

代数曲面の3次被覆について

京大、理 徳永浩雄 (Hiro-o Tokunaga)

§0. Introduction.

Y は代数多様体, X は Y 上の被覆多様体とし, $p: X \rightarrow Y$ は被覆写像とする. $\mathbb{C}(Y)$, $\mathbb{C}(X)$ をそれぞれ, Y , X の有理函数体とすると, p による pull-back によって, $\mathbb{C}(Y)$ は $\mathbb{C}(X)$ の部分体とみなされ, 拡大次数 $[\mathbb{C}(X):\mathbb{C}(Y)]$ は $\deg p$ に等しい. このことから, 以下では, "finite morphism $p: X \rightarrow Y$ が degree n の被覆" であるとは, $\mathbb{C}(X)$ が $\mathbb{C}(Y)$ の n 次代数拡大になっていることを意味するものとする. ここでは, 主に, $\dim X = \dim Y = 2$, $\deg p = 3$ の場合を考える. よく知られているように2通りの場合に分かれる. 即ち:

(i) $\mathbb{C}(X)$ は $\mathbb{C}(Y)$ の Galois 拡大. (即ち, 巡回拡大)

(ii) $\mathbb{C}(X)$ は $\mathbb{C}(Y)$ の non-Galois な拡大.

である. (i) の場合, $p: X \rightarrow Y$ は巡回被覆になっており, その構造はよく知られている. 問題は(ii)の場合で, この場合に

については、まだ詳しいことは知られていない。systematic な結果としては、R. Miranda [4] があり、ここでは、Tschirnhausen module という rank 2 の vector bundle が重要な働きをしている。藤田隆夫氏は、この方法を用いて、 $\mathbb{P}^n$ ($n \geq 4$) 上の 3 次被覆に関する美しい結果を得た。([1])。同じ事実、R. Lazarsfeld [3] においても得られている。(方法は異なる。) ここでは、3 次被覆を“3 次方程式を解く”という観点から調べ、それによって得られる結果について述べる。詳しくは、徳永 [5] を参照されたい。

目次

§0. Introduction

§1. 準備.

§2. 例.

§3. 代数曲面の 3 次被覆.

§1. 準備.

3 次方程式

$$x^3 + ax + b = 0 \quad \text{-----} (*)$$

の解は次のようにして求めることができる。

$$x = u + v$$

とおいて代入すると,

$$(u^3 + v^3 + b) + (u + v)(3uv + a) = 0$$

従って,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -b \\ uv = -\frac{a}{3} \end{cases}$$

を満たす u, v を求めればよい. これにより, (*) の解は

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{R}} \\ x_2 = \omega \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{R}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{R}} \\ x_3 = \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{R}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{R}} \end{cases}$$

但し, $\omega = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$, $R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$.

と求めることができる. これがいわゆる "Cardano の公式" である.

さて, $p: X \longrightarrow Y$ は finite triple cover, X, Y は smooth projective varieties とするとき, X の有理函数体 $\mathbb{C}(X)$ は Y の有理函数体 $\mathbb{C}(Y)$ の 3 次代数拡大となっているから, $\mathbb{C}(X)$ は:

$$\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(Y)(\theta)$$

但し, θ は 3 次方程式

$$X^3 + aX + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{C}(Y)$$

の解.

という形で得られる。ここで、以下の議論のため、次の Theorem を引用する。

Theorem. Y は algebraic variety, $\mathbb{C}(Y)$ はその有理函数体, L は $\mathbb{C}(Y)$ の有限次代数拡大とする。このとき、次の性質をみたす normal algebraic variety X が一意的存在する。

- (i) $\mu: X \longrightarrow Y$ finite surjective morphism
- (ii) X の有理函数体 $\mathbb{C}(X)$ は L に等しく, $\deg \mu = [L: \mathbb{C}(Y)]$

