$ クラスの正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$N \geq 2(m - j) + 1, \quad \int_0^\infty t^{2(m-j)-1+2\alpha j} p(t) dt < \infty.$$

(ii) (1) の $\mathcal{K}_j[\min]$ クラスの正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$N \geq 2(m - j) + 3, \quad \int_0^\infty t^{2(m-j)+1+2\alpha(j-1)} p(t) dt < \infty.$$

(iii) $N \geq 2(m - j) + 3$ とする. (1) の $\mathcal{K}_j$ クラスの正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$\int_0^\infty t^{2(m-j)+1+2\alpha(j-1)} p(t) dt < \infty.$$

これらの結果を §4 の Example に適用してみる.

Example. 次の高階楕円型方程式を考える:

$$(4) \quad \sigma \Delta^m u = \frac{1}{(1 + |x|)^\lambda} u^\alpha.$$

(i) (4) の $\mathcal{K}_j[\max]$ クラスの正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$N \geq 2(m - j) + 1, \quad \lambda > 2\alpha j + 2(m - j).$$

(ii) (4) の $\mathcal{K}_j[\min]$ クラスの正値全域解が存在するための必要十分条件は

$$N \geq 2(m - j) + 3, \quad \lambda > 2\alpha(j - 1) + 2(m - j + 1).$$

(iii) $N \geq 2(m-j) + 3$ とする. (4) の $\mathcal{K}_j$ クラスの正值全域解が存在するための必要十分条件は

$$\lambda > 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1).$$

この結果では, 空間次元 N が, $N = 2(m-j) + 2$, $N = 2(m-j) + 1$ で λ が

$$\lambda \leq 2\alpha j + 2(m-j)$$

を満たすとき, (4) の正值全域解が存在・非存在はわからない. 一方, Theorems 1,2 からは

$$\lambda \leq 2\alpha(j-1) + 2(m-j) + 1 \quad (N = 2(m-j) + 2 \text{ のとき}),$$

$$\lambda \leq 2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 \quad (N = 2(m-j) + 1 \text{ のとき})$$

のとき正值全域解は存在しない. また

$$2\alpha(j-1) + 2(m-j) + 1 < \lambda \leq 2\alpha j + 2(m-j) \quad (N = 2(m-j) + 2 \text{ のとき}),$$

$$2\alpha(j-1) + 2(m-j+1) + \alpha - 1 < \lambda \leq 2\alpha j + 2(m-j) \quad (N = 2(m-j) + 1 \text{ のとき})$$

のとき正值全域解が存在することがわかる.

Theorem 2 から (4) の正值全域解の存在はわかったが, その正值全域解はどのクラスに属する解だろうか?. 注意 4 からこの 2 つの次元の場合 $\mathcal{K}_j[\text{int}]$ クラスか $\mathcal{K}_j[\text{max}]$ クラスになることがわかる. また, 2 階楕円型方程式系 (S) の結果から $u_1(r)$ は

$$u_1(r) \leq Cr^{\frac{\lambda-2m}{\alpha-1}}$$

を満たすことがわかっている. よって

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r)}{r^{2j}} = 0$$

が成立する. すなわち $\mathcal{K}_j[\text{int}]$ クラスの解となる.

注意 5. 今の議論で得られた正值全域解は, Theorem B を適用して得られた $\mathcal{K}_j$ クラスの正值全域解である. Theorem B を適用して得られる正值全域解は

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_1(r)}{r^{2j}} = 0$$

を満たすので, $\mathcal{K}_j[\text{int}]$ クラスか $\mathcal{K}_j[\text{min}]$ クラスの解となる.

$\mathcal{K}_j[\text{min}]$, $\mathcal{K}_j[\text{max}]$ クラスの正值全域解について次の定理が得られた:

Theorem 3. p は

$$(6) \quad p(r) \leq \frac{C}{r^\lambda}$$

を満たすとする, ここで $C > 0$, λ は定数.

(i) λ が

$$\lambda > 2\alpha j + 2(m - j)$$

を満たすならば (1) の $\mathcal{K}_j[\max]$ クラスのの正値全域解が存在する.

(ii) λ が

$$\lambda > 2\alpha(j - 1) + 2(m - j + 1)$$

を満たすならば (1) の $\mathcal{K}_j[\min]$ クラス の正値全域解が存在する.

証明の概略. 方程式系 (3)_j の正値全域解を示せばよい. 証明には不動点定理を用いる.

