

超流動体、並びに超伝導体における量子渦の物理

岡山大学 大学院自然科学研究科 水島 健¹

磁場中の超伝導体や回転する超流動体では量子化された渦を伴う。これまでも様々な超伝導物質の熱力学的特性や輸送現象において量子渦の役割が強調されてきた。近年では、中性原子気体系におけるボース・アインシュタイン凝縮体 (BEC) や BCS-BEC クロスオーバーの実現により、量子渦の研究は加速度を増している。ここでは、まず空間的に非一様な超流動・超伝導系を統一的に記述する理論形式として最も微視的な Bogoliubov-de Gennes 理論と準古典 Eilenberger 理論を概観する。続いて、スピン 1 重項超伝導体と p 波超伝導体の量子渦やトポロジカル欠陥に束縛された特異な準粒子構造について解説する。これら低エネルギー準粒子励起は全て「Andreev 束縛状態」という共通の言葉で理解できる。さらにはマヨラナ粒子やトポロジカル超伝導等といった最近のトピックスもこの共通概念の自然な拡張として理解できる。

1 はじめに

超伝導/超流動体における量子渦 (磁束渦) の研究は 1960 年代以降、 ^3He や高温超伝導体等の異方的超流動体が発見されるたびにその知見を積み重ね、現在では成熟した分野が作り上げられているように見える。しかしながら、近年になって、冷却原子気体系での研究の爆発的な展開や超伝導体に内在する深遠な数理構造の理解等が相まって、量子渦の物理の新奇な一面が切り出されつつある。 ^3He や Sr_2RuO_4 等で実現が期待されている半整数量子渦が Majorana 型準粒子を内在していることが指摘されたのはその典型例であろう [1, 2]。このような量子渦の持つ特異な一面は Andreev 束縛状態という共通の言葉を用いて理解できる。さらに、この言葉を介して、トポロジカル超伝導体等の話題とも密接にリンクしていることが分かってきた。

このノートでは、スペースの都合上、基礎的な事柄の紹介にとどめたい。まず、次節にて Bogoliubov-de Gennes (BdG) 理論と準古典理論を Nambu-Gor'kov 方程式より導出する。さらに、Andreev 束縛状態や、BCS-BEC クロスオーバー、トポロジカル相転移等の話題についても触れる。3 節では、等方的な s 波超伝導体の量子渦状態を観ることで、低エネルギー準粒子状態と Andreev 束縛状態の関連性を明確にする。続いて 4 節にてスピン偏極した p 波超伝導/超流動体の量子渦に話題を移し、その低エネルギー構造が s 波のそれとは劇的に異なることを紹介する。スピン偏極した p 波超伝導体の量子渦は現実的には未だ実現されてないが、この理論はスピン 3 重項超伝導/超流動体の低エネルギー有効理論となっている [1]。さらには、その基底状態は $\nu=5/2$ 分数量子ホール状態の基底状態の候補である Moore-Read Pfaffian 状態と等価であり [2, 3]、Majorana 粒子の存在等の興味深い物理現象が共有される。

2 BdG 方程式と準古典理論

2.1 BdG 方程式と準古典理論

スピン 1/2 のフェルミ粒子系で実現される超流動相は、スピン自由度と粒子-ホール自由度からなる 4 次元の場の演算子 $\Psi(x_1) \equiv [\Psi_\uparrow, \Psi_\downarrow, \Psi_\uparrow^\dagger, \Psi_\downarrow^\dagger]^T$ を用いて定義される Green 関数 $G(x_1, x_2) = -\langle T_\tau \Psi(x_1) \Psi^\dagger(x_2) \rangle$

¹E-mail: mizushima@mp.okayama-u.ac.jp

によって記述される．この Green 関数は Nambu-Gor'kov 方程式 [4]

$$\int d\mathbf{r}_3 [\{-i\omega_n \mathcal{I}_0 + \mathcal{H}_0(\mathbf{r}_1)\} \delta(\mathbf{r}_{13}) + \underline{\Sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)] \underline{G}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = \mathcal{I}_0 \delta(\mathbf{r}_{12}), \quad \underline{G} \equiv \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{F} \\ \hat{F} & \hat{G} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

に従う．ただし，ノートを通して， $\underline{a}$ は 4×4 の行列を， $\hat{a}$ は 2×2 の行列を表すことにする．また， $\hbar = 1$ とし， $\hat{\tau}_{1,2,3}$, $\mathcal{I}_{1,2,3}$ は Pauli 行列である． $\omega_n = (2n+1)\pi/T$ は松原周波数であり (T は温度)， $\mathcal{H}_0 = \text{diag}(H_\uparrow, H_\downarrow, -H_\uparrow^*, -H_\downarrow^*)$ は 1 粒子ハミルトニアン密度 $H_\sigma = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 - \mu_\sigma + U(\mathbf{r})$ を用いて表現される (M は質量， μ_σ は化学ポテンシャル， $U(\mathbf{r})$ は外部ポテンシャル)．ここで，自己エネルギー $\underline{\Sigma}$ は Green 関数 $\underline{G}$ を用いて

$$\underline{\Sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \hat{\Delta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ -\hat{\Delta}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & -\hat{\Sigma}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{bmatrix}, \quad \hat{\Delta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_{12}) T \sum_n \hat{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n), \quad (2)$$

となる． $V(\mathbf{r}_{12})$ は引力相互作用である．超流動秩序変数 $\hat{\Delta}$ に対する式はギャップ方程式とも呼ばれる．式 (1) と (2) は Green 関数 $\underline{G}$ に対する自己無撞着な方程式となっている．

BdG 方程式は上記の自己無撞着な方程式から直接的に導出することができる．このために，まず 4×4 の行列 $\underline{u}_\nu(\mathbf{r})$ を定義する．これはユニタリ条件 $\int d\mathbf{r} \underline{u}_\nu^\dagger(\mathbf{r}) \underline{u}_\mu(\mathbf{r}) = \delta_{\nu,\mu}$ 及び完全性 $\sum_\nu \underline{u}_\nu(\mathbf{r}_1) \underline{u}_\nu^\dagger(\mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_{12})$ を満たすものとする．このユニタリ行列を用いることで，Green 関数 $\underline{G}$ を 1 粒子状態の形に変換できるとする．つまり， $\underline{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n)$ は変換行列 $\underline{u}_\nu(\mathbf{r})$ を用いて

$$\underline{G}_{\nu\mu}(i\omega_n) = \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \underline{u}_\nu^\dagger(\mathbf{r}_1) \underline{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) \underline{u}_\mu(\mathbf{r}_2) = \delta_{\nu,\mu} [-i\omega_n \mathcal{I}_0 + \underline{E}_\nu]^{-1}, \quad (3)$$