証明は, Iitaka [2], § 2.14 を参照されたい。

Definition. 上記の X を, Y の L -normalization と呼ぶ。

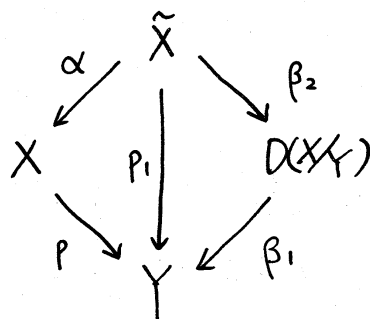
さて、最初の議論と、この Theorem を合わせると、

$$D(X/Y) := Y \text{ の } \mathbb{C}(Y)(\sqrt{R})\text{-normalization}$$

$$\hat{X} := D(X/Y) \text{ の } \mathbb{C}(D(X/Y))(\sqrt{-\frac{b}{2} + \sqrt{R}})\text{-normalization}$$

という、normal varieties が一意的存在することがわかる。 $X, \hat{X}, D(X/Y)$, 及び Y は明らかに以下の性質を
4

満たす: 図式



は可換であり,

(i) p : cyclic triple cover のとき.

$$\tilde{X} \xrightarrow[\alpha]{} X, \quad D(X/Y) \xrightarrow[\beta_1]{} Y$$

(ii) p : non-Galois triple cover のとき.

$\alpha: \tilde{X} \longrightarrow X$ finite double cover

$\beta_1: D(X/Y) \longrightarrow Y$ finite double cover

$\beta_2: \tilde{X} \longrightarrow D(X/Y)$ finite cyclic triple cover

$p_1: \tilde{X} \longrightarrow Y$ finite Galois cover,

$$\text{Gal}(\mathbb{C}(\tilde{X})/\mathbb{C}(Y)) \cong \mathbb{F}_3$$

従って, triple cover $p: X \longrightarrow Y$ を調べるには, $\tilde{X}$, $D(X/Y)$, 及び, β_1, β_2, α を調べることに重要となる.

Remark. X, Y が smooth であっても, $\tilde{X}, D(X/Y)$ は smooth とは限らず, さらに, $\tilde{X}, X, Y$ が smooth であっても

$D(XY)$ は smooth とは限らない.

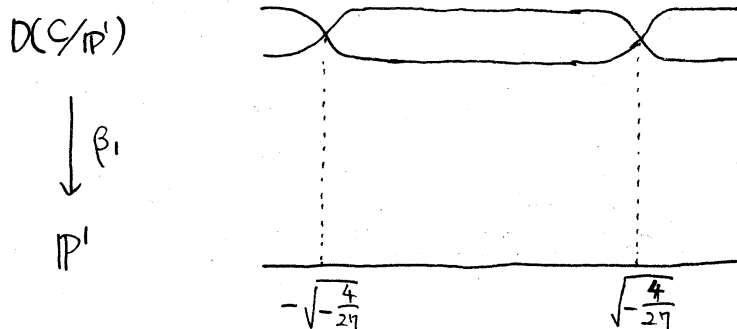
§2. 例.

ここでは, 具体的な例に対して, §1 で述べた $D(XY)$, $\hat{X}$, α , β_1, β_2 及び Galois 群の action を調べる.

Example 1. $p: C \rightarrow \mathbb{P}^1$: triple cover, C は $\mathbb{P}^1$ の $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)(\theta)$ -normalization とする. (但し, θ は 3 次方程式, $X^3 + X + t = 0$ (t は $\mathbb{P}^1$ の inhomogeneous coordinate) の解とする). この場合,

$$R = 27t^2 + 4$$

であり, $\mathbb{C}(D(C/\mathbb{P}^1)) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)(\sqrt{R})$ であるから, ramification の状況は 次のようになる:



従って, $D(C/\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{P}^1$ であり, $D(C/\mathbb{P}^1)$ の適当な affine coordinate を z とすれば, $\beta_1: D(C/\mathbb{P}^1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ は

$$\beta_1: Z \longmapsto -\frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2+1}{Z^2-1} (=t)$$

と表わせる。さらに、上記の座標を用いて、 $\sqrt{\beta_1^* R}$, t を表わせば、

$$\begin{cases} \sqrt{\beta_1^* R} = \frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \frac{Z}{Z^2-1} \\ \beta_1^* t = -\frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2+1}{Z^2-1} \end{cases}$$

