

不良品の見落としがある検査について

長岡技術科学大学 藤野和建

製品ロットの検査で、検査方法が不完全なために不良品の見落としがふくるとき、この見落としの確率と、見落されて市場にでる不良品の個数を推定する方法を論ずる。

この2つの量が推定できるためには、いくつかの製品が少なくとも2度検査される必要がある。ここではまず、最初の検査で良品とされにもう一度を再検査する場合を論じ、次に全製品を再検査する場合を考える。

1. 良品のみ再検査の場合

N 個の製品よりなるロットを全数検査し、そこで良品とみなされにもう一度を再度検査する。

不良品の総数が M で、そのそれぞれの検出される確率が一定値 θ に等しいとすれば、1回目、2回目の検出される不良品の個数 x_1, x_2 の同時分布は

$$P(x_1, x_2; y, \theta) = \frac{M!}{x_1! x_2! y!} \theta^{x_1} (\theta\tau)^{x_2} (\tau^2)^y \quad (1)$$

となる。ただし、 $\tau = 1 - \theta$ で、 $y = M - x_1 - x_2$ は2回とも見落された不良品の数を表わす。

ここで $m = x_1 + x_2$ とし, $p(x; n, p)$ を 2 項分布の確率とすれば, (1) は

$$p(x_1, x_2; y, \theta) = p(x_2; m, \gamma_1) p(m; M, \gamma_2)$$

$$\text{ただし, } \gamma_1 = \tau / (1 + \tau)$$

$$\gamma_2 = 1 - \tau^2$$

と, m の分布と, m を与えられたときの x_2 の条件付分布に分解される。

これから, $\hat{\gamma}_1 = x_2 / m$, したがって

$$\hat{\theta}_c = (x_1 - x_2) / x_1 \quad (2)$$

となり, さらに $\hat{\gamma}_2 = (x_1^2 - x_2^2) / x_1^2$ から

$$\hat{M}_c = [m / \hat{\gamma}_2] = [x_1^2 / (x_1 - x_2)] \quad (3)$$

$$\hat{y}_c = \hat{M}_c - m = [x_2^2 / (x_1 - x_2)]$$

となる。ここに $[x]$ は x を超えない最大の整数を示す。

この条件付最尤法は Sanathanan (1972) による。

1.1 最尤推定

(1) を θ で微分して 0 とおくと

$$\hat{\theta}' = m / (m + x_2 + 2y) \quad (4)$$

となる。これを (1) の θ に代入すると y の尤度が得られるがそれは次の形となる。

$$l(y; x_1, x_2) = \log p(x_1, x_2; y, \hat{\theta}')$$

$$\begin{aligned}
&= \log((m+y)!) - \log(y!) \\
&\quad + (x_2 + 2y) \log(x_2 + 2y) \\
&\quad - (m + x_2 + 2y) \log(m + x_2 + 2y) + \text{const.}
\end{aligned}$$

この値を最大にする 整数 $\hat{y}$ が y の最尤推定量で, θ の最尤推定量は $\hat{y}$ を (4) に代入して得られる。

$\hat{y}$ については次の定理が成立つ ($m \geq 1$)。

定理 $x_2 \geq x_1 + 2$ のとき, y には有限な最尤解が存在しない。 $x_2 < x_1 + 2$ では有限な解が存在して $\hat{y} \leq \max(0, y_0)$ となる。ここに y_0 は $(2x_2^2 + x_1x_2 - 2x_1 - 4)/2(x_1 - x_2 + 2)$ を下まわらない最小の整数を意味する。

データが与えられたとき, $\hat{y}$ を求めるのは幾分面倒であるが

$$\hat{y}^* = \left[(x_2 - 1)^2 / (x_1 - x_2 + 2) \right] \quad (5)$$

が $\hat{y}$ に対する満足すべき近似値を与える。

1.2 推定量の性質の数値的な検討

最尤推定量と条件付き最尤推定量はそれぞれ $x_2 \geq x_1 + 2$ および $x_2 \geq x_1$ で存在したがるが, このことのおこる確率は M と θ がある程度大きければ小さい。たとえば $M = 20$, $\theta = 0.7$ では, それぞれ 0.002 および 0.009 であって, 実際上無視できる大きさになる。

次に各推定量の，それらが有限になるという条件のもとでの平均と分散を， $M = 20, 50, 100$ ， $\theta = 0.1 (0.1) 0.9$ の場合について求め，比較してみた。