の様に，エネルギー固有値 $\underline{E} = \text{diag}(E_\uparrow, E_\downarrow, -E_\uparrow, -E_\downarrow)$ をもつ準粒子状態を表す Green 関数 $\underline{G}_{\nu\mu}(i\omega_n)$ に変換されるものとする．変換行列 $\underline{u}_\nu(\mathbf{r})$ がこの性質を満足するための条件式が Bogoliubov-de Gennes 方程式であり，その一般的な形は

$$\int d\mathbf{r}_2 [\mathcal{H}_0(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_{12}) + \underline{\Sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \underline{u}_\nu(\mathbf{r}_2) = \underline{u}_\nu(\mathbf{r}_1) \underline{E}_\nu, \quad (4)$$

となる．式 (4) より変換行列 $\underline{u}_\nu(\mathbf{r})$ が求まれば，式 (2) と (3) より $\underline{\Sigma}$ が再構成される．これ以後， $\underline{u}$ の第 1 列を 4 成分ベクトル $\varphi_\nu = [u_{\nu,\uparrow}, u_{\nu,\downarrow}, v_{\nu,\uparrow}, v_{\nu,\downarrow}]^T$ を用いて表すことにする．この固有関数 φ_ν の固有値を E_ν とする．BdG 方程式は，特別な近似無しで Nambu-Gor'kov 方程式 (1) より直接的に導出されるため情報は失っていない．

一方で，準古典理論とは Nambu-Gor'kov 方程式 (1) 或いは BdG 方程式 (4) に含まれる情報の一部を省くことで，その方程式系を簡略化したものである．通常の超伝導物質や ^3He の超流動転移温度 T_c はフェルミ温度 T_F よりも数桁小さい温度であるため，フェルミエネルギー E_F のごく近傍の状態のみがノーマル相から変更されるだろう．そこで，超流動相における Green 関数を $\underline{G} = \underline{G}_{\text{low}} + \underline{G}_{\text{high}}$ のように分解できるものとする．ここで， $\underline{G}_{\text{low}}$ はフェルミエネルギー E_F 近傍の寄与であり，それ以外の高エネルギー領域からの寄与を $\underline{G}_{\text{high}}$ とした．準古典理論では低エネルギー領域のみに注目し，高エネルギーからの寄与 $\underline{G}_{\text{high}}$ に関してはバーテックスに繰り込むことで現象論的なパラメータに置き換える．Eilenberger はこの $\underline{G}_{\text{low}}$ から以下の様な準古典 Green 関数 $\underline{g}$ を定義した [5]：

$$\underline{g}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}; i\omega_n) = \frac{1}{a} \int d\xi_k \underline{G}_{\text{low}}(\mathbf{k}, \mathbf{r}; i\omega_n), \quad \xi_k = v_F(k - k_F). \quad (5)$$

ただし, $\mathbf{k}$ は相対座標 $\mathbf{r}_{12} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ に関する運動量を表し, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ は重心座標である. また, a は規格化因子であり, 準古典 Green 関数は $\underline{g}^2 = -\pi^2 \underline{\tau}_0$ を満たす ($\underline{\tau}_0$ は単位行列). この準古典近似によって, Nambu-Gor'kov 方程式 (1) は以下のように変更される [5]:

$$\left[i\omega_n \underline{\tau}_3 - \underline{v} - \underline{\sigma}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}), \underline{g}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}; i\omega_n) \right] + i v_F \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \underline{g}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}; i\omega_n) = 0. \quad (6)$$

$\underline{\sigma}$ は準古典自己エネルギーであり, フェルミ面上での自己エネルギーに対応する: $\underline{\sigma}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}) = a \underline{\Sigma}(k_F \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}) \underline{\tau}_3$. 上記の議論から明らかなように, この準古典理論が成立するためには $T_c \ll T_F$ 或いは $\Delta/E_F \approx 1/(k_F \xi) \ll 1$ であることが要求される (ξ はコヒーレンス長を表す). 一方で, この準古典方程式系は BdG 方程式に比べて数値計算をする上で非常に有利であり, 定量的な研究が可能になる.

2.2 厳密に解ける例: Andreev 束縛状態

超伝導秩序変数の位相が準粒子状態に与える影響を整理しておくことは重要である. 簡単な例として, 図 1 の様な超伝導-常伝導-超伝導 (SNS) 接合系を考える. ここで, 超伝導状態は単純な s -波クーパ対状態を考えることにする: $\hat{\Delta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = i\hat{\tau}_2 \Delta(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_{12})$. 図 1 の様に接合面に垂直な軸を x 軸とし, 左(右)側の超伝導領域の位相を ϕ_L (ϕ_R) とおく. ここで, 接合面に平行な方向には超伝導状態の一様性を仮定しておく. さらにフェルミエネルギー $E_F = k_F^2/2M$ 近傍にのみ興味があるため, BdG 方程式 (4) に Andreev 近似を施す: $-\frac{\nabla^2}{2M} \rightarrow -i v_F \cdot \nabla$. このとき BdG 方程式 (4) は以下のような 1 次元 Dirac 方程式に帰着される [6]:

$$\left[-i v_F \hat{\tau}_3 \partial_x + \hat{\tau}_1 e^{-i\phi(x)\hat{\tau}_3} \Delta(x) \right] \begin{bmatrix} u_{\nu,\uparrow}(x) \\ v_{\nu,\downarrow}(x) \end{bmatrix} = E_\nu \begin{bmatrix} u_{\nu,\uparrow}(x) \\ v_{\nu,\downarrow}(x) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

ただし, $x < 0$ では $\phi(x) = \phi_L$ であり, $x > 0$ では $\phi(x) = \phi_R$ とする. また, 常伝導領域の幅 L は超伝導コヒーレンス長 ξ に比べて十分に短いものとした ($L \ll \xi$). この位相のとびを持つ 1 次元 Dirac 方程式は, $\Delta(x) = \Delta_0$ のとき, 簡単な解析により

$$E = \Delta_0 \cos\left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2}\right), \quad (8)$$

