

離散群の S^1 への作用について

日大理工 松元重則 (Shigenori Matsumoto)

§1. 序文

本稿の目的は 離散群 Γ の S^1 への連続的作用を調べることである。 $G = \text{Homeo}^+(S^1)$ を、 S^1 の、向きを保つ同相写像全体の群を表わすこととする。このとき上記の作用は、準同型 $\phi: \Gamma \rightarrow G$ と考えられる。従って我々の目標は、準同型 $\phi: \Gamma \rightarrow G$ の定性論的研究であると言い直すことができる。

$\Gamma = \mathbb{Z}$ の特別な場合には、準同型 ϕ は、さらに、同相写像 $f = \phi(1)$ により、定まるわけだから、 ϕ の研究とは、とりも直さず 単一の元 $f \in G$ の研究にすぎない。この場合には、すでに Poincaré により、満足 of いく結果が、得られている。

いま、 $\overline{G}$ を、 G の普遍被覆群を表わす。 $\overline{G}$ は、具体的には、 $\mathbb{R}$ の同相写像 f を、 $f \circ T = T \circ f$ を満たすものの群

群がある。被覆準同型 $\pi: \bar{G} \rightarrow G$ は、被覆写像 $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ に付随して定まる。このとき

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \bar{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

なる中心拡大が得られたわけである。 $\mathbb{Z}$ の生成元は T_1 である。すなわち、 $T(x) = x + 1$ とある。

G の元 f に対し、それを被覆する $\bar{G}$ の元 $\bar{f}$ をひとつ定め、 $\bar{f}$ とおこう。このとき、 $x \in \mathbb{R}$ に対し、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \bar{f}^n(x)$$

は定まり、しかも x に依存しない。この数を $\bar{f}$ の 移動数 と呼び、 $\text{trans}(\bar{f})$ で表わす。 G の元 f に対しては、 $\bar{f}$ のとり方により、 $\text{trans}(\bar{f})$ は異なる。しかし、 $\frac{1}{n}$ の違いは、整数の差のみである。よって

$$\text{rot}(f) = \text{trans}(\bar{f}) \bmod 1 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

とおけば、これにより、 f の 回転数 $\text{rot}(f)$ が定まる。

このとき、本質的に Poincaré による次の定理が成り立つ。

定理 (Poincaré) $f_1, f_2 \in G$ に対し

$$f_1 \text{ と } f_2 \text{ が 半共役} \iff \text{rot}(f_1) = \text{rot}(f_2)$$

半共役という概念は通常、連続写像による共役の意味で

用いられ、これは、同値関係ではない。しかし、その生成する同値関係を考えることはできる。ここでは、この意味とする。しかし実は、 S^1 の場合は、後に、定義するように、DOM 写像なる概念を用いての容易な特徴づけがある。

本稿の主目的のひとつは、Poincaré の定理の、一般の離散群 Γ の表現への拡張であるところの Ghys の定理の解説であり、これは §2 にま行われる。しかし、それから、これに際し、回転数に変わるものは、(通常、無限次元の) Banach 空間に値をとり、計算困難である。しかし、ここから数値的不変量をひきだすことができる。これを、§3 にま解説する。§4 で、様々な応用を紹介する。

§2. 有界オイラー類と半共役

(定義 1) 写像 $h: S^1 \rightarrow S^1$ が DOM (degree one monotone) とは、 h の持ち上げ、 $\tilde{h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を、単調増加 (広義) が T と可換なものがあることとする。(h は連続でなくとも良い。)

(定義 2) $\phi_1, \phi_2: \Gamma \rightarrow G$ において ϕ_1 と ϕ_2 が半共役とは、DOM h が存在して、 $\phi_1(\gamma)h = h\phi_2(\gamma)$, $\forall \gamma \in \Gamma$ を満たすこととする。

以下準同型 $\phi: I \rightarrow G$ は、しばしば I -作用 $\Gamma \times S^1 \rightarrow S^1$ と、みなされる。 ϕ の固定点、同期点、極小集合等は、このように、作用とみなしたときの意味に用いられる。以下の諸注意はすべて簡単に証明できることばかりである。