(i) 集合 X と写像 $\mathcal{T} : X \rightarrow (C[0, \infty))^m$ を次のように定義する:

$$X = \{(u_1, \dots, u_m); u_i \text{ は以下を満たす.}\} :$$

$$C_i \leq u_i(r) \leq \tilde{C}_i r^{2(j+i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, j-1,$$

$$C_j r^2 \leq u_j(r) \leq \tilde{C}_j r^2,$$

$$C_{j+1} \leq u_{j+1}(r) \leq \tilde{C}_{j+1},$$

$$C_i r^{2-N} \leq u_i(r) \leq \begin{cases} \tilde{C}_i r^{2(m-i+1)-N} & \text{or} \\ \tilde{C}_i r^{2\alpha j + 2(m-i+1)-\lambda}, & i = j+2, \dots, m. \end{cases}$$

$$\mathcal{T}(u_1, \dots, u_m) = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m),$$

ここで

$$\tilde{u}_i(r) = C_i + \frac{1}{N-2} \int_0^r s \left[1 - \left(\frac{s}{r} \right)^{N-2} \right] u_{i+1}(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, j,$$

$$\tilde{u}_{j+1}(r) = \tilde{C}_{j+1} - \frac{1}{N-2} \int_0^r s \left[1 - \left(\frac{s}{r} \right)^{N-2} \right] u_{j+2}(s) ds,$$

$$\tilde{u}_i(r) = \int_r^\infty s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} u_{i+1}(s) dt ds, \quad i = j+2, \dots, m-1,$$

$$\tilde{u}_m(r) = \int_r^\infty s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} p(t) u_1(s)^\alpha dt ds.$$

容易に

(I) $\mathcal{T}(X) \subset X$, (II) $\mathcal{T}$ は連続, (III) $\mathcal{T}(X)$ は相対コンパクト

を示すことができる. Schauder-Tychonoff の不動点定理から不動点の存在が示すことができ, この不動点が (3)_j の正値全域解となる. 集合 X の定義より $u_1(r)/r^{2j}$ の $r \rightarrow \infty$ における極限は $u_{j+1}(r)$ の極限の定数倍である. $u_{j+1}(r)$ は減少で

$$0 < C_{j+1} \leq u_{j+1}(r) \leq \tilde{C}_{j+1}$$

だから正定数に収束する. よってこの不動点は $\mathcal{K}_j[\max]$ クラスの正值全域解である.

(ii) 基本的に (i) と同じなので, 集合 X と 写像 $\mathcal{T}$ の定義を述べることにする:

$$X = \{(u_1, \dots, u_m); u_i \text{ は次を満たす.}\}:$$

$$C_1 \leq u_1(r) \leq \tilde{C}_1 r^{2(j-i)}, \quad i = 1, 2, \dots, j,$$

$$C_j \leq u_j(r) \leq \tilde{C}_j,$$

$$C_i r^{2-N} \leq u_i(r) \leq \begin{cases} \tilde{C}_i r^{2(m-i+1)-N} & \text{or} \\ \tilde{C}_i r^{2\alpha(j-1)+2(m-i+1)-\lambda}, & i = j+1, \dots, m. \end{cases}$$

$$\mathcal{T}(u_1, u_2, \dots, u_m) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m),$$

ここで

$$\tilde{u}_i(r) = C_i + \frac{1}{N-2} \int_0^r s \left[1 - \left(\frac{s}{r} \right)^{N-2} \right] u_{i+1}(s) ds, \quad i = 1, \dots, j,$$

$$\tilde{u}_i(r) = \int_r^\infty s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} u_{i+1}(s) dt ds, \quad i = j+1, \dots, m-1,$$

$$\tilde{u}_m(r) = \int_r^\infty s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} p(t) u_1(s)^\alpha dt ds.$$

参考文献

- [1] T.Kusano and M.Naito, Kiguradze classes for radial entire solutions of higher order quasilinear elliptic equations, Hiroshima Math. J, 22(1992), 301-363.
- [2] T.Kusano, M.Naito, C.A.Swanson, Asymptotic properties of entire solutions of even order quasilinear elliptic equations, Japan J. Math, 14(1988), 275-308.
- [3] T. Teramoto, On Nonnegative entire solutions of second-order semilinear elliptic systems, Electron. J. Diff. Eqns, No.94(2003).