というエネルギー固有値を持つことが示される [6, 7]. 特に, 左右の超伝導領域の位相差が $\phi_L - \phi_R = \pi$ のときエネルギー固有値は厳密に $E=0$ となり, その固有関数は

$$\begin{bmatrix} u_{\nu,\uparrow}(x) \\ v_{\nu,\downarrow}(x) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\Delta}{2}} e^{i\tau_3(\phi_L + \phi_R)/4} \exp(-|x|/\xi), \quad (9)$$

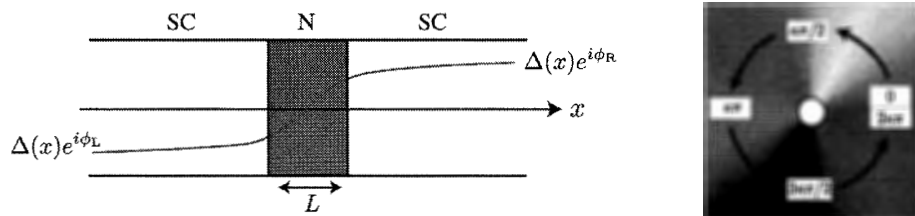


図 1: 左図は SNS 接合系の概念図. 右図は渦度 $\kappa \in \mathbb{Z}$ を持つ量子渦状態での秩序変数 $\Delta_{0,0}(\mathbf{r})$ の位相を x - y 平面で描いた図. 量子渦の中心 “○” は原点 $(x, y) = (0, 0)$ に配置されるとする.

となり、常伝導領域からコヒーレンス長 ξ の程度の領域に局在する状態である。この局在状態は Andreev 束縛状態と呼ばれ、超伝導及び超流動体における様々な位相欠陥周りに出現する低エネルギー準粒子状態を理解するためには不可欠である。実際に、下でも述べるように、常磁性効果が顕著な超伝導物質では空間一様な超伝導状態にかわり、位相差 π の超伝導ドメインが周期的に配列した Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) 状態が実現され得る。この FFLO 状態での BdG 方程式は式 (7) の様な形に帰着でき、FFLO ノードに束縛された零エネルギー準粒子状態の存在が指摘される [8]。

2.3 BCS-BEC クロスオーバーとトポロジカル相転移

近年、冷却原子気体系での研究が爆発的に進展している一つの要因は、原子間の相互作用を外場により自在に制御することができることであろう。これはフェッシュバハ共鳴という現象を利用しており、BCS-BEC クロスオーバーといった古典的な問題だが実現不可能と思われていた現象を我々に示してくれた。

通常の 2 体散乱は ℓ 波に分解された散乱振幅

$$f_\ell(k) = \frac{(kb)^{2\ell}}{-a_\ell^{-1} + r_\ell k^2/2 - i(kb)^{2\ell}k}, \quad (10)$$

を用いて記述される。ここで、 a_ℓ は ℓ 波散乱長、 $r_\ell \sim -b$ は相互作用の到達距離を示す。通常の冷却原子気体の実験で用いられるアルカリ原子は電子スピン 1/2 を持ち、ファンデアワールス力に起因している相互作用の到達距離 r_ℓ は数 nm 程度である。実験が行なわれる極低温下では s 波散乱が支配的であるが、その散乱長 a_0 は原子種により様々な値をとる。しかし、2 体の散乱状態を外場を用いて強制的に 2 体束縛状態へ共鳴させることで散乱長 a_ℓ の大きさや符号を変えることができる (フェッシュバハ共鳴)。この共鳴散乱を制御するための外場には磁場が用いられるが、これは散乱状態と束縛状態の磁気モーメントが異なることに起因している。近年では、電子スピンの 0 の原子種 Yb に対しても光学的な手法を用いて束縛状態へ共鳴させることで散乱長の制御に成功している [9]。

このフェッシュバハ共鳴による a_ℓ の制御によって原子種はその個性を失い、 $a_\ell \rightarrow -\infty$ から $+\infty$ まで自在に制御可能である。それでは、 $a_\ell \rightarrow \pm\infty$ の状況で原子気体系はどのような相互作用を感じるのだろうか？ 原子間の有効相互作用ポテンシャル $V_\ell(k, k')$ は T 行列 $T_\ell(k, k'; E)$ との間に

$$T_\ell(k, k'; E + i0_+) = V_\ell(k, k') + \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} V_\ell(k, p) \frac{1}{E + i0_+ - p^2/M} T_\ell(p, k'; E + i0_+), \quad (11)$$

という関係式を満たす [10]。ここで、 $T_\ell(k, k; k^2/M + i0_+) = -\frac{4\pi}{M} f_\ell(k)$ より、式 (11) を通して散乱長 a_ℓ と有効相互作用 V_ℓ が関連づけられる。詳細は原子種やパラメータに依存するが、 a_ℓ の符号等に依存せず $V_\ell < 0$ となり、かつ、発散を持たない連続的な関数である。

通常の BCS 理論によると、原子間に弱い引力相互作用が働くとクーパ対形成に対してフェルミ面が不安定化し BCS 状態へと転移する。しかしながら、有効相互作用が強い引力の極限では 2 つの原子が直接的に 2 体束縛状態を形成し分子化する。この分子はボース統計性に従うため BEC 状態が実現される。Leggett [11] は、多体の束縛状態による BCS 状態と 2 体束縛状態の帰結である BEC 状態という異なる性格を持つ 2 つの量子状態が実は相転移ではなくクロスオーバーにより連続的に結ばれることを指摘した。興味深いことに、BdG 方程式 (4) とギャップ方程式 (2) に加えて全粒子数が保存するという条件を加えることで化学

ポテンシャルも自己無撞着に決定すると、この理論体系は BCS-BEC クロスオーバーを記述するためのミニマム理論となっている。実際に、この理論は弱結合極限では BCS 理論を再現し、さらに強結合極限では分子ボソンに対する平均場理論である Gross-Pitaevskii 方程式に帰着されることが証明されている [12]。

3次元空間中に一様な ℓ 波対の超流動状態を考えると、BdG 方程式より準粒子状態のエネルギーは一般に

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + |\Delta_{\ell}(\mathbf{k})|^2}, \quad \Delta_{\ell}(\mathbf{k}) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Delta_{\ell,m} \phi_{\ell,m}(\mathbf{k}) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Delta_{\ell,m} k^{\ell} Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (12)$$