(注1) 半共役は同値関係である。

(注2) ϕ_1, ϕ_2 ともにすべての軌道が S^1 上稠密である。

このとき、 ϕ_1 と ϕ_2 は半共役ならば、位相共役である。

(注3) ϕ_1 と ϕ_2 が、同じ同期の同期軌道を持ち、しかも ϕ_1 の同期軌道から ϕ_2 の同期軌道へ、順序を保つ同変全単射が存在するならば、 ϕ_1 と ϕ_2 は半共役である。

次に、 $I = \mathbb{Z}$ のときの回転数が、どう拡張されるかを、述べなくてはならない。それは有界 Euler 類という姿をとるわけであるが、この値をとる場所は、 I の有界コホモロジー群である。まず、これから解説しよう。係数 A は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{Z}$ とする。 I の普通のコホモロジーは、余鎖複体 $\{C^n, \delta^n\}$ からつくられる。ここに

$$C^n = C^n(I; A) = \{u: I^n \rightarrow A, \text{写像}\}$$

$$\delta^n: C^n \rightarrow C^{n+1} \text{ は,}$$

$$(\delta^n u)(x_1, \dots, x_{m+1}) = u(x_2, \dots, x_{m+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i u(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + (-1)^{n+1} u(x_1, \dots, x_n)$$

に定義される。さて、 C^n の部分加群

$$C_b^n = \{u: P^n \rightarrow A \mid \text{Im}(u) \text{ は有界}\}$$

を考えると、部分複体 $\{C_b^n, \delta^n\}$ を得る。このコホモロジーとして、有界コホモロジー $H_b^n(P; A)$ が定義される。有界コホモロジーは、普通のコホモロジーとかなり趣きを異にしている。以下に、いくつかの結果を挙げておく。

(例1) $H_b^1(P; A) = 0$ が、すべての群 P について

成り立つ。

(例2) P が、アメナブル群ならば、 $H_b^n(P; \mathbb{R}) = 0$

(例3) Σ を、双曲的曲面とすれば、 $H_b^2(\pi_1(\Sigma), \mathbb{R})$ は、無限次元 Banach 空間* ([B-S], [M-H])

(例4) $H_b^2(G; A) = A$, $H_b^2(\text{PSL}_2(\mathbb{R}); A) = A$ ([M-M])

有界コホモロジーについての、包括的取扱いについては [Gr] を参考されたい。面白いのは、例3のように、自由群に近いような群については、通常のコホモロジーに較べ、爆発的に大きくなるが、例4のような、代数的に、精密な群については、逆に小さくなるということである。($\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ の通常のコホモロジーは、Sah-Wagonerにより計算されているがこれは大変大きい。)

*) 実は $H_b^n(P; \mathbb{R})$ には pseudo-norm が定義される。

また、係数の完全系列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ は、有界コホモロジーの完全系列を生むが、これと(例1), (例2)を合せると次を得る。

$$(例5) \quad H_b^2(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

有界コホモロジーの話は、これくらいにして、次に有界オイラー類に移ろう。被覆準同型 $\pi: \bar{G} \rightarrow G$ の切斷として $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ を考える。(もちろん準同型ではない。) σ が 有界 とは、 $\sigma(f)(0)$ が有界のこととする。有界切斷 σ に対し、 $C_\sigma(f, g) = \sigma(fg)^{-1} \sigma(f) \sigma(g) \in \mathbb{Z}$ に定義するとき、次が直ちにわかる。

(1) C_σ は、有界 2-コ

(2) $[C_\sigma] \in H_b^2(G; \mathbb{Z})$ は、 σ によらない。

$\chi_{\mathbb{Z}} = [C_\sigma]$ のことを $\mathbb{Z}$ -係数有界 Euler 類 という。

C_σ はまた、 $H_b^2(G; \mathbb{R})$ の元を定めるが、これを $\chi_{\mathbb{R}}$ と書き、 $\mathbb{R}$ -係数有界 Euler 類 という。また C_σ は $H^2(G; \mathbb{Z})$ の元 e をも、定める。これは 普通の Euler 類 である。

