

代数的界面孤立波の相互作用による位相のずれ

山口大教養 松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

1. 序論

Benjamin-Ono(BO) 方程式は、成層流体中の内部波や、大気中のロスビー波を記述するモデル方程式としてよく知られている。これは非線形、および分散の効果に関しては、最低次の項のみ考慮した最も簡単な方程式であるが、大振幅の波動現象を扱うには高次項まで取り入れた拡張を行う必要がある。最近、新しい摂動法を用いて2層流体中の界面波の伝播を記述する以下の高次 BO 方程式を導いた[1] :

$$u_t + 4uu_x + Hu_{xx} = \epsilon R[u] \quad (1a)$$

$$R[u] = 3u^2u_x - \frac{15}{4}uHu_{xx} - \frac{27}{4}H(uu_x)_x - 3u_xHu_x + \frac{27}{16\Delta^2}(\Delta^2 - \frac{4}{9})u_{xxx} \quad (1b)$$

ここで $u = u(x, t)$ は界面波の波形、 $\Delta = \rho_2/\rho_1 (< 1)$ は2層流体の密度比、 ϵ は小さな正のパラメータを表す。 $\epsilon R[u]$ は高次の非線形、および分散項であるが、以下の解析においてはこれらを摂動として扱う。摂動の無い場合、上式は BO 方程式に帰着するが、この方程式は、KdV 方程式や非線形 Schrödinger 方程式等には見られない特性を有している[2]。例えば、代数型のソリトン解の存在がそれである。代数ソリトンには、相互作用によって位相のずれを起こさないという著しい特徴がある。本論の目的は、(1) 式の R によって表される摂動が、ソリトンの相互作用に与える影響を調べることである。

BO 方程式の完全可積分性は、摂動項の付加によって失われるため、その解法は近似法に頼らざるを得ない。ここでは、最近開発した多重ソリトン摂動論を用いることにする[3,4]。そこで最初に摂動論の概要を述べ、次にこれを2個の代数ソリトンの相互作用過程へ適用する。具体的には摂動による、ソリトンの振幅、および位相変化を計算する。主たる成果として、ソリトンの追越し衝突の後、各ソリトンの振幅は変化しないが、位相のず

れが生じることを示す。なお以下の議論の詳細については、文献[3]-[5]を参照のこと。

2. 多重ソリトン摂動論

ここでは摂動の加わった BO 方程式に対して、多時間展開法に基づくソリトンの摂動論を展開する。まず最初に $t_j = \epsilon^j t$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) により異なる時間スケールを導入する。このとき時間微分は $\partial/\partial t = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \partial/\partial t_j$ と置き換えられる。さらに u を ϵ に関し $u = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j u_j$, $u_j = u_j(x, t_0, t_1, \dots)$ のように漸近展開する。これらを (1) へ代入して、 ϵ の各べきの係数を等値すると、 u_j に対する以下の方程式の系列が導かれる：

$$u_{0,t_0} + 4u_0 u_{0,x} + H u_{0,xx} = 0 \quad (2)$$

$$u_{1,t_0} + 4(u_0 u_1)_x + H u_{1,xx} = R[u_0] - u_{0,t_1} \quad (3)$$

方程式 (2) は BO 方程式そのものである。 $j \geq 1$ に対して、 u_j は非斉次線形偏微分方程式を満たすことに注意する。

上記方程式系は、(2) の解から出発して、逐次的に解く必要がある。ここではソリトンの相互作用を扱うので、 u_0 としては N -ソリトン解を考える。摂動の無い場合、 N -ソリトン解は $t \rightarrow \pm\infty$ において以下のように振舞うことが知られている。

$$u_0 \sim \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{a_j^2(x - \xi_j)^2 + 1} \quad (t \rightarrow \pm\infty) \quad (4)$$

ここで $\xi_j = a_j t + \xi_{j0}$ で a_j 、および ξ_{j0} は j 番目のソリトンの振幅、および位相である。摂動が加わるとこれらのパラメータは、 ϵ^{-1} 程度の時間スケールで変調を受けることが期待される。そこでこれらに対して、以下の時間依存性を仮定する。

$$a_j = a_j(t_1, t_2, \dots), \quad \xi_{j0} = \xi_{j0}(t_1, t_2, \dots) \quad (5)$$

a_j および ξ_{j0} の時間発展は、補正項 u_1 が主要項 u_0 に比べて小さいという条件を課することにより決定できる。これは方程式 (3) に対する次の可解条件と同等である：

$$(g_j, R[u_0] - u_{0,t_1}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g_j (R[u_0] - u_{0,t_1}) dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