となる。従って

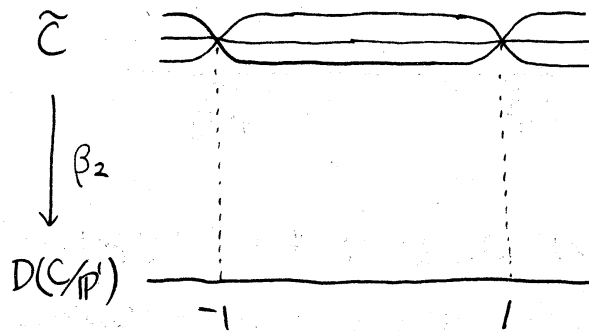
$$-\frac{1}{2}\beta_1^* t + \sqrt{\beta_1^* R} = \frac{\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \frac{Z+1}{Z-1}$$

を得る。ゆえに、

$$\mathbb{C}(\tilde{C}) = \mathbb{C}(D(\mathbb{C}/\mathbb{P})) \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\beta_1^* t + \sqrt{\beta_1^* R}} \right)$$

$$= \mathbb{C}(D(\mathbb{C}/\mathbb{P})) \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \frac{Z+1}{Z-1}} \right)$$

これより、 $\tilde{C} \longrightarrow D(\mathbb{C}/\mathbb{P})$ の ramification の状況は次のようになる。



ゆえに, $\tilde{C} \cong \mathbb{P}^1$ であって, $\tilde{C}$ の適当な affine coordinate を w とすれば, $\beta_2: \tilde{C} \longrightarrow D(\mathbb{C}/\mathbb{P}^1)$ は

$$\beta_2: w \longmapsto -\frac{w^3+1}{w^3-1} (=z)$$

と表わせる.

次に, $\text{Gal}(\mathbb{C}(\tilde{C})/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ の action を w を用いて表現する. この場合, $\text{Gal}(\mathbb{C}(\tilde{C})/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)) = G_3$ であるから, G_3 の order 2 の元と order 3 の元について調べれば十分である.

(i) order 2 の元: $D(\mathbb{C}/\mathbb{P}^1)$ 上には, $\text{Gal}(\mathbb{C}(D(\mathbb{C}/\mathbb{P}^1))/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ により induce される order 2 の automorphism σ があり, この action は上記の coordinate z により,

$$\sigma: z \longmapsto -z$$

と表わせる. $\tilde{C}$ 上で, $\text{Gal}(\mathbb{C}(\tilde{C})/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ により induce される order 2 の automorphism は全て, σ により, $\tilde{C}$ に induce される automorphism $\tilde{\sigma}$ に共役であり, $\tilde{\sigma}$ は上記の coordinate w により,