位相幾何的には、 $\phi: I \rightarrow G$ による準同型により、Eilenberg-MacLane 空間 $K(I, 1)$ 上に S^1 束が定まるが、 ϕ の Euler 類は $\phi^*(e)$ で与えられる。

定理 (Ghys [Gh]) $\phi_i: \mathbb{Z} \rightarrow G$ に対し
 ϕ_1 と ϕ_2 が半変換 $\Leftrightarrow \phi_1^*(\alpha_{\mathbb{Z}}) = \phi_2^*(\alpha_{\mathbb{Z}})$ in $H_b^2(P; \mathbb{Z})$

(注) $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow G$ に対し、同一視 $H_b^2(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ のもと、
 $\phi^*(\alpha_{\mathbb{Z}})$ は、 $\text{rot}(\phi)$ に一致する。

従って $\phi_i^*(\alpha_{\mathbb{Z}}) = \alpha$ 、同変数の拡張である訳だが、その
 値域 $H_b^2(P; \mathbb{Z})$ は前にもみたように一般に巨大であり、計算は
 普通、容易でない。そこでこれを少しでも取り扱えやすく
 しようとする試みを、次の章で述べる。

§3. 数量的不変量

$\{\lambda_i\} \subset \mathbb{R}$ を、その類が、 $\mathbb{R}/[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$ を生成するものとし、
 (対応する準同型 $\bigoplus_i \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/[\mathbb{P}, \mathbb{P}]$)
 を、若干の混同により $\bigoplus \lambda_i$ で表す。一方、完全系列
 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ により、有界コホモロジーの完全系列が得ら
 れるが、ここからは、次の可換図式を作る。

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}(\mathbb{R}/[\mathbb{P}, \mathbb{P}]; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H^1(P; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta^*} & H_b^2(P; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_b^2(P; \mathbb{R}) \\
 (\oplus \lambda_i)^* \downarrow & & \downarrow \oplus \lambda_i^* & & \downarrow \oplus \lambda_i^* \\
 \text{Hom}(\bigoplus_i \mathbb{Z}; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_i H^1(\mathbb{Z}; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \bigoplus_i H_b^2(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \\
 & & & & \parallel \\
 & & & & \bigoplus_i \mathbb{R}/\mathbb{Z}
 \end{array}$$

さて、ここで、一番左の下向きの矢は単射である。このことから、
 $H_b^2(P; \mathbb{Z})$ の α に対し、 $\alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda_i^*(\alpha) = \mathbb{Z}(\alpha) = 0$ 。

がわかる。これを $\phi_i: \Gamma \rightarrow G$ に対する $\phi_i^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ の一致の問題に適用して、次を得る。

$$\phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{Z}}) \iff \begin{cases} \lambda_1^* \phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}}) = \lambda_2^* \phi_2^*(\chi_{\mathbb{Z}}) \\ \tau \phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}}) = \tau \phi_2^*(\chi_{\mathbb{Z}}) \end{cases}$$

また、 $\tau = \tau'$, 同-視 $H_b^2(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ のもと、 $\lambda_i^* \phi_i^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ は $\text{rot } \phi(\chi_i)$ に一致する。 $(\lambda_i$ は対応する生成元) また $\tau \phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ は $\phi_1^*(\chi_{\mathbb{R}})$ に他ならない。以上より、次を得る。

定理1 $\gamma_i \in \Gamma$ も, $[\Gamma, \Gamma] \in \text{核}$ とする生成元とする。

$\phi_1, \phi_2: \Gamma \rightarrow G$ に対し、 ϕ_1 と ϕ_2 が半同役となるのは、
 $\text{rot } \phi_1(\gamma_i) = \text{rot } \phi_2(\gamma_i) \quad (\forall i)$ かつ $\phi_1^*(\chi_{\mathbb{R}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{R}})$ in $H_b^2(\Gamma; \mathbb{R})$
 が成り立つときである。