となる。ここで $Y_{\ell,m}(\hat{\mathbf{k}})$ は球面調和関数であり、 $\epsilon_{\mathbf{k}} = k^2/2M$ とした。相互作用ポテンシャル V_{ℓ} が弱い引力 (弱結合極限) の場合、この方程式系は BCS 理論を再現し、 $\mu \approx E_F$ となり、準粒子のエネルギーは $k \approx k_F$ で最低となる。つまり、最低エネルギーは $\min |E_{\mathbf{k}}| = |\Delta_{\ell}(\mathbf{k})|$ としてクーパ対破壊のエネルギーで決定される。明らかに、 $\ell=0$ の s 波の場合は運動量空間で等方的な準粒子励起を持つが、 $\ell \neq 0$ に対して準粒子励起は運動量空間で異方的である。一方で、強結合極限になると、化学ポテンシャルは $\mu < 0$ となる。これは原子が分子対を形成するために、原子の化学ポテンシャルは分子対の束縛エネルギー (< 0) に等しくなるためである。この強結合極限では $k=0$ において $\min |E_{\mathbf{k}}| = |\mu|$ となり、低エネルギーのフェルミオン励起は分子対破壊のエネルギーのみで決定される自明な構造を持つ。弱結合から強結合領域へ移行する際に μ は符号を変えるので、中間領域では必ず $\mu=0$ となるが、 $\ell=0$ のときはこの中間領域 $\mu \sim 0$ において BCS 状態と BEC 状態の準粒子励起の性格が連続的に移行される (BCS-BEC クロスオーバー)。

一方で、 $\ell \neq 0$ の場合には、ギャップ関数 $\phi_{\ell,m}$ の形に依存せず、 $\mu=0$ において必ず $\min |E_{\mathbf{k}}| = 0$ となる。これは弱結合領域では異方的な準粒子構造 $\min |E_{\mathbf{k}}| = |\Delta_{\ell}(\mathbf{k})|$ と強結合極限での等方的な準粒子構造 $\min |E_{\mathbf{k}}| = |\mu|$ が連続的に結ばれず、 $\mu=0$ において一種の相転移を引き起こして準粒子構造を変化させることを示唆する。この相転移の性質を理解するために Read-Green [3] はスピン自由度の無い2次元空間中の $\ell=1$ 散乱を考え、次の様な擬スピンを運動量空間において導入した: $\mathbf{n} = (\text{Re}\Delta_{\ell}(\mathbf{k}), \text{Im}\Delta_{\ell}(\mathbf{k}), |v_{\mathbf{k}}|^2 - |u_{\mathbf{k}}|^2)$ 。この状況での基底状態は軌道強磁性状態或いはカイラル状態と呼ばれ、 $\Delta_{\ell}(\mathbf{k}) \propto k_x + ik_y$ となる。弱結合領域ではこの $\Delta_{\ell}(\mathbf{k})$ の位相 $+1$ を反映して、 $\mathbf{n}$ は運動量空間において巻き数 $\mathcal{N}=1$ を持つスカーミオンの織目構造を示す (図 2)。一方の強結合領域では $\mathcal{N}=0$ の自明な構造になる。ゆえに、 $\ell=1$ における BCS 状態と BEC 状態準粒子構造の不連続性はトポロジカル相転移として理解される。

3 スピン1重項超伝導体の量子渦

3.1 Caroli-de Gennes-Matricon 状態と量子極限

スピン1重項 ℓ -波クーパ対状態は $\hat{\Delta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = i\hat{\tau}_2 \sum_m \Delta_{\ell,m}(\mathbf{r}) \phi_{\ell,m}(\mathbf{k})$ と表される。ここで、ギャップ関数 $\phi_{\ell,m}$ は式 (12) と同様であり、等方的 s -波の場合 $\phi_{\ell,m}(\mathbf{k}) = 1$ とする。ここで問題を単純化するために s -波の場合を考える。 z 軸に沿った空間の一様性を仮定すると、量子渦状態の秩序変数は

$$\Delta_{\ell,m}(\mathbf{r}) = \Delta_{\ell,m}(\rho) e^{i\kappa\theta}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{r} = (\rho, \theta, z), \quad (13)$$

となる。ここで、 $\Delta_{\ell,m}(\mathbf{r})$ の一価性より渦度 κ は整数のみが許される。図1の右から見てとれるように、原点 $\rho=0$ において秩序変数は任意の位相をとり得る。このため位相が確定しない位相特異点となるので、秩

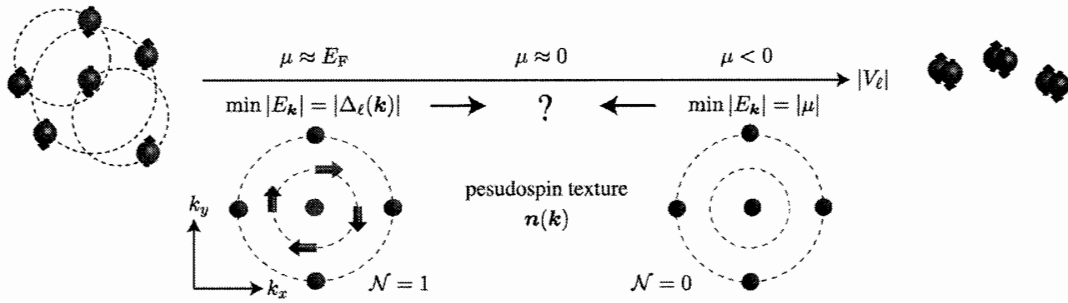


図 2: 引力的有効相互作用の増幅に伴う準粒子構造の変化。擬スピン構造はカイラル p 波状態のものを示す。

序変数の振幅は原点において零となる: $\lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta_{\ell, m}(\rho) = 0$ 。渦芯と呼ばれる $\rho = 0$ での位相特異点を横切る任意の直線経路を見てみると、渦芯を挟んだ超流動ドメインの位相差は常に $\kappa\pi$ となることから、渦芯近傍の準粒子状態は位相差 $\kappa\pi$ を持つ SNS 接合系のそれと類似しているだろう。実際に、1964 年に Caroli-de Gennes-Matignon (CdGM) [13] が渦度 $\kappa = 1$ の場合において束縛状態が存在することを明らかにした。