$$\tilde{\sigma}: w \longmapsto \frac{1}{w}$$

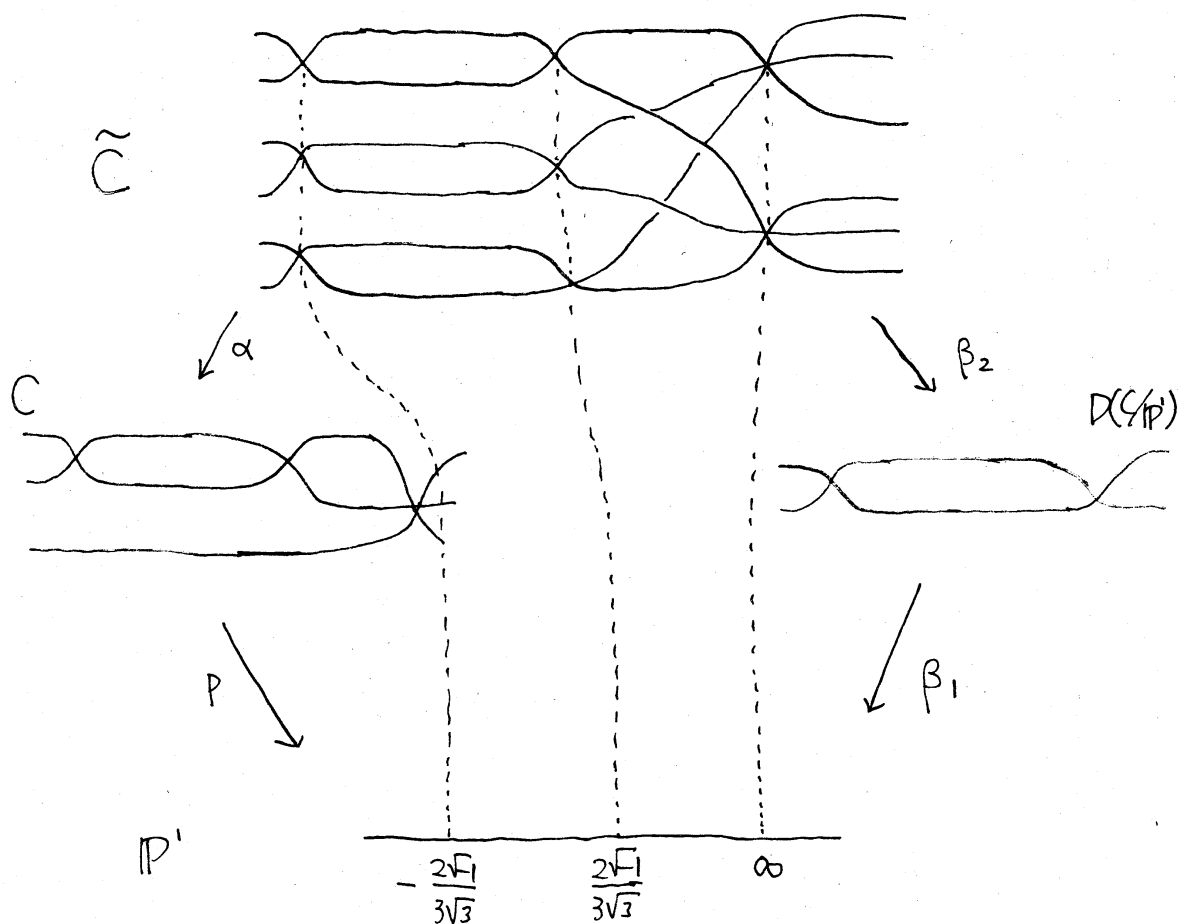
と表わされる.

(ii) order 3 の元: この automorphism を τ とする. これは $\tilde{C}$ の構成により, coordinate w を用いれば,

$$\tau: w \longmapsto \varepsilon w, \quad \varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$$

と表わされる.

以上により, $D(C/P)$, $\tilde{C}$, 及び $\text{Gal}(\mathbb{C}(\tilde{C})/\mathbb{C}(P))$ の action の状況が全てわかった. これを図で表わすと次のようになる.



Example 2 (Example 1 の corollary). P^2 は complex projective plane, $[Z_0 : Z_1 : Z_2]$ はその homogeneous coordinate とする. X は P^2 の finite triple cover で, その有理函数体は, $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(P^2)(\theta)$, 但し, θ は 3 次方程式,

$$X^3 + X + (Z_1/Z_0) = 0$$

の解とする。このとき、 X は、degree 3 の minimal rational ruled surface (i.e. $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3))$) の (-3) -section を contract として得られる normal surface で、1つの singularity をもっている。

上記の事実は、 $\mathbb{P}^2$ を $[0:0:1]$ で blowing-up して、問題を Example 1 に帰着させれば、容易にわかる。

次の Example は 2次元の典型的な non-Galois triple cover の例である。

Example 3. $X = \mathbb{C}^2$, $Y = \mathbb{C}^2$ とし、 $\pi: X \rightarrow Y$ を次の式で与える:

$$\begin{array}{ccc} \pi: X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, y) & \longmapsto & (u, v) = (xy, x^3 + y^3) \end{array}$$

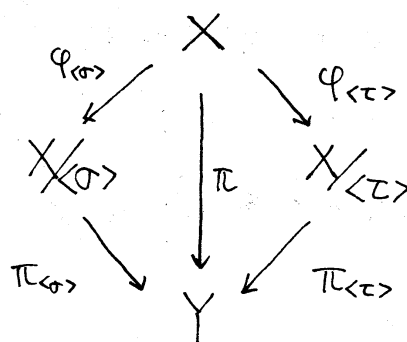
明らかに、 X は Y の Galois cover で、その Galois 群は S_3 に同型である。その action は、

$$\sigma: (x, y) \longmapsto (y, x)$$

$$\tau: (x, y) \longmapsto (\varepsilon x, \varepsilon y)$$

で与えられる. 但し, $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$, $G_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$, $\sigma^3 = \tau^3 = (\sigma\tau)^3 = 1$ とする.