系2 Γ が完全ならば、 ϕ_1 と ϕ_2 が半同役 $\iff \phi_1^*(\chi_{\mathbb{R}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{R}})$

系3 Γ が amenable ならば、 ϕ_1 と ϕ_2 が半同役 $\iff \text{rot } \phi_1(\gamma_i) = \text{rot } \phi_2(\gamma_i)$

続ける、 $\phi^*(\chi_{\mathbb{R}})$ を調べる。今 $f, g \in G$ に対し、 χ の持ち上げ $\bar{f}, \bar{g} \in \bar{G}$ をとり、

$$\tau(f, g) = \text{trans}(\bar{f}) + \text{trans}(\bar{g}) - \text{trans}(\bar{f}\bar{g})$$

は、持ち上げによらずに定まる実数である。

τ は、実は有界 π -コサイクル になり、 χ_R を代表する π とかいはかるが、更に、

$$\begin{aligned} \text{定理 4} \quad \phi_1, \phi_2: I \rightarrow G \text{ に対し, } \phi_1^* \chi_R &= \phi_2^* \chi_R \\ &\Leftrightarrow \phi_1^\# \tau = \phi_2^\# \tau. \end{aligned}$$

つまり、コホモロジー類の一致が、 χ_R を代表する π とあるコサイクルの一致により、測られるという訳であるが、もちろん普通のコホモロジー理論では、見られない現象であり、有界コホモロジーに特有のことである。 τ を、標準オイラー-コサイクルと呼ぶ。さて、定理 1 と 定理 4 を併せると、

$$\begin{aligned} \text{定理 5} \quad \text{ふたつの準同型 } I \rightarrow G \text{ が } \pi \text{ 共役} \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1) [I, I] \text{ を法とする生成元と回転数が一致} \\ 2) I \text{ の任意の 2 元 に対して } \tau \text{ の値が一致} \end{array} \right. \end{aligned}$$

さて、次に、定理 5 の分解において $\tau \equiv 0$ となるような表現を考えよう。このような表現は、カテゴリーとして簡単な構造を持つと推察されるが、その特徴づけが、次の定理 6 である。

定理6 Γ を有限生成群, $\phi: \Gamma \rightarrow G$ を準同型とすると,
次は、同値である。

- (1) $\tau(\phi(\gamma), \phi(\gamma')) = 0 \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma$
- (2) ϕ は、平行移動だけの部分群への準同型と半共役
- (3) ϕ の作用は、極小集合上局所ホロミーがない。
- (4) ϕ の作用は、不変測度をもつ。

定理7 定理6と同じ仮定の下で次は同値である。

- (1) $\phi^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ は位数有限
- (2) ϕ の作用は、有限軌道をもつ。

§4. 応用

前に述べたように、[M-M] に、 $H_b^2(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$,
 $H_b^2(\mathrm{PSL}_2 \mathbb{R}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ が、示されている。この事実、 $\phi^*(\chi_{\mathbb{Z}})$
の受け皿の小ささを表わし、§2 の G-flys の定理と照らし合せ、
 ϕ の小ささを示唆している。実際、

定理8 $\mathrm{PSL}_2 \mathbb{R}$ から G への準同型写像は、零かまたは、 S^1 上の (向きを保つとは限らない) 同相写像による共役がある。

定理 9 G から G への準同型は、零か、または S^1 上の同相写像による共役である。

二二に、「準同型」とは単なる代数的準同型であり、Lie 群としてのものではない。なお定理 9 は、同型写像に限れば、Whittaker の定理の特別な場合にすぎないが、同型でなければ零であるという部分は著者の知る限り新しい。

二二の応用例に移ろう。二二では、 Σ も、種数 2 以上の有向閉曲面とし Γ をその基本群とする。 $e \in H^2(G; \mathbb{Z})$ を、二二で扱った普通の Euler 類とする。 $\phi: \Gamma \rightarrow G$ に対し

$$eu(\phi) = \langle \phi^*, [\Sigma] \rangle$$

の二とを、 ϕ の Euler 数という。(我々は $H^*(\Gamma; \mathbb{Z})$ と $H^*(\Sigma; \mathbb{Z})$ を同一視している。) $eu(\phi)$ は、また、