一般的に、任意の渦度 $\kappa \in \mathbb{Z}$ を持つ量子渦近傍に局在した CdGM 状態のエネルギー固有値は以下のように与えられる [14] :

$$E_{n, q, k} = -\left(q - \frac{\kappa}{2}\right) \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k^2/2M\mu}} + \left(n + \frac{\kappa - 1}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{k^2}{2M\mu}} \omega_1, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

ここで、 $\omega_0 \approx \frac{\kappa}{2} \frac{\Delta_0^2}{\mu}$ 及び $\omega_1 \approx \frac{\pi}{2} \Delta_0$ と見積もられる。この固有関数は n 次のベッセル関数 $J_n(x)$ を用いて

$$\begin{bmatrix} u_{n, q, k}(\mathbf{r}) \\ v_{n, q, k}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \propto e^{iq\theta} e^{ikz} \begin{bmatrix} J_q(k_+(\alpha)\rho) \\ e^{-i\kappa\theta} J_{q-\kappa}(k_-(\alpha)\rho) \end{bmatrix} \exp\left[-\frac{1}{v_\mu} \int_0^\rho \Delta(\rho') d\rho'\right], \quad (15)$$

と表される。ここで、 $k_\pm(\alpha)$ は弱結合領域では k_F 程度となる。式 (15) より、量子渦芯の外側の領域 ($k_F\rho \gg 1$) において CdGM 状態の固有関数は $\approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cos(k_F\rho) e^{-\rho/\xi}$ の様に振る舞うことが示される。即ち、この CdGM 状態は、上記の SNS 接合系との類似性から推測したように、量子渦芯から ξ 程度の半径に局在した束縛状態であることがわかる。このとき、固有関数は k_F^{-1} 程度の短い長さスケールで振動する。この振動は準古典理論では記述できない量子的な振動である。さらに準古典理論との一番大きな違いは CdGM 状態の最低エネルギーが厳密に零にならないことである: κ が奇数の場合は $\min |E_{n, q, k}| = \omega_0/2 \approx \Delta_{0,0}^2/E_F$ となるが、準古典近似の範囲では $\min |E_{n, q, k}| = 0$ である [4]。 κ が偶数の場合は $\omega_1 \approx \Delta_{0,0}$ 程度の大きなエネルギーギャップが量子渦芯で開く。これは SNS 接合系にマップして考えると、超伝導ドメイン間の位相差が 2π の整数倍になっていることから理解できる。しかし、ある程度大きな $|q|$ ではエネルギーギャップは閉じるため、最低エネルギーの CdGM 状態は渦中心周りに環状に局在することになる。

式 (14) で示された CdGM 状態は走査トンネル顕微鏡 (STM) を用いて直接的に観測することができる。1990 年頃に Hess ら [15] によって NbSe₂ の超伝導体において磁束渦糸に束縛された低エネルギー状態が初めて観測された。STM の実験では局所状態密度 $\mathcal{N}(\mathbf{r}, E) = \sum_{\sigma=\uparrow, \downarrow} \mathcal{N}_\sigma(\mathbf{r}, E)$ を直接的に観測している。ここで便宜上、局所状態密度 $\mathcal{N}(\mathbf{r}, E)$ をスピン分解したものを定義する: $\mathcal{N}_\uparrow(\mathbf{r}, E) = \sum_\nu |u_{\nu, \uparrow}(\mathbf{r})| \delta(E - E_\nu)$, $\mathcal{N}_\downarrow(\mathbf{r}, E) = \sum_\nu |v_{\nu, \downarrow}(\mathbf{r})| \delta(E + E_\nu)$ 。 $\kappa = 1$ と $\kappa = 2$ を持つ量子渦状態での局所状態密度を図 3 に示す [14]。上の議論の通り、 $\kappa = 1$ での低エネルギー準粒子状態は渦芯に束縛されており、 $E = 0$ 近傍においてそれら

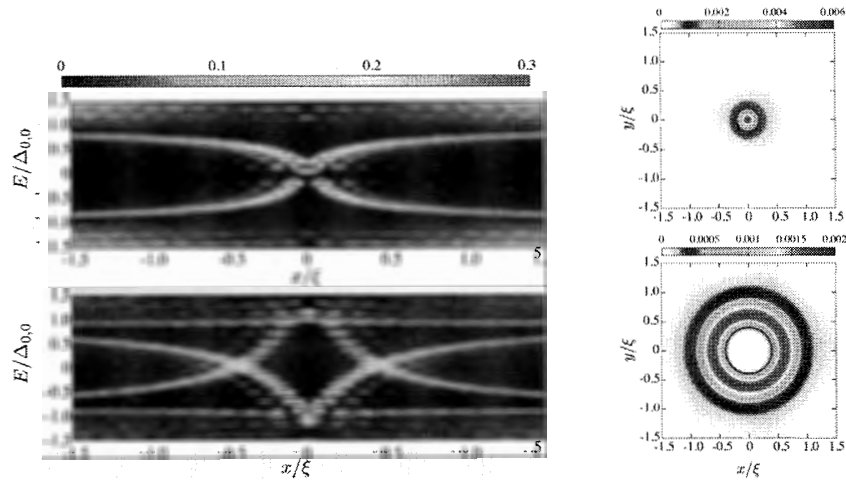


図 3: $k_F\xi=20$ での s 波超伝導体の量子渦状態での局所状態密度 (左) と常磁性磁気モーメントの空間構造 (右). 上段が $\kappa=1$, 下段が $\kappa=2$. $E=0$ はフェルミエネルギーに相当する.

のエネルギー準位に離散性が見られる. 式 (14) でも触れたように, $\rho=0$ の局所状態密度は $E=0$ よりも $\Delta_{0,0}^2/E_F$ 程度の正側の領域でピークを持っており, 渦糸中心では粒子-正孔対称性が破れていることがわかる [16]. この量子渦中心での粒子-正孔対称性の破れは高解像度の極低温 STM により $\text{YNi}_2\text{B}_2\text{C}$ の超伝導体において観測されている [17]. 一方で, $\kappa=2$ の渦中心では大きなエネルギーギャップが開いており, 低エネルギー準粒子状態は渦周りに環状に出現している. 通常の超伝導/超流動体の場合, $\kappa>1$ の渦糸は渦度 1 の渦糸 κ 本に分裂する [18]. しかしながら, メゾスコピック超伝導体では $\kappa>1$ の巨大な渦が安定に存在し得ることが実験的に示唆されている [19]. さらに, 冷却原子気体 BEC では超微細スピン自由度を外場により制御することでベリー位相を焼き付け, 渦度 $\kappa=2$ や 4 を持つ巨大渦の生成に実験的に成功した [20].

