

氏 名	かわ の うえ ひらく 川 ノ 上 帆
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 3195 号
学位授与の日付	平 成 19 年 7 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	Toward resolution of singularities over a field of positive characteristic Part I. Foundation; the language of the idealistic filtration (正標数の特異点解消に向けて 第一部. 基礎; イデアル的フィルトレーションの言語)
論文調査委員	(主 査) 教 授 森 重 文 教 授 齋 藤 恭 司 教 授 向 井 茂

論 文 内 容 の 要 旨

代数閉体上の代数多様体の特異点の解消は代数幾何学における大変重要な問題の一つである。体の標数が0の場合は、廣中平祐氏により任意の次元での存在が示されており、E. Bierstone氏-P. D. Milman氏、O. Villamayor氏を初めとする諸氏によって簡易化、標準化などの研究が進んでいる。一方、正標数の場合は、S. S. Abhyankar氏他により3次元以下の場合の特異点解消の存在が知られているが、一般次元に於いては未だ確定した方針が知られていない。

正標数における特異点解消の困難の第一の理由は、最大接触超曲面と呼ばれる或る種の特異な超曲面が一般には存在しないことにある。申請者は、最大接触超曲面の役割を先頭生成系という概念に担わせることによって、任意次元の特異点解消の為の標数に依らない方針の確立を目指す。学位申請論文は、その為の一連の論文の第一部であり、特異点解消の際に扱う対象である idealistic filtration を定義しその性質を調べることで、従来の最大接触超曲面の代替概念である先頭生成系を定義すること、そして非特異性原理と呼ぶ主定理の三点が主な内容である。

環 R を閉体上の代数多様体のアフィン開集合の座標環又は閉点における局所環とする。 R 上の idealistic filtration I は、実数を添数とする R のイデアルの族であって幾つかの条件を満たすものである。特異点解消の文脈上では、関数とその関数に期待される重複度の対の集合を抽象化したものと考えて、この I に対して微分作用素による拡大、巾根を取る拡大、整閉包という三種の拡大を定義し、それらの相互関係を調べている。更に実際の特異点解消の場面で I が自然に備えている有限性を定式化し、上記の操作との関係を調べている。

次に R を閉点に於ける局所環とし、 R 上の idealistic filtration I を考える。 I の元の先頭項の集合から次数付き代数が定まるが、 I が微分について閉じている時に上の代数の生成元が基礎体の標数中の次数に集まることに注目し、それらの I における代表系を I の先頭生成系と定める。標数0の時は先頭生成系は次数1の所に集積し、これが最大接触超曲面に対応する。先頭生成系を最大接触超曲面の代替物と捉える所以である。更に、先頭生成系の元の分布に関して第一の不変量 $\sigma(I)$ を定める。標数0での従来の方針は最大接触超曲面に制限し重複度を測ることの繰り返しで不変量を定義したが、それに照らせば $\sigma(I)$ は最大接触超曲面に制限した回数に対応する。更に先頭生成系を構成する元で生成されるイデアルを法とした重複度を $\mu^-(I)$ と定義する。それが第二の不変量である。これは従来の文脈での最大接触超曲面に制限した上での重複度に対応する。これらは特異点解消の為の不変量の基本的な要素となる。

最後に非特異性原理が述べられている。 I が微分や巾根を取る操作で閉じており $\mu^-(I) = \infty$ ならば、先頭生成系は環の媒介正則系の一部からなり I を生成する、というのがその主張である。標数0での従来の方針に於いては爆発の中心は不変量の最大軌跡であり、その非特異性は最大接触超曲面の非特異性から直ちに従った。しかし正標数における我々の方針下では先頭生成系の元が定める超平面は非特異とは限らない。それにも拘らず最終的に中心を定める段階に至れば先頭生成系が非

特異な超平面を定める、というのがこの定理の意味である。

論文審査の結果の要旨

廣中平祐氏による標数 0 の体上の代数多様体の特異点解消の存在は代数幾何学において根本となる重要な定理である。その証明自体も近年 E. Bierstone 氏 - P. D. Milman 氏, O. Villamayor 氏, J. Włodarczyk 氏達により構成的証明や簡易化が与えられ、進歩が著しい。しかし、正標数の場合に話を転じると状況が一変する。S. S. Abhyankar 氏を初めとする多くの研究があるが、3 次元以下での特異点解消定理のみである。応用の一部に関しては A. J. de Jong 氏の alteration 理論によって解決をみたが、本来の固有双有理射による特異点解消に関しては、任意次元での解決は未だ道遠し、という状況である。

申請者はこの問題に、標数 0 の場合の構成的証明を拡張する方針で解決を与えようとする。この際問題となるのは、上の構成的証明において鍵となる概念である極大接触超曲面が正標数では必ずしも存在しないという事実である。申請者は特異点解消を考える際に扱う対象を再定式化し、先頭生成系という概念を導入して極大接触超曲面の代替物とすることによってこの困難を克服しようとする。学位申請論文はその為の道具立てを与えるものである。

新しい対象として導入された idealistic filtration は実数を階数とする階数付き代数とも見做することができる。その代数に微分や整閉包などの拡大を施しても必要な情報は残ると睨んだところが本研究の独自性である。それらの拡大を定義して相互関係を調べる議論は、初等的ではあるが複雑な計算の末のものである。更に idealistic filtration のある種の有限生成性が整閉包等を取る操作等で保たれることを示す結果は、特異点解消の文脈を離れて単に環論の結果と考えても興味深いものであると考える。証明に於いても永田雅宜氏の結果等、環論の深い結果が用いられている。

先頭生成系の概念の底流には、多項式環の場合の微分と標数中の関係の詳しい解析がある。この種の解析は過去の広中群スキームの研究に於いても類似のものが見出されるが、構成的な特異点解消の文脈でこれを組織的に用いたのは本論文が初めてである。特異点解消の存在の証明が無事完遂されるか否かは後続の論文が発表されるまで判断できないが、未だ正標数の特異点解消の有望な方針が存在しない現況にあっては博士論文としては十分すぎるほど評価できる試みだと言える。

学位申請論文の主定理は非特異性原理と呼ばれる。先頭生成系は非特異な超曲面を定めるとは限らず、それが為に様々な困難が派生するが、その主要な一つに爆発の中心の非特異性が保証されないという問題がある。非特異性原理とはこの爆発の中心の非特異性を保証するものである。証明には二つの事実を用いる。一つは係数補題と呼ばれる idealistic filtration の構造定理であり、もう一つは標数中の元で生成されるイデアルと微分作用素の関係を記述する補題である。証明はこれら二つの結果を用いて為される。上記の方法で正標数の特異点解消に挑む上では必要不可欠な結果と言える。

以上のように、申請者の研究は正標数の特異点解消に新たな可能性を拓く第一歩であり、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。