ここで g_j は (3) で右辺=0 と置いた式の随伴方程式の解である。すなわち

$$g_{j,t_0} + 4u_0 g_{j,x} + H g_{j,xx} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

上式の $2N$ 個の独立で有界な解は、(2) の N -ソリトン解 u_0 から

$$g_j = \int_{-\infty}^x \frac{\partial u_0}{\partial a_j} dx, \quad g_{j+N} = \int_{-\infty}^x \frac{\partial u_0}{\partial \xi_{j0}} dx, \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

のように構成できる。ここで BO 方程式 (2)、および N -ソリトン解の漸近形 (4) を用いて導かれる、次の直交関係式に注意する。

$$(g_i, \frac{\partial u_0}{\partial \xi_{j0}}) = -(g_{i+N}, \frac{\partial u_0}{\partial a_j}) = \frac{\pi}{4} \delta_{ij}, \quad (g_i, \frac{\partial u_0}{\partial a_j}) = (g_{i+N}, \frac{\partial u_0}{\partial \xi_{j0}}) = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

ここで、 $(f, g) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f g dx$ 、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

以上の式を使うと、ソリトンパラメータに対する発展方程式が導かれる。これを示すために、最初に u_0 の t_1 微分を

$$u_{0,t_1} = \sum_{j=1}^N (a_{j,t_1} u_{0,a_j} + \xi_{j0,t_1} u_{0,\xi_{j0}}) \quad (10)$$

と書き換えておく。上の式を (6) へ代入し、さらに (9) を使うと、 a_j 、並びに ξ_{j0} に対する時間発展が得られる。以下では ξ_{j0} のかわりに ξ_j を用いることにする。こうして導かれた発展方程式を元の時間変数 t で書き換えると、最終的に次のようになる：

$$\frac{da_j}{dt} = -\frac{4\epsilon}{\pi} (g_{j+N}, R[u_0]), \quad \frac{d\xi_j}{dt} = a_j + \frac{4\epsilon}{\pi} (g_j, R[u_0]), \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

3. 代数ソリトンの位相のずれ

ここでは前節で展開した摂動論を、2 個の代数ソリトンの衝突過程に適用する。特に衝突によるソリトンのパラメータの変化を、方程式 (11) を数値積分することにより調べる。

3.1 2-ソリトン解

BO 方程式の 2-ソリトン解は

$$u_0 = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln(f^*/f), \quad f = x^2 - s_1 x + s_2 \quad (12a)$$

と表せる。ここで s_1 および s_2 は

$$s_1 = \xi_1 + \xi_2 + i \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}, \quad s_2 = \xi_1 \xi_2 - \frac{1}{a_1 a_2} \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right)^2 + i \frac{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2}{a_1 a_2} \quad (12b)$$

で与えられる。関数 g_j 、および g_{j+2} ($j = 1, 2$) は (8)、および (12) から計算できるが、ここではその具体形は書き下さない。

3.2 ソリトンパラメータの時間発展

(8) の右辺の内積は、解析的に行うことができる。最終結果は以下のようになる：

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{3\epsilon s^2(s-1)^3 a_1^4 y}{2\Delta^2(s+1)^5(y^2+1)^2} [6(s^2+1) + (24s^2+16s+21)\Delta^2] \quad (13a)$$