この局所状態密度をバンドの底からフェルミエネルギーまで積分することで絶対零度での粒子密度 $n(\mathbf{r}) = n_\uparrow(\mathbf{r}) + n_\downarrow(\mathbf{r})$ が得られる. Hayashi ら [21] により CdGM 状態の分散と渦糸近傍での粒子密度 $n(\mathbf{r})$ との関連性が議論され, 渦糸中心での粒子-正孔対称性の破れの帰結として渦糸での粒子密度低下が示された. 中性フェルミ原子気体系において BCS-BEC クロスオーバー領域において量子渦が実験的に観測されたが, その際に, 渦糸での粒子密度低下を介して Abrikosov 格子状態等が直接的に観測された [22].

3.2 常磁性効果と FFLO ノード面と量子渦糸の共存状態

ここまでの議論では外場の影響は一切無視してきたが, この節では外場の影響について考えてみる. 超伝導物質系に空間一様な外部磁場を印加すると, 通常 2 つの影響が電子系に及ぼされる. 一つは, 電子の軌道運動に直接影響を与え, もう一つは電子スピンとの相互作用によるフェルミ面のゼーマン分裂である. 前者は電子の運動量を $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$ ($\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャル) と変化させることで局所的にクーパー対破壊を引き起こし, 磁束渦糸 (量子渦) を生成する. 後者はフェルミ面付近の状態密度がそのスピン状態に依存して変化させ, 常磁性磁気モーメントを誘起する. s 波超伝導体の場合, E_F 近傍でエネルギーギャップが開いているため常磁性状態と共存できず, 十分低温では外部磁場に対して 1 次転移的に常磁性状態へと転移する (Pauli 極限). 実際, CeCoIn_5 等の重い電子系の超伝導体ではこの常磁性効果が顕著である [23].

ここでは、常磁性効果に焦点を当てる。外部磁場と電子スピンの相互作用により、電子系の化学ポテンシャルは外場がないときの値 μ_0 からスピンに応じて分裂する： $\mu_{\uparrow} = \mu_0 + \delta\mu$, $\mu_{\downarrow} = \mu_0 - \delta\mu$ ($\delta\mu > 0$ とする)。常磁性効果による化学ポテンシャルのシフトに伴い、図3に示される局所状態密度も変化する。具体的には、 $\uparrow$ ($\downarrow$) スピンの局所状態密度は図3のエネルギーの原点を上 (下) に $\delta\mu$ だけシフトさせることで得られる。 $\kappa=1$ の渦糸の場合、渦芯近傍 $\rho=0$ の局所状態密度に差が生じ、常磁性磁気モーメントが渦芯近傍に束縛される (図3右上)。渦中心からコヒーレンス長程度以上はなれたバルク領域では等方的なエネルギーギャップを反映し、常磁性磁気モーメントは現れない。 $\kappa=2$ の場合は、同様の議論から、渦芯周りの環状に常磁性磁気モーメントが束縛される (図3右下)。このような常磁性磁気モーメントの空間構造は低エネルギー CdGM 状態の空間構造を直接的に反映していると言える。

常磁性効果が顕著な系においてフェルミ面の「ずれ」が大きくなると、通常の BCS 理論のように運動量 $\mathbf{k}$ と $-\mathbf{k}$ の電子が対を形成する状態は必ずしも基底状態ではない。Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) [24] はクーパ対に有限の重心運動量 $\mathbf{Q}$ を持たせ、その運動量を駆動力として秩序変数を正弦波的に空間振動させることを提案した： $\Delta(\mathbf{r}) \propto \sin(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})$ 。実際には、常磁性効果の小さい場合は秩序変数の空間構造は矩形波となり、Pauli 極限でのみ単一の運動量で記述される正弦波として振る舞う [8]。いずれにせよこの FFLO 状態は、位相差 π を持つ超伝導ドメインが周期的に配列し、そのドメイン間は秩序変数のノード面、即ち常伝導ドメインで仕切られている様に見えることができる (図4)。SNS 接合系での議論から直ちに推測できるように、この FFLO ノード面に Andreev 束縛状態が形成される [8]。この低エネルギー束縛状態は常磁性効果により常磁性磁気モーメントを誘起するため、FFLO 状態は超伝導ドメインと常磁性ドメインとが共存した状態である (図4)。

超伝導物質系では一般に外部磁場に起因した常磁性効果と対軌道効果は切り離すことができないため、通常、FFLO 空間変調と磁束渦糸が共存する。それでは FFLO ノード面と磁束渦糸という2つの異なる秩序変数のトポロジカル欠陥が共存したときに常磁性磁気モーメントの空間構造と準粒子構造はどうなるのか？ここで、図4左下のように FFLO の空間変調ベクトルは渦度 $\kappa=1$ の磁束渦糸に沿った軸 (z 軸) にとる。このような配置の下で BdG 方程式 (4) とギャップ方程式 (2) を数値計算し、秩序変数の空間変調と準粒子状態の自己無撞着な構造を得た [25]。図4左下の様に $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ の経路に沿った局所状態密度を図4右下にプロットした。上の議論から自然に期待できるように、磁束渦糸中心 B と FFLO ノード面 D では $E=0$ 近傍に低エネルギー準粒子状態が束縛されており、その束縛状態の占有差により常磁性磁気モーメントが誘起される。一方で、FFLO ノード面と磁束渦糸とが交差する点 A では低エネルギー準粒子状態が消失し、大きなエネルギーギャップが開いていることが見てとれる。これにより、図4左下に描写したように、常磁性磁気モーメントは磁束渦糸と FFLO ノード面に局在する一方で、その交差点では消失する。

