

多値論理とオートマトン

野崎 昭弘 (東大理学部)

昨年、同じ題で行った報告の線に沿って、その後の結果を報告したい。概念・記号の定義で、ここに示されていないものについては、前回の報告 (数解研講究録, vol. 81, pp. 176-206) を参照して頂きたい。

我々の関心事は、いわゆる completeness problem である。しかし、合成の単位として、時間遅れゼロの論理素子の代りに、(多値) オートマトンを考えた点が特徴である。今回は、次の三つのテーマについて、得られた結果を述べたい。

1) $\ast$ -maximal sets の特徴づけについて。—— 目標はすべての $\ast$ -maximal sets の分類である。今回は、いくつかの $\ast$ -maximal sets の系列を示し、次のステップとして考えられる問題をいくつか提出する。

2) $\sim$ -maximal sequences の特徴づけについて。—— さしあたりの目標は、三値の場合の、すべての $\sim$ -maximal sequences の決定である。今回は、足田によって得られた基本的な定理を紹介する。

3) より広いオートマトンのクラスに対する完全性の問題の考察. — 定義のふずかれさを指摘し, いくつかの定式化の間のギャップを明らかにしたい.

§ 1 $*$ -maximal sets の特徴づけ

k 値論理関数族の全体を Ω とし, $F \subseteq \Omega$ とする.

$$F^{(1)} = F \circ \gamma, \quad F^{(n)} = F^{(n-1)} \circ F^{(1)}, \quad F^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{(n)}$$

とおく ($\gamma, (\circ)$ 等については, [1] 参照).

Lemma 1 (a) F maximal $\Rightarrow F^*$ -maximal

(b) $K(a, b)$, $a \neq b$ は $*$ -maximal

但し, $K(a, b) = \{f \in \Omega; f(a, \dots, a) = f(b, \dots, b)\}$,

$k \geq 3$.

前回報告したように, $k=2$ ならば 8 個 (Kudryavtsev), $k=3$ ならば 30 個 (野崎) の $*$ -maximal sets が存在する.

また, [1] 定理 3 (p.198) からわかるように, 一般に

F $*$ -maximal, $F \neq K(a, b)$

$$\Rightarrow (\exists n \geq 1), (\exists M: \text{maximal set}): F^{(n)} \subseteq M \quad (1)$$

である. そこで, 条件(1)を手がかりに, $*$ -maximal sets を求めてみる. まず, M が 'D型' の maximal set である場合を考察する.

定義 1 $(k) = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $S \subseteq (k)$ とする.

$$D_S = \{ f \in \Omega \ ; \ f(s, \dots, s) \subseteq S \}$$

Lemma 2 $S \neq \emptyset$, (k) ならば, D_S は maximal である.

定義 2 $a_0, \dots, a_{t-1} \in (k)$, $a_i \neq a_j$ for $i \neq j$ に対し,

$$C(a_0, \dots, a_{t-1}) = \{ f \in \Omega \ ; \ f(a_i, \dots, a_i) = a_i \oplus 1 \}$$

$$\text{for } 0 \leq i \leq t-1$$

ただし, $\oplus$ は modulo t の和である.

定理 1 (a) $C(a_0, \dots, a_{t-1})$ は $*$ -maximal である.

特に, $t \geq 1$ ならば, “maximal でない $*$ -maximal set” になっている.

(b) F が, maximal でない $*$ -maximal set で,

$$F^{(n)} \subseteq D_{\{a\}}$$

をみたすならば, 適当な

$$a_0 = a, a_1, \dots, a_{t-1} \quad (t \geq 1)$$

について

$$F = C(a_0, \dots, a_{t-1}).$$

となる.

注意 これで $S = \{a\}$ の場合が片付いた.

定義 3 $A_0, \dots, A_{t-1} \subseteq (k)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$,

かつどの A_i も 2 個以上の要素を含むとする.

$$C(A_0, \dots, A_{t-1}) = \{ f \in \Omega \ ; \ f(A_i, \dots, A_i) \subseteq A_i \oplus 1 \}$$

for $0 \leq i \leq t-1$

定理 2 (a) $A_0, \dots, A_{t-1}$ が定義3の条件をみたす集合列ならば, $C(A_0, \dots, A_{t-1})$ は $*$ -maximal である.

(b) F が maximal でない $*$ -maximal set で,

$$F^{(n)} \subseteq D_S$$

をみたし, S が2個以上の相異なる要素を含むならば, 適当に

$$A_0 = S, \quad A_1, \dots, A_{t-1}$$

をとると

$$F = C(A_0, \dots, A_{t-1})$$

になる.

次に, ' p 型' maximal sets から派生する $*$ -maximal sets を調べる.