$$\frac{da_2}{dt} = \frac{-3\epsilon(s-1)^3 a_2^4 y}{2\Delta^2 s^2(s+1)^5(y^2+1)^2} [6(s^2+1) + (21s^2+16s+24)\Delta^2] \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} = & a_1 - \frac{3\epsilon}{16\Delta^2} (6 + 31\Delta^2) a_1^2 \\ & - \frac{3\epsilon s(s-1)a_1^2}{4\Delta^2(s+1)^4(y^2+1)^2} \left[6\{(s-1)(s^3-s-2)y^2 - s^4 + 5s^3 - 3s^2 + 5s + 2\} \right. \\ & \left. + \{(s-1)(24s^3 - 35s - 44)y^2 - 24s^4 + 88s^3 + 7s^2 + 129s + 44\}\Delta^2 \right] \end{aligned} \quad (13c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_2}{dt} = & a_2 - \frac{3\epsilon}{16\Delta^2} (6 + 31\Delta^2) a_2^2 \\ & + \frac{3\epsilon(s-1)a_2^2}{4\Delta^2 s^2(s+1)^4(y^2+1)^2} \left[6\{(s-1)(2s^3+s^2-1)y^2 + 2s^4 + 5s^3 - 3s^2 + 5s - 1\} \right. \\ & \left. + \{(s-1)(44s^3 + 35s^2 - 24)y^2 + 44s^4 + 129s^3 + 7s^2 + 88s - 24\}\Delta^2 \right] \end{aligned} \quad (13d)$$

ここで簡単のため $s = a_2/a_1$ 、および $y = a_1 s(s-1)(\xi_1 - \xi_2)/(s+1)^2$ と置いた。

相互作用の無い場合、上式は

$$\frac{da_j}{dt} = 0, \quad \frac{d\xi_j}{dt} = a_j - \frac{3\epsilon}{16\Delta^2} (6 + 31\Delta^2) a_j^2 \quad (j = 1, 2) \quad (14)$$

となり、これらは直ちに積分できて

$$a_j(t) = a_j(0), \quad \xi_j(t) = [a_j(0) - \frac{3\epsilon}{16\Delta^2} (6 + 31\Delta^2) a_j^2(0)]t + \xi_j(0), \quad (j = 1, 2) \quad (15)$$

と書ける。従って相互作用しない単独のソリトンの場合、 $O(\epsilon)$ の近似の範囲でソリトンの振幅は変化せず、その速度 $d\xi_j/dt$ はわずかな補正のみを受けることがわかる。

3.3 数値解析

(13) は複雑な非線形常微分方程式系であるため、解析解は望めない。そこで数値計算により、幾つかの初期条件に対して解を求めた。ここでは次の4ケースを扱う：

ケース (i): $\Delta = 0.4$, $a_1(0) = 0.6$, $a_2(0) = 1.2$, $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = -85$

ケース (ii): $\Delta = 0.8$, $a_1(0) = 0.6$, $a_2(0) = 1.2$, $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = -85$

ケース (iii): $\Delta = 0.4$, $a_1(0) = 0.3$, $a_2(0) = 1.5$, $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = -170$

ケース (iv): $\Delta = 0.8$, $a_1(0) = 0.3$, $a_2(0) = 1.5$, $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = -170$

すべてのケースについてパラメータ ϵ は 0.003 と置き、初期の位相は2個のソリトンの衝突が $t \simeq 150$ で起こるように設定した。

相互作用による各ソリトンの純粋な振幅、及び位相の変化は各々

$$\Delta a_j = a_j(t) - a_j^{(0)}(t), \quad \Delta \xi_j = \xi_j(t) - \xi_j^{(0)}(t), \quad (j = 1, 2) \quad (16)$$