M の推定量では， $\hat{M}$ の方が $\hat{M}_c$ よりも， θ がより程度大きいときには偏りが小さく，分散もまた小さい。一方， θ の推定については， $\hat{\theta}_c$ よりも $\hat{\theta}$ の方が幾分偏りが小さくなる。ただし，分散は $\hat{\theta}_c$ の方が多分大きい。

1.3 不良品の検出確率が変動する場合

不良品の検出される確率が，不良品ごとにことなるものとして，この確率 θ_i ($i = 1, 2, \dots, M$)が，互いに独立に同一の分布に従う確率変数 $(H)_i$ の実現値であるとする。

このとき，事象

不良品 $1, \dots, x_1$ は第1回目に検出

不良品 $x_1 + 1, \dots, m$ は第2回目に検出

不良品 $m + 1, \dots, M$ は検出されない

の， $(H)_i = \theta_i$ ($i = 1, \dots, M$) という条件のもとでの確率は

$$\prod_{j=1}^{x_1} \theta_j \cdot \prod_{j=x_1+1}^m \theta_j (1-\theta_j) \prod_{j=m+1}^M (1-\theta_j)^2$$

となる。

ゆえに，この事象の無条件の確率は

$$\{E(\Theta)\}^{x_1} \{E(\Theta(1-\Theta))\}^{x_2} \{E(1-\Theta)^2\}^y$$

となる。

このことから、1回目、2回目の検査で検出される不良品の個数 x_1, x_2 の分布は

$$p(x_1, x_2)$$

$$= \frac{M!}{x_1! x_2! y!} \{E(\Theta)\}^{x_1} \{E(\Theta(1-\Theta))\}^{x_2} \{E(1-\Theta)^2\}^y \quad (6)$$

で与えられる。

ここで

$$E(\Theta) = \theta, \quad \text{var}(\Theta) = \sigma^2$$

とすれば、(6)は

$$p(x_1, x_2)$$

$$= \frac{M!}{x_1! x_2! y!} \theta^{x_1} (\theta\tau - \sigma^2)^{x_2} (\tau^2 + \sigma^2)^y \quad (7)$$

と書かれる。こうして、 $\sigma^2 = 0$ の場合とくらべ、 x_2 の周辺分布が小さい方に偏ることから知られる。

(7) を

$$p(x_1, x_2) = p(x_2; m, \gamma_1^*) p(m; M, \gamma_2^*)$$

$$\gamma_1^* = \frac{\theta\tau - \sigma^2}{\theta(1+\tau) - \sigma^2}$$

$$\gamma_2^* = 1 - \tau^2 - \sigma^2$$

と書きなおすと、

$$\gamma_1^* \leq \gamma_1, \quad \gamma_2^* \geq \gamma_2$$

となるから、 $\sigma^2 = 0$ の場合にくらべ、 m は小さくなり易く、 M の推定量は小さくなり易く、 θ の推定量は大きくなり易いことがわかる。

1.4 採取検査の場合

ロットサイズ N があまりに大きければ、そのうちの n 個を採取して上述の検査をする。

この場合、採取される n 個のサンプルの中の不良品の個数を M^* とすれば、 x_1, x_2 の分布は、 $h(x; n, M, N)$ を超幾何分布の確率として

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) \\ = h(M^*; n, M, N) p(x_1; M^*, \theta) p(x_2; M^* - x_1, \theta) \end{aligned}$$

となる。

条件付最尤法では

$$\begin{aligned} \hat{M}_c^* &= [x_1^2 / (x_1 - x_2)] \\ \hat{\theta}_c &= (x_1 - x_2) / x_1 \\ \hat{M}_c &= [\hat{M}_c^* (N+1) / n] \end{aligned} \tag{8}$$

となる。

これらの推定量の性質の数値的な検討は主に記されている。

2. 200%検査の場合

次に、1回目に不良品とされたものを含め、すべての製品を再検査する場合を考える。

不良品の総数を M 、そのそれぞれの検出される確率が一定値 θ とし、1回不良品とされたものの個数を z_1 、2回不良品とされたものの個数を z_2 とすれば、これらの同時分布は

$$p(z_1, z_2; y, \theta) = \frac{M!}{z_1! z_2! y!} (\theta^2)^{z_2} (2\theta\tau)^{z_1} (\tau^2)^y \quad (9)$$