SNS 接合系の知見を基にすると、このような FFLO ノード面と磁束渦糸との交差点 A における低エネルギー準粒子状態の消失に対する定性的な理解が得られる。磁束渦糸或いは FFLO ノード面のみを横切る経路を考えると、常に秩序変数の位相差は π となっており Andreev 束縛状態が形成される。一方で、図4左下図にて交差点を通る経路 $E \rightarrow A \rightarrow C$ を考えると、FFLO ノード面による位相シフトと磁束渦糸のそれとが相殺し合うことにより結果的な位相シフトは 2π となる。一方で、交差点 A 近傍を速度 v_F で横切る低エネルギー準粒子のエネルギーは FFLO 重心運動量 $\mathbf{Q} \parallel \hat{z}$ に起因したドップラーシフト $E \rightarrow E \pm \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}_F$ を

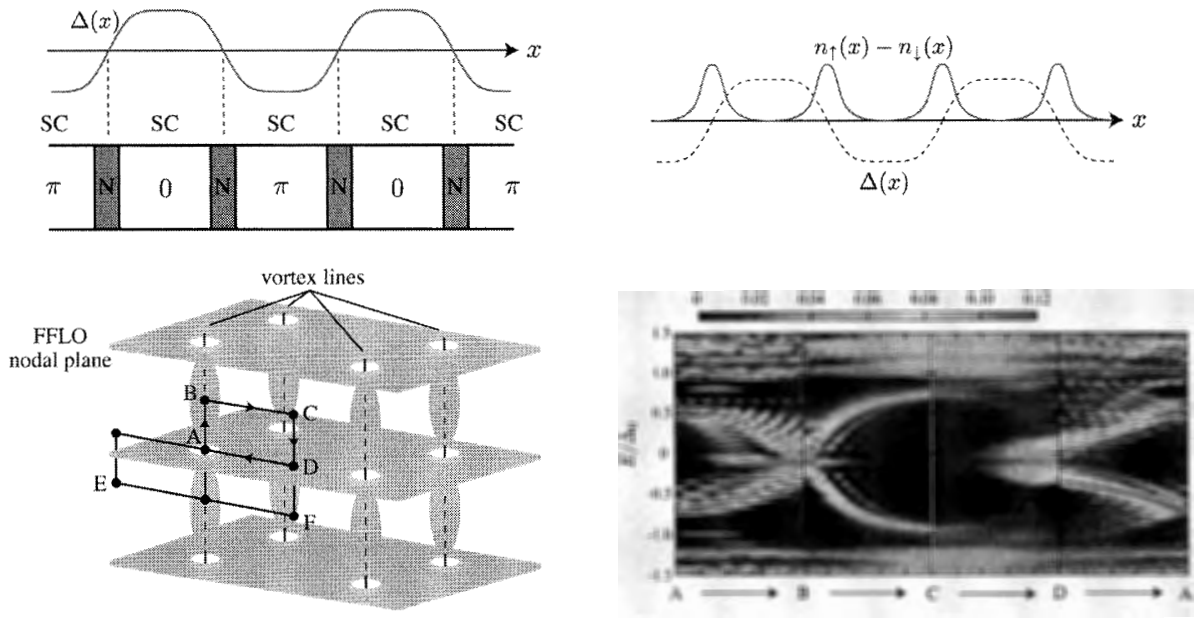


図 4: FFLO 状態の概念図 (左上) とそのときの常磁性磁気モーメントの空間構造 (右上). FFLO ノード面と磁束渦糸が共存する状態での磁化の空間構造の概念図 (左下) とそのときの局所状態密度 (右下).

受ける [25]. このシフト量は交差点 A で開くエネルギーギャップを定量的に説明する. 以上の理解は BdG 理論体系固有のものではなく, 準古典近似の範囲内でも再現される [26]. また, s 波クーパー対状態のかわりに $d_{x^2-y^2}$ や d_{xy} 等の異方的な超伝導状態を考えても定性的な結論は変わらない [26].

以上の様な常磁性磁気モーメントの非自明な空間構造は核磁気共鳴 (NMR) の実験を通して観測可能である. 電子スピンと核スピンとの超微細相互作用が無視できないとき, 超伝導物質中の原子核スピンの感じる磁場は電子系の常磁性磁気モーメントの空間構造により支配される. NMR の実験では核スピンの運動を観測しているが, このときの共鳴周波数は内部磁場と電子系の作り出す常磁性磁化による有効的な内部磁場により決定される. FFLO ノード面と磁束渦糸とが共存する場合において, 共鳴周波数に対するスペクトルはダブルピーク構造を持つことが理論的に示され [26], CeCoIn_5 での実験結果 [27] を説明する. このダブルピークは FFLO ノード面と磁束渦糸とに収容された常磁性磁気モーメントが別々に寄与している.

3.3 冷却原子気体

冷却原子気体系でもこのような常磁性と超伝導の競合に関する研究が行われている. 冷却原子気体の実験では超微細スピン F を持つアルカリ原子を磁場で作られたトラップを用いて捕獲する. 超微細スピン F は原子種によって異なるが, $2F+1$ 個の超微細スピン状態の占有数は振動磁場を用いて制御できる. この系では 1 次ゼーマン効果は無視されるため, 代わりに振動磁場を用いて直接的に各スピン状態の粒子数を制御することになる. 例えば, $2F+1$ 個の超微細スピン状態のうち 2 つを占有するとする ($\uparrow, \downarrow$ と記す). この 2 つの粒子数比 $P \equiv (N_\uparrow - N_\downarrow)/(N_\uparrow + N_\downarrow)$ が有限の値をとるように振動磁場を用いて制御すると, 結果的に各スピン状態のフェルミ面がゼーマン分裂した様な状況を作り出すことができる [28]. 特筆すべき点は, $P=0$ のバランスした状況から $P=1$ の完全に偏極した状況まで高精度で制御可能なことである. 最

近, Hulet のグループ [29] は 1 次元的な制限空間内にて FFLO 相への転移を示唆する実験結果を報告している. BCS-BEC クロスオーバー領域でも上で紹介したスピン密度の局在等の定性的な結論は変わらないが, BEC 極限へ近づくにつれてフェルミオンの自由度が消失することに伴い, スピン密度の FFLO ノード面や渦糸近傍への局在性も見られなくなる [30, 14].