と書ける。ここで $a_j^{(0)}$ および $\xi_j^{(0)}$ は、単独のソリトンからの寄与で、(15) の右辺によって与えられる。

図-1、および図-2 はケース (i)、およびケース (ii) に対する Δa_j 、並びに $\Delta \xi_j$ の時間発展を示す。

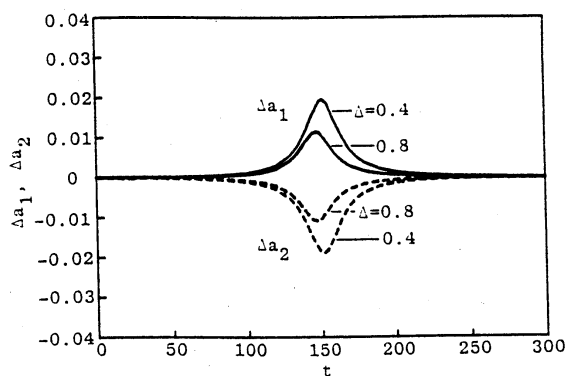


図-1

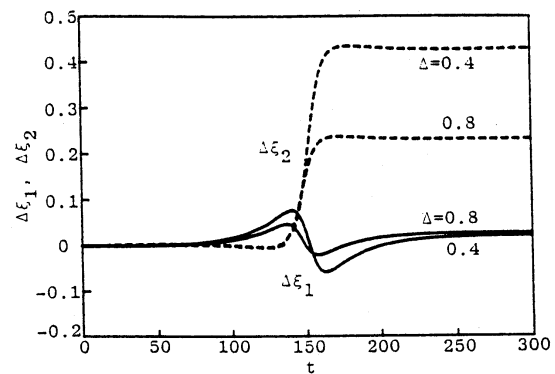


図-2

ケース (iii)、およびケース (iv) に対応する図を以下の図-3、および図-4 に示す。

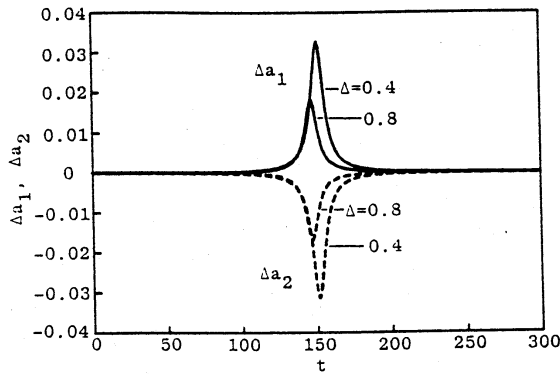


図-3

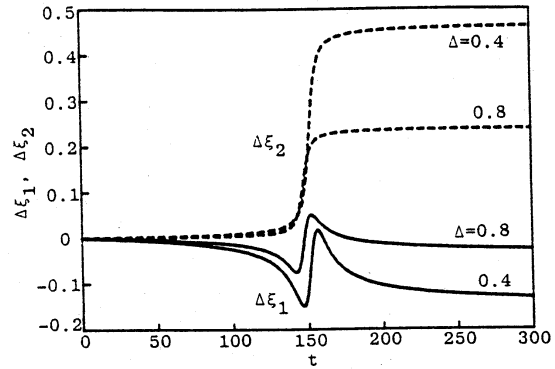


図-4

これらの図から、相互作用によりソリトンの振幅は変化しないが、位相のずれは起こることが観察できる。後者はソリトンパラメータや、 Δ の値に依存している。また Δa_j や $\Delta \xi_j$ の最大変化量は Δ の値が増えると減少することがわかる。しかしながら $\Delta \xi_1$ の振舞いは $\Delta \xi_2$ のそれとは定性的に異なる。実際、小さな振幅比に対しては(図-2 参照)、ソリトンが近づくとつれて小さいソリトンは衝突直前に前方へ押し出され、衝突後には後方へ引き戻される。その際、大きなソリトンは急激に加速される。結果として、小さいソリトンはわずかだが正の位相のずれを受ける。他方、図-4 から見られるように、大きな振幅比では、逆の現象が小さなソリトンに対して起こる。すなわち、減速の後に加速が行われ、結果として負の位相のずれを生じる。

3.4 位相のずれの詳細記述

位相のずれの定量的な性質を調べるために、(13) を逐次近似法によって解く。そのためには $O(\epsilon)$ の項の a_j 、および s を最低次近似 $a_j(0)$ 、および $s_0 = a_2(0)/a_1(0)$ で置き換え、その後 t に関して積分する。両ソリトンが初期、および最終時刻に十分離れており、その間の相互作用が無視できるとすると(13a)より

$$\int_0^t [a_1(t) - a_1(0)] dt = \frac{3\pi\epsilon}{4\Delta^2(s_0 + 1)(s_0 - 1)} [6(s_0^2 + 1) + (24s_0^2 + 16s_0 + 21)\Delta^2] \quad (17)$$

が導かれる。ここで(16)によって定義される $\Delta \xi_j$ を

$$\Delta \xi_j(t) = \int_0^t [d\xi_j/dt - (d\xi_j/dt)_{s_j}] dt, \quad (j = 1, 2) \quad (18)$$