$X/\langle \sigma \rangle$, $X/\langle \tau \rangle$ はそれぞれ G_3 の subgroup, $\langle \sigma \rangle$, $\langle \tau \rangle$ による quotient space とする. このとき, 次の図式は可換となる.



次に, $\varphi_{\langle \sigma \rangle}$, $\varphi_{\langle \tau \rangle}$, $\pi_{\langle \sigma \rangle}$, 及び $\pi_{\langle \tau \rangle}$ の ramification の状況調べるために, $\varphi_{\langle \sigma \rangle}$, $\varphi_{\langle \tau \rangle}$, $\pi_{\langle \sigma \rangle}$ 及び $\pi_{\langle \tau \rangle}$ を具体的に表わすと,

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi_{\langle \sigma \rangle}: X & \longrightarrow & X/\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{C}^2 \\
 \psi & & \psi \\
 (x, y) & \longmapsto & (z, w) = (x+y, xy)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{\langle \sigma \rangle}: X/\langle \sigma \rangle & \longrightarrow & Y \\
 \psi & & \psi \\
 (z, w) & \longmapsto & (u, v) = (w, z^3 - 3zw)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi_{\langle \tau \rangle} : X & \longrightarrow & X/\langle \tau \rangle \cong \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[t_1, t_2, t_3] / (t_3^2 - t_1 t_2)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x, y) & \longmapsto & (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3) = (x^3, y^3, xy) \\
 & & \left(\bar{t}_i \text{ は } \mathbb{C}[t_1, t_2, t_3] / (t_3^2 - t_1 t_2) \text{ での equivalence class を表す.} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{\langle \tau \rangle} : X/\langle \tau \rangle & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3) & \longmapsto & (u, v) = (\bar{t}_3, \bar{t}_1 + \bar{t}_2)
 \end{array}$$

Remark. 上記の $X/\langle \tau \rangle$ は, smooth ではなく, A_2 -singularity を持つ。

まず, π の ramification の状況を調べる. 簡単な計算により, π の ramification locus は, X 上, 方程式:

$$(y-x)(y-\varepsilon x)(y-\varepsilon^2 x) = 0, \quad \varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$$

を満たす点であることがわかる. これを R_π で表す. また,

R_π の π による image は 方程式:

$$\frac{v^2}{4} - u^3 = 0$$

を満たす. これを B_π で表す.

次に, $\varphi_{\langle \sigma \rangle}$ と $\pi_{\langle \sigma \rangle}$ の ramification の状況を調べる. 簡単な計算により, $\varphi_{\langle \sigma \rangle}$ の ramification locus は 方程式:

$$y - x = 0$$

12

を満たす. この $\varphi_{\langle \sigma \rangle}$ による image は, $X_{\langle \sigma \rangle}$ 上, 方程式

$$W - \frac{1}{4}Z^2 = 0$$

で与えられる. 同様に, $\pi_{\langle \sigma \rangle}$ の ramification locus は $X_{\langle \sigma \rangle}$ 上, 方程式,