$p: (k) \rightarrow (k)$ を任意の全単射 (すなわち (k) の permutation) とする. $p^d = \text{Identity}$ となる最小の整数 (≥ 1) を, p の位数といい, $d(p)$ であらわすことにする.

定義 4 $C_{p,i} = \{f \in \Omega; f \circ p = p^i \circ f\}$

ただし $f \circ p(x_1, \dots, x_n) = f(p(x_1), \dots, p(x_n))$ とする.

定理 3 $C_{p,i}$ が $*$ -maximal

$\Leftrightarrow C_{p,1}$ が maximal で, $0 < i < d(p)$.

注意 $C_{p,1}$ が maximal $\Leftrightarrow p$ が素数次の順回置換 (同次数) の直積としてあらわされる (Rosenberg, [2])

次に, $\mathcal{R}$ を (K) の中の順序関係で, 最大・最小元を有するものとする.

$F(\mathcal{R}) = \{f \in \Omega; x_i \mathcal{R} y_i \Rightarrow f((x_i)) \leq f((y_i))\}$ とおけば, $F(\mathcal{R})$ は maximal になる.

Lemma 3 $F(\mathcal{R}, \mathcal{R}^T)$ は, $\mathcal{R}$ が lattice ならば $\ast$ -maximal になる. ただし, $\mathcal{R}^T = \{(b, a); (a, b) \in \mathcal{R}\}$ 同 $\mathcal{R}$ が lattice でない場合, いっ $I \in F(\mathcal{R}, \mathcal{R}^T)$ となるか. 一般の $\mathcal{R}$ について, 定理 1, 2 に対応する定理はまだ得られていない.

§ 2 $\sim$ -maximal sequences の特徴づけ

[1] の結果によれば, $\sim$ -maximal sequences (S_p) は次の 2 種類に分類できる.

$$(1) \exists a \neq b \quad \forall p > 0 : S_p \subseteq K(a, b)$$

$$(2) \exists M : \text{maximal set}, \exists p > 0, \forall q \geq 0 : S_{pq} \subseteq M$$

条件 (1) をみたすものについては, 次の定理がある.

定理 4 (正田輝雄) $\sigma = (S_p)$ が $\sim$ -closed で, (1) の条件が成り立つならば, Ω_1 のある subsets S, T が存在して, 次の条件をみたす.

1) S, T は Ω_1 の proper subsemigroup である.

2) $T = K(a_1, b_1) \cap \dots \cap K(a_n, b_n) \cap \Omega$ と書ける.

$$3) \quad T \circ S \subseteq T$$

$$4) \quad S_0 = F(S), \quad S_p = F(S, T) \quad \text{for } p \geq 1.$$

注意 すべての $p \geq 1$ に対し, すべての $f \in S_p$ が定数関数になる場合を除けば, S, T を次のような 2 項関係におきかえてよい.

$$S \subseteq (k^2), \quad S \neq \emptyset, \quad S \ni (a, b), \quad T = \{(a, a); a \in (k)\}$$

$k=3$ の場合, 足田・野崎は次のような $\sim$ -maximal sequences を得た (vi, vii のみ野崎による). 以下, $A = S_0$, $B = S_p$ ($p \geq 1$) と暗記する.

A	B
(i) $D_a \cap D_b$	$K(a, b) \quad \dots \quad a \neq b, \text{ 3通り}$
(ii) $S(a, b)$	$Y(a, b) \quad \dots$

ただし, a, b を入れかえる互換を τ とするとき,

$$S(a, b) = \{f \in D_{\{a, b\}}; f \circ \tau = \tau \circ f \quad \text{for } (x_i) \in \{a, b\}^n\}$$

$$Y(a, b) = \{ \quad ; f \circ \tau = f \quad \text{for } (x_i) \in \{a, b\}^n \}$$

$$(iii) \quad D_{\{a, b\}} \quad \text{Const}(a, b)$$

ただし

$$\text{Const}(a, b) = \{f \in \Omega; f \text{ は } \{a, b\} \text{ 上で定数関数}\}$$

$$(iv) \quad \lambda(x) = x \oplus 1 \quad (\oplus \text{ は mod 3 の和) とおくとき,}$$

$$\{f; f \circ \lambda = \lambda \circ f\} \quad \{f; f \circ \lambda = f\}$$

$$(v) \quad D_a \quad \{0, 1, 2\}$$

$$(vi) \quad F(\{[a][c]\}) \quad F(\{[a][c]\}, \{[0][1][2]\})$$

(vii) (ii)と同じについて

$$\{f: f \circ \tau = \tau \circ f\} \quad \{f: f \circ \tau = f\}$$

条件(1)をみたす $\sim$ -maximal sequences は, これらで尽き
ている。

(2)をみたすものについても, 足田が一般の $k \geq 3$ について
の定理を与えた他, $k=3$ の場合の具体的な list up に成功
しており, 別に近く発表の予定である。

