

力学系のカオス現象

京大・理 相 沢 洋 二

一見して極めて簡単な力学系モデルの解析を進めているカオス研究の目的意識の深奥を一口にして伝えることは困難であるが、次のような諸現象への興味との関連が認識されていてよいように思われる。熱平衡への接近、緩和、拡散過程の理解、プラズマを含む乱流化現象、開放系の諸現象、さらにゆらぎも含めたフラクタル的諸現象への興味である。その根底には、力学と確率、又は秩序と複雑さという一見背反的な認識の統合への努力が見られよう。

§ 1. 歴史的な事とこれからの興味

力学系のカオス軌道の存在は、制限三体問題に関して、ポアンカレによって発見された。その後、metric instability (Birkhoff), topological unstable orbit (Arnold) として再認識されて、その軌道の性質は力学系の構造と関連づけて研究されて来た。その間、resonance gap の非可積分性 (Siegel), invariant torus の存在 (Kolmogorov, Arnold, Moser) の理論 (摂動論) の発展があり、非線形現象の統一的理解が深められて来た。不安定帯の理論 (Melnikov, Arnold) 的手法が確立し、カオス軌道が実際に確率論的に認識し得ることが可能となった (Smale)。以上の過程で、カオスの研究は、エルゴード理論の発展に支えられると同時に、リャプノフ特性数 (Oseledec) のような新しいエルゴード概念の発明も刺激しつつある。誕生当所、天体の運動のような秩序の理解に向けられていた力学の興味がしだいに不規則な運動の理解へと向けられつつある。力学系カオスの軌道が、どれだけ複雑なものを含んでいるのかは、今後の研究にまたねばならないが、そこに共存する秩序と複雑さの両面の理解が全き力学研究の疑いのない方向である。

その両面性を把えるにあたり次の二つの典型的な問題が考えられる。一つは構造安定性の問題：パラメータ空間中で与えられた力学系の軌道は、完全可積分であったりカオスであったりする。その中で可積分の場合は無数にあるが、その measure は零である (Zehnder)。パラメータ変化に伴う分岐現象を調べるのが第一である。第2は相空間の棲み分けの問題：初期点に応じて力学系の軌道は秩序的であったりカオスであったりする。力学系は一般に無数のエルゴード成分を有する heterogeneous な構造をもつ。各成分の interplay としてカオスの多様性、普遍性を理解することが第二である。

§ 2. 可積分性とエルゴード性の判定規準

一つの力学系が与えられたとき、上の判定はどのようになされるか。有意義な運動の恒量の発見は多くの場合隠れた対称性を見つけることであり、今のところ複素平面上の特異点に注目して (Painlevé 性)、逆に恒量を発見する試みが成功している。一方、至るところ homoclinic point が稠密に存在する C-系を除いて、后者の判定は成功していない。カオスの解析で使われるリャプノフ指数の positiveness (弱 C-系) についても、一つのカオスタイプを分類する上で一応の判定規準として有効であるが厳密な意味では未だ open である。実際、リャプノフ指数が零でもカオスがある。これらの示す理論の不完全さは、我々の現在もっている複雑度を測る尺度の不完全さを示すもので、むしろ将来への期待を大きくするものとして受けとめるべきであろう。かつて統計力学の基礎づけを、力学のリーマン幾何学化とそこでの曲率の negativity に求めたクリロフの夢は厳密な意味では不完全であることが明らかにされたが、その過程で K-系 (Kolmogorov, Sinai) の分類が可能となっただけである。夢は夢として終わってもそこで芽ばえた新概念の成長こそ期待したいものである。最近、或る種の平均曲率の振舞いが可積分系とカオス系において著しく異なることがわかってきた (Aizawa)。これもクリロフのプランの延長上にある。

カオスの判定規準はほとんどの場合、軌道の不安定性 (metric instability) として捉えられている。しかし、軌道の複雑さはさらに進んで、軌道同士の絡み合いの複雑さとして捉えることも大切である。さらに力学系に無数に共存する測度の協調・拮抗の複雑さもカオスの多様性の理解にとって重要であることが知られて来た。その一例として間欠性カオスは、共存する測度が $\aleph_1$ の (もしくは観測可能な) 測度の座を競争することにより生じる広い意味の非定常過程 (f^n スペクトルをもつ) である。これらは筆者が最近興味をひかれているテーマであるが、この他にも metric な立場及び topological な立場からカオスの特徴づけようとする変分原理 (Takahashi) などカオスの複雑さの深奥を意識化してゆく試みが積極的に進められている。