$\phi: \Gamma \rightarrow G$ に付随した (葉層) S^1 束のいわゆる Euler 数と一致している。このとき、つねに、

$$(*) \quad |eu(\phi)| \leq -\chi(\Sigma)$$

が成立すること、よく知られている。(Milnor-Wood の不等式) それでは、(*)において等号成立のとき、 ϕ はいかなる制約を受けるであろうか。これについての解答が次の定理 10 である。

定理 10 $\phi_1, \phi_2: \Gamma \rightarrow G$ に $eu(\phi_1) = eu(\phi_2) = \pm \chi(\Sigma)$ とすれば, ϕ_1 と ϕ_2 は共役である。

定理 11 定理 10 に, $G \in S^1$ の有向 C^2 微分同相のつくる群 $\text{Diff}_+^2(S^1)$ におきかえれば, 結論において, ϕ_1 と ϕ_2 は位相共役となる。

(注) $|eu(\phi)| < \chi(\Sigma)$ のときには, このような結論は全く期待できない。§2 で述べたように $H_b^2(P; \mathbb{Z})$ は無限生成であることも符号して、極めて沢山の準同型の存在が示される。また定理 11 は, この場合には ϕ の各軌道が S^1 と稠密であるという Gryn's の定理 ([Gr']) を利用し, §2 (注 2) により示される。

系 12 $\phi: \Gamma \rightarrow G$ に $eu(\phi) = \pm \chi(\Sigma)$ ならば, ϕ は, G への忠実離散表現である。

系 13 Σ 上の単位接束 $T_1(\Sigma)$ の中の, C^2 級で横断的に有向な, 余次元 1 葉層構造は, コンパクト葉 E もたなければ同相写像を除いて一意に定まる。

系 13 は, そのような葉層構造は, 各ファイバーに横断的で

あるいは、イトー^oマミという Thurston の定理と、定理 11 を結びつけることにより得られる。而来、コンパクト葉を持たない葉層構造を許さない 3-多様体の例は多数知られている。(Novikov, Plante) 他方、そのようなものを数多く許す多様体も沢山ある。系 13 によれば、 $T_1(\Sigma)$ は、丁度一つしか許さないということであり、このような多様体の存在は、大変面白いと思われる。

REFERENCES

- [B-S] Brooks, R.-Series, C., Bounded cohomology of surface groups, *Topology* 23 (1984) 29-36
- [Gh] Ghys, E., Groupes d'homeomorphismes du cercle et cohomologie bornée, Preprint, Lille
- [Gh'] Ghys, E., Classe d'Euler et minimal exceptionnelle, *Topology* 26 (1987) 93-106
- [Gr] Gromov, M., Volume and bounded cohomology, *Publ. I.H.E.S.*, 56(1982) 5-100
- [Ma] Matsumoto, S., Numerical invariants for semi-conjugacy of homeomorphisms of the circle, *Proc. A.M.S.* 98(1986)163-168
- [Ma'] Matsumoto, S., Some remarks of foliated S^1 bundles, to appear in *Inv. Math.*
- [M-M] Matsumoto, S., -Morita, S., Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms of the circle, *Proc. A.M.S.*, 94(1985) 539-544
- [Mit] Mitsumatu, Y., Bounded cohomology and ℓ^1 -cohomology of surfaces, *Topology* 23(1984) 465-471

- [S-W] C.-H., Sah and J.B.Wagoner, Second homology of Lie groups made discete, Comm.Algebra 5(1977) 611-642
- [T] Thurston, W., Foliations of 3-manifolds which are fiber bundles, Theses Berkley
- [W] Whittaker, J.V., On isomorphic groups and homeomorphic spaces. Ann.Math. 78(1963) 74- 91
- [W] Wood, J.W., Bundles with totally disconnected structure group, Comm.Math. Helv.46(1971) 257-273