となる。ここに、 $\tau = 1 - \theta$ 、 $y = M - z_1 - z_2$ 。

ここで $m = z_1 + z_2$ とすれば (9) は

$$p(z_1, z_2; y, \theta) = p(z_2; m, \gamma_1) p(m; M, \gamma_2)$$

$$\text{ただし} \quad \gamma_1 = \theta / (1 + \tau)$$

$$\gamma_2 = 1 - \tau^2$$

と表わされる。

これから、条件付最尤推定量として、

$$\hat{\theta}_c = 2z_2 / (z_1 + 2z_2)$$

$$\hat{M}_c = m + [z_1^2 / 4z_2] \quad (10)$$

$$\hat{y}_c = [z_1^2 / 4z_2]$$

が得られる。

これらは $z_2 > 0$ で存在する。

2.1 最大推定

y と θ の対数尤度は,

$$\begin{aligned} l(y, \theta; z_1, z_2) &= \log((m+y)!) - \log(y!) \\ &\quad + (z_1 + 2z_2) \log \theta + (z_1 + 2y) \log \tau + \text{const} \end{aligned} \quad (11)$$

と表す。 $\partial l / \partial \theta = 0$ から

$$\hat{\theta}' = (z_1 + 2z_2) / 2(m+y) \quad (12)$$

を得る。これを (11) の θ に代入して, y のみの対数尤度は

$$\begin{aligned} l(y; z_1, z_2) &= \log((m+y)!) - \log(y!) \\ &\quad + (z_1 + 2y) \log(z_1 + 2y) \\ &\quad - 2(m+y) \log\{2(m+y)\} + \text{const} \end{aligned} \quad (13)$$

と表す。

$$\begin{aligned} l'(y; z_1, z_2) &= \frac{1}{y+1} + \cdots + \frac{1}{y+m} - 2 \log \left\{ \frac{2(m+y)}{z_2 + 2y} \right\} \\ &= -\frac{z_2}{y} - \frac{z_1^2 - 2m(m-1)}{4y^2} + O(y^{-3}) \end{aligned}$$

だから, $z_2 > 0$ なら y の有限な最大解が存在する。

$z_2 = 0$ のとき, $z_1 = 0$ なら解は不変, $z_1 = 1$ なら $\hat{y} = 0$,

z_1, z_2 では有限な解が存在しない。

最大解は

$$\hat{\gamma}^* = [z_1, (z_1 - 2) / 4z_2]$$

できめよく近似される。

2.2 推定量の性質の数値的な検討

$z_2 = 0$ のときには条件付最尤推定量が存在しないが、この確率 $(1 - \theta^2)^M$ は、 M が与える程度大きければきめよく小さい。

次に、 $z_2 > 0$ という条件のもとでの各推定量の平均と分散を、§1.2 と同じ M と θ の組合せについて調べてみる。

M の推定量、 θ の推定量とも、最尤推定量と条件付最尤推定量の間に大きな差異はみられない。いづれにせよ、さきの一見良品とよみにもりのみと肉検査する場合にくらべ、偏りも小さく、分散も少ない推定量が得られることは注目になる。

2.3 1 良品の検出確率の変動する場合

§1.3 と同じモデルのもとで、 z_1, z_2 の同時分布は

$$p(z_1, z_2) = p(z_2; m, \gamma_1^*) p(m, M, \gamma_2^*)$$

$$\text{よって} \quad \gamma_1^* = \frac{\theta^2 + \sigma^2}{\theta(1+\tau) - \sigma^2}$$

$$\gamma_2^* = 1 - \tau^2 - \sigma^2$$

となる。

$$\gamma_1^* \geq \gamma_1, \quad \gamma_2^* \leq \gamma_2$$

であるから、今度もまた、 $\sigma^2 = 0$ の場合にくらべて、 M の推定量は小さくなり易く、 θ の推定量は大きくなり易い。

2.4 採取検査の場合

ロットサイズ N があまりに小さくて、 n 個のサンプルを採取して、それらを全数2回検査すれば、サンプル中の不良品の数を M^* とするとき、条件付最尤法では

$$\hat{M}_c^* = m + [z_1^2 / 4z_2]$$

$$\hat{\theta}_c = 2z_2 / (z_1 + 2z_2)$$

$$\hat{M}_c = [\hat{M}_c^* (N+1) / n]$$

となる。

3. 結論

製品ロットの検査で、検査方法が不完全で不良品の見落としが起こるとき、見落としの確率とロット中の不良品の総数を推定するには、良品のみを再検査するより、200%検査を実施する方がずっとよい推定値を得やすい。