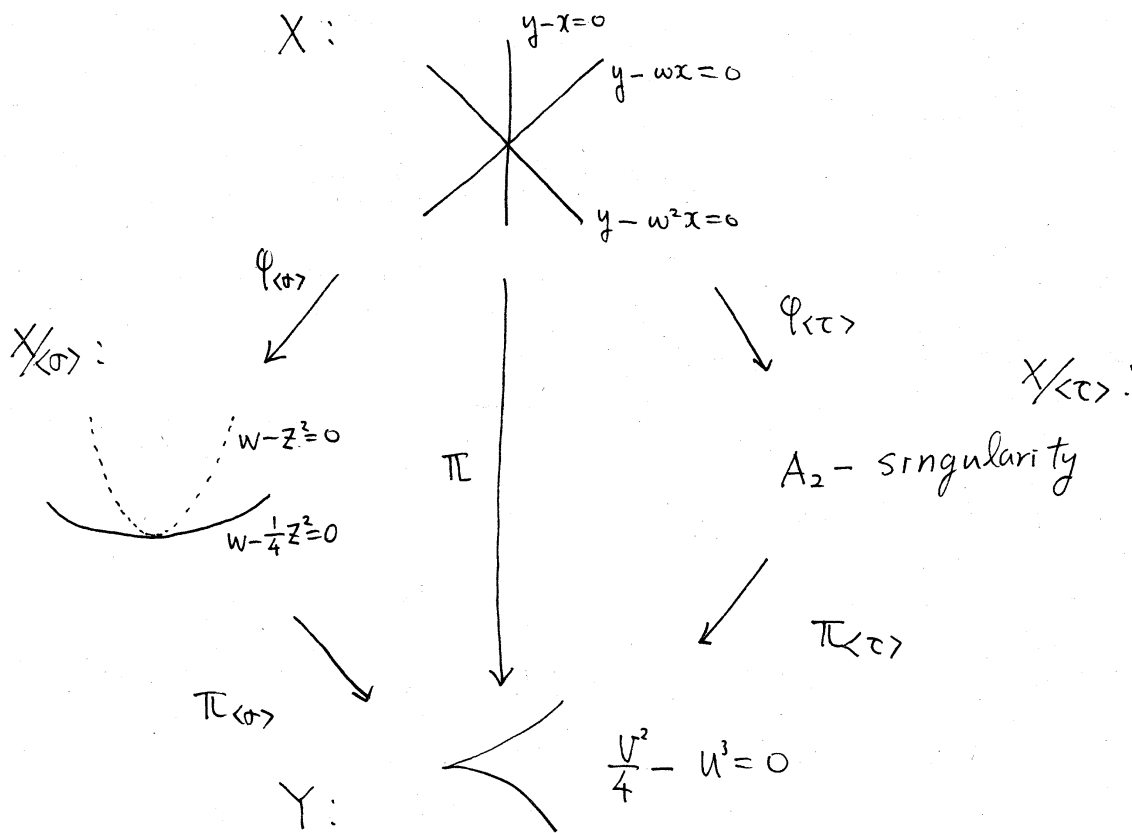
$$W - Z^2 = 0$$

で与えられることがわかる. さらに, $W - Z^2 = 0$ と $W - \frac{1}{4}Z^2 = 0$ の $\pi_{\langle \sigma \rangle}$ による image は, 共に方程式

$$\frac{V^2}{4} - U^3 = 0$$

で与えられる.

最後に, $\varphi_{\langle \tau \rangle}$ と $\pi_{\langle \tau \rangle}$ の ramification locus を調べる. $\varphi_{\langle \tau \rangle}$ の ramification locus は明らかに, $(0, 0)$ のみで, その $\varphi_{\langle \tau \rangle}$ による image は $X_{\langle \tau \rangle}$ の A_2 -singularity である. また, $\pi_{\langle \tau \rangle}$ の ramification locus は $(\pi^*(B_\pi))_{\text{red}}$ である. 以上の考察を図示すると, 次ページのようになり, $X_{\langle \sigma \rangle} \rightarrow Y$ が典型的な non-Galois triple cover の例となる.



§3. 代数曲面の3次被覆

この§では, smooth な代数曲面の間の finite triple cover $p: S \rightarrow \Sigma$ について考える. $\hat{S}$, $D(S/\Sigma)$ はそれぞれ §1 で定義されたものとする. まず, §2, Example 3 を少し一般化したものとして次の事実が成立する.

Proposition 3.1. $p: S \rightarrow \Sigma$ は smooth な代数曲面の間の finite triple cover とする. $\Delta(S/\Sigma)$ は p の branch locus とし, $\Delta(S/\Sigma)$ は既約で, 次のような type の singularities を

いくつかもっているものとする: $\Delta(S/\Sigma)$ の特異点のまわりでの
局所方程式は

$$x^2 + y^{3k} = 0, \quad k \text{ は自然数.}$$

により与えられる. (相異なる singularity に対しては, k は異なってもよいものとする.)

このとき, finite triple cover $p: S \rightarrow \Sigma$ の structure は次のとおりである.

(i) $D(S/\Sigma)$ は, $\Delta(S/\Sigma)$ 上で branch している Σ の double cover.

(ii) $\hat{S}$ は $D(S/\Sigma)$ の normal cyclic triple cover で, $\text{Sing}(D(S/\Sigma))$ 上でのみ, ramify しており, $\hat{S}$ の singularities は, A_{k-1} type である.