なお, $k=2$ の場合の Kudryavtsev の結果は, 足田の結果
から容易に導びかれる。

問 一般の $k \geq 3$ について, $\sim$ -maximal sequences の分
類を与えよ。

これは $\ast$ -maximal sets の分類と平行して進められる筈
である。我々は, 足田の結果で一応の段階に到達したと考え
ているが, Rosenberg の結果とあわせれば, これを解く道具
立ても (少なくとも大道具は) そろそろあるので, ただちに攻
を続行してみても面白いであろう。

§3 オートマトンのクラスの完全性

完全性の定義にあたり, 次の3点が問題になる。

a) 合成の単位となるオートマトンのクラス, および合成

の目標となるオートマトンのクラスをどのように限定するか。

b) '合成' の定義 (単位オートマトンの組みあわせからの定義)

c) '同等' の定義 (合成オートマトンによって, 目標とするオートマトンが '表現' あるいは '実現' されている, ということの定義)

単位となるオートマトンのクラスを $\mathcal{A}$, 目標となるオートマトンのクラスを $\mathcal{B}$ としよう. すると, 合成・同等の定義を与えられれば, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ の完全性が次のように定義される.

$\mathcal{F}$ が ($\mathcal{B}$ -) complete $\Leftrightarrow \forall$ オートマトン $A \in \mathcal{B}$
 $\exists$ オートマトン A' : A' は $\mathcal{F}$ から
 合成可能で, A' は A と同等.

さて, a), b), c) の各点について, 次のような選択肢がある.

- a) 時間遅れのない論理素子 Post, Stupecki 等
 単位時間遅れをもつ論理素子 von Neuman, 伊吹等
 " の整数倍の遅れをもつ論理素子
 Kudryavtsev, 野崎
 finitely definite automaton Loomis
 finite automaton Minsky, 野崎
 b) feedback loop を許すか否か.

‘路程差’ (伊吹) を許すか否か.

c) 入力の間隔をあけることを許すか.

最初に dummy input を食わせることを許すか.

[例] $\mathcal{A}$ として単位時間遅れをもつ論理素子のクラスをとり,
 $\mathcal{B}$ として一般の automaton のクラスを選んだ場合, b), c)
 の選択の次のような組み合わせが考えられる.

	FBL	路程差	dummy input	入力間隔
1)	X	X	X	単位時間
2)	X	O	X	"
3)	X	O	O	"
4)	X	O	O	一定時間
5)	O	O	O	"

5) は Minsky によって考察された. また, $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ (論理素子のクラス) の場合, 1) は Kudryavtsev によって, 3) は伊吹によって考察された.

$\mathcal{A} = \mathcal{B}$ = ‘単位時間の整数倍の遅れをもつ論理素子のクラス’ の場合に, 1) ~ 5) それぞれについて定義される完全性の概念を, 次のように呼んで区別することにしよう (cf. [3]).

- 1) $\sim$ -complete
- 2) strongly (k)-complete
- 3) (k)-complete

4) weakly (k) -complete

5) (k) -universal

すると, 次の定理が成り立つ ([3])

定理 5

1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 5)

注意 2) $\Leftrightarrow$ 3) は, $k \geq 3$ の場合のみ証明された.

4) $\Leftrightarrow$ 5) は, 一般のオートマトンに関して証明された.

問 $k=2$ の場合, 2) $\Leftrightarrow$ 3) が成り立つか.

問 A, B を上のように限定したとき, 4) $\Leftrightarrow$ 5) が成り立つか.

合成の目標を任意の有限オートマトンにおく場合には, ‘同等’ の代りに ‘同期的に表現可能’ の概念が有用である.

([3] をみよ.)

定理 6 $\mathcal{F}$ を単位時間の整数倍の遅れをもつ論理素子の
ある集合とする.

任意のオートマトン A を, 同期的に表現可能なオートマトン A' が, $\mathcal{F}$ から合成可能

$\Leftrightarrow$ 任意の論理関数 f を計算するオートマトン A_f が, $\mathcal{F}$ から合成可能.

この定理によつて, オートマトンの合成の問題が, 論理関

数の合成の問題に帰着される.

参考文献

- [1] 野崎昭弘「多値論理とオートマトン」数解研講究録
vol. 81, pp 176-206.
- [2] I. Rosenberg, *Structure de la classe des fonctions définies
dans un ensemble fini quelconque*, Comptes Rendus
Acad. Sci. Paris, Tom 260 (1965)
- [3] A. Noyaki, *Functional Studies of Automata (I), (II)*
Scientific Papers of College of General Education,
University of Tokyo, vol. 20, pp. 21-36, pp. 109-121.