と書き換える。ここで $(d\xi_j/dt)_{s_j}$ は、相互作用の無い場合の j 番目のソリトンの速度で、(14) の右辺で $a_j = a_j(0)$ と置いた式で与えられる。(13)、(14)、および (17) を (18) へ代入すると

$$\Delta\xi_1 = -\frac{3\pi\epsilon}{4\Delta^2(s_0+1)^2} [6(s_0^2 - 2s_0 - 1) + (8s_0^2 - 46s_0 - 23)\Delta^2] \quad (19)$$

が得られる。同様な計算により $\Delta\xi_2$ は

$$\Delta\xi_2 = \frac{3\pi\epsilon}{4\Delta^2(s_0+1)^2} [6(s_0^2 + 2s_0 - 1) + (23s_0^2 + 46s_0 - 8)\Delta^2] \quad (20)$$

となる。 $\Delta\xi_1$ 、および $\Delta\xi_2$ を幾つかの Δ に対して s_0 の関数として図-5 に示した。ここで ϵ は 0.003 に選んだ。

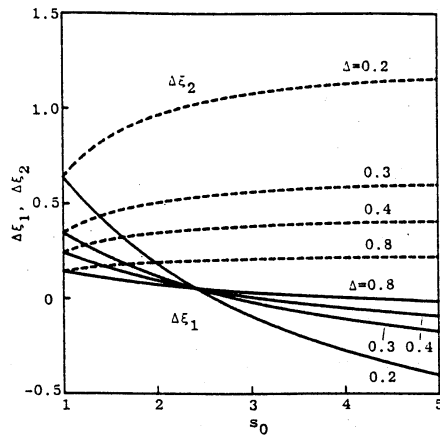


図-5

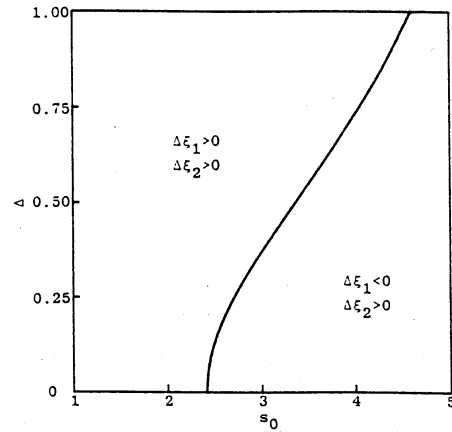


図-6

図-5 より大きなソリトンは、 s_0 、および Δ の値にかかわらず常に正の位相のずれを受けることがわかる。しかし、小さいソリトンに対しては状況は全く異なる。すなわち、 $\Delta\xi_1$ は s_0 、および Δ の値に依存して符号を変える。図-6 に示すように、 $\Delta\xi_1 = 0$ に対応する臨界曲線が存在する。曲線の左側の領域では $\Delta\xi_1 > 0$ となり、右側の領域では $\Delta\xi_1 < 0$ となる。しかし、 $s_0 > 4.549$ の範囲の s_0 に対しては、 $\Delta\xi_1$ は常に負の値をとる。

4. 結論

代数ソリトンは、種々のソリトン方程式において見い出されているが、いずれも相互作用過程においては位相のずれを生じない。従って、ここで得られた結果は、代数ソリトン間で起こる位相のずれの最初の例と考えられる。

ここでの議論は、摂動によるソリトンパラメータの変化のみを考慮しているが、輻射（いわゆるリップル）の放出や、ソリトンの形状変化を調べるには u_1 に対する方程式 (3) を解く必要がある。しかしながら、現在のところ、これに対して有効な解析的手段は見い出されていない。摂動のある KdV 方程式に対しては、対応する方程式は、逆散乱法の適用によって解かれているが、これが今の問題に対して有効かどうかは今後検討する必要がある。

参考文献

- [1] Y. Matsuno, Phys. Rev. **E49**, 2091(1994).
- [2] Y. Matsuno, *Bilinear Transformation Method* (Academic Press, New York, 1984).
- [3] Y. Matsuno, Phys. Rev. Lett. **73**, 1316(1994).
- [4] Y. Matsuno, Phys. Rev. **E51**, No. 2 (1995).
- [5] Y. Matsuno, in *Structure and Dynamics of Nonlinear Waves in Fluids*, Proc. IU-TAM/ISIMM symposium, Hannover, 1994(World Scientific, Singapore, 1995).