(iii) $\hat{S}$ 上に, involution τ が存在し, S は $\hat{S}$ の τ による quotient surface として得られる.

証明の point は, 次の3つの事実を用いる:

① $p_1: \hat{S} \rightarrow \Sigma$ の branch locus $\Delta(\hat{S}/\Sigma)$ と $\Delta(S/\Sigma)$ は一致する.

② A_{3k-1} - singularity の局所基本群は $\mathbb{Z}/3k\mathbb{Z}$ に同型である。

③ normal surface $\hat{S}$ の singularities は, hypersurface singularity である。

詳しくは, Tokunaga [5] を参照されたい。

次に, S, Σ のみならず, $\hat{S}$ も smooth となるときを考える。これについては部分的な結果であるが次の事実が成立する。

Theorem 3.2. $p: S \longrightarrow \Sigma$ は smooth な代数曲面の間の finite triple cover で, 次の条件 1) ~ 3) を満たしているものとする:

1) $\hat{S}$ は smooth な代数曲面。

2) Σ は minimal rational surface または, minimal abelian surface

3) $\kappa(S) = 2$ (κ は Kodaira 次元)

このとき, $p: S \longrightarrow \Sigma$ は, 次のうちのいずれかである。

(i) $p: S \longrightarrow \Sigma$ は cyclic cover.

(ii) $p: S \longrightarrow \Sigma$ は non-Galois,

(ii-a) $\Sigma := \text{abelian surface}$, $\mathbb{P}^2$ または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$\Delta(S/\Sigma)$ は Σ 上の irreducible divisor で, その singularities は全て $(2, 3)$ cusp. また, cusp の neighborhood での triple cover の structure は §2, Example 3 と同型にである.

(ii-b) $\Sigma := F_n (n \geq 2)$ ($\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$ -bundle で minimal なもの).

$\Delta(S/\Sigma)$ が irreducible な時.

この時は, (ii-a) と同じである.

$\Delta(S/\Sigma)$ が reducible の時.

$$\Delta(S/\Sigma) = S_0 + D$$

ただし, S_0 は Σ_n の $(-n)$ -section であり,

D は $a S_\infty$ (S_∞ は Σ_n の (n) -section, a は自然数) に linear equivalent な irreducible divisor で
その singularities は全て $(2, 3)$ cusp.

(a) $n = 2k$, k は自然数.

$\beta_1: D(S/\Sigma) \longrightarrow \Sigma$ は $\Delta(S/\Sigma)$ 上 branch した double cover.

$\beta_2: \hat{S} \xrightarrow{17} D(S/\Sigma)$ は, $\text{Sing}(D(S/\Sigma))$ 上で

のみ branch した cyclic triple cover. ($D(S/\Sigma)$ の singularity は全て A_2 -type).

(β) $n = 3k$, k は自然数.

$\beta_1: D(S/\Sigma) \rightarrow \Sigma$ は D 上 branch した double cover.

$\beta_2: \hat{S} \rightarrow D(S/\Sigma)$ は, $\beta_1^{-1}(s_0)$ と $\text{Sing}(D(S/\Sigma))$ 上 branch した cyclic triple cover.

証明の要点は次の3つである.

① $\hat{S}$ 上の ramification point の neighborhood (tangent space) での G_3 の action を調べ, 起こりうる ramification を全て分類する.

② $K(S) = 2$ という仮定より, $\Delta(S/\Sigma)$ は positive な divisor である.

③ Theorem 3.2. の仮定 2) に出てくる曲面上の disconnected な positive divisor を全て分類する.

詳しくは, Tokunaga [5] を参照されたい.

Remark. 講演のときの結果では, Theorem (ii-b) の場合が落ちていたので, 注意されたい.

References :

- [1] T. Fujita : Triple covers by smooth manifold, Preprint.
- [2] S. Iitaka : Algebraic Geometry, Springer, G.T.M. 76, 1982.
- [3] R. Lazarsfeld : A Barth-type Theorem for branched coverings of projective space, Math. ann. 249 (1980) 153-162
- [4] R. Miranda : Triple covers in algebraic geometry, Amer. J. Math. 107 (1985), 1123-1158
- [5] H. Tokunaga : Triple covering of algebraic surface according to Cardano formula, Preprint.