4 スピンレス p 波超伝導体の零エネルギー固有状態と非可換統計性

4.1 零エネルギー固有状態の存在とトポロジカル相転移

スピン偏極した p 波超伝導体/超流動体は軌道自由度に起因した多成分秩序変数で表される: $\hat{\Delta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\hat{\tau}_0 + \hat{\tau}_3)\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, ただし, $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sum_m \Delta_m(\mathbf{r})\phi_{1,m}(\mathbf{k})$. 2 次元的に制限された空間を考えると, 基底状態は $(\Delta_{+1}, \Delta_0, \Delta_{-1}) \propto (1, 0, 0)$ となる. つまり, クーパー対の軌道角運動量が特定の方向に偏極しており, 軌道強磁性状態と呼ばれる. この状態は時間反転対称性を自発的に破っており, カイラル状態とも呼ばれる.

さて, この軌道強磁性状態の量子渦周りの準粒子励起を考えてみる: $\Delta_{+1}(\mathbf{r}) = \Delta_{+1}(\rho)e^{i\kappa\theta}$. 弱結合極限 $k_F\xi \approx E_F/\Delta \gg 1$ では, 3.1 節での s 波の CdGM 状態の分散が以下のように変更される [31, 33, 32]:

$$E_{n,q,k} = -\left(q - \frac{\kappa+1}{2}\right) \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k^2/2M\mu}} + \left(n + \frac{\kappa-1}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{k^2}{2M\mu}}\omega_1, \quad (16)$$

ここで, $\omega_{0,1}$ は式 (14) におけるそれらと同等である. このとき固有関数は,

$$\begin{bmatrix} u_{n,q,k}(\mathbf{r}) \\ v_{n,q,k}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \mathcal{N} e^{iq\theta} e^{ikz} \begin{bmatrix} f_q(\rho) \\ f_{q-\kappa+1}(\rho) e^{-i(\kappa-1)\theta} \end{bmatrix} \exp\left[-\frac{1}{v_\mu} \int_0^\rho \Delta(\rho') d\rho'\right], \quad (17)$$

となる. $\mathcal{N}$ は規格化因子. 式 (16) と s 波での結果 (14) との違いは右辺第 1 項であり, この結果として, 軌道強磁性状態での量子渦束縛状態は

$$q = \frac{\kappa+1}{2} \in \mathbb{Z} \quad (18)$$

を満たす場合に厳密に零エネルギーを持つことがわかる. $q \in \mathbb{Z}$ の要請より, 渦度 κ が奇数の場合にのみエネルギー固有値が厳密に零になり得る. さらに, 式 (16) より, 零エネルギー固有状態は k に対する分散を持たないフラットバンドを示すことがわかる [34]. Tewari ら [35] は Andreev 近似が成立する様な弱結合領域 $k_F\xi \gg 1$ において, 量子渦状態の BdG 方程式 (4) が質量項を伴う 1 次元 Dirac 方程式 (厳密には Majorana 方程式) へマップできることを示した. さらに, 渦度 κ が奇数のときには位相差 π を持つ SNS 接合系の BdG 方程式 (7) へ完全にマップすることができる. 一方で, 渦度 κ が偶数のときは空間一様な質量ギャップを伴う 1 次元 Dirac 方程式と等価になり, これは位相差 0 の SNS 接合系に対応する.

式 (16) は弱結合極限 $k_F\xi \approx E_F/\Delta \gg 1$ での結果であるが, Gurarie-Radzihovsky (GR) [36] は任意のパラメータ Δ/E_F 領域において零エネルギー固有値の存在を議論し, $\mu > 0$ を満たす限り常に量子渦束縛状態の最低エネルギーは厳密に零となることを示した. 彼らの結論を紹介するために便利なパラメータ $k_\mu\xi$ を導入する ($k_\mu = \sqrt{2M\mu}$). $k_\mu\xi \approx k_F\xi \gg 1$ は弱結合極限に対応し, $k_\mu\xi = 0$ はトポロジカル相転移点を示す. 零エネルギー固有状態は $\mu > 0$ を満たす限り常に存在するが, その固有関数 (17) は $k_\mu\xi > 1$ では $f_q(\rho) = J_q(\rho k_\mu \sqrt{1 - (k_\mu\xi_0)^{-2}})$ となり k_F^{-1} 程度の量子振動を伴う. $k_\mu\xi < 1$ では変形ベッセル関数 I_q を用

いて, $f_q(\rho) = I_q(\rho k_\mu \sqrt{(k_\mu \xi_0)^{-2} - 1})$ となる. 式 (17) に現れている指数関数因子は零エネルギー固有状態が束縛状態であることを示しているが, $I_q(x)$ の $x \gg 1$ での指数関数的発散により相殺される. つまり, トポロジカル相転移近傍 $0 < k_\mu \xi_0 < 1$ では零エネルギー準粒子状態は渦芯束縛状態ではなく, 系全体に広がりを持つ. ただし, GR の解析では秩序変数の空間的な一様性を仮定しているという点で不完全である. 文献 [32] では広範囲なパラメータ領域において BdG 方程式 (4) とギャップ方程式 (2) の自己無撞着な計算が行われ, トポロジカル相転移点近傍における零エネルギー固有状態に関する GR の解析は定性的に正しいことが示された.

4.2 零エネルギー固有状態の Majorana 性と非可換統計性

何故零エネルギー固有状態の存在を強調したのか? これを説明するために, まず相対論的な Dirac 場と Majorana 場の違いについて触れておきたい. Dirac 方程式は Lorentz 変換に対して共変性を示す 4 成分スピノルを用いて導出される. この解は $E > 0$ のエネルギー固有状態 φ_E と $E < 0$ に対する φ_{-E} で構成される. 完全系を成すこれらのエネルギー固有状態を用いて Dirac 場 Ψ_D は以下のように展開できる:

$$\Psi_D(x) = \sum_{E>0} \left[\varphi_E(x) e^{-iEt} a_E + \varphi_{-E}(x) e^{iEt} b_E^\dagger \right]. \quad (19)$$

ここで, a_E, b_E はエネルギー E を持つ粒子と反粒子の演算子である. 一方の Majorana 方程式は Lorentz 共変な 2 成分スピノルより導かれる. この 2 成分スピノルで定義される Majorana 粒子はそれ自身の反粒子と等価である. つまり, Majorana 場 Ψ_M は

$$\Psi_M(x) = \sum_{E>0} \left[\varphi_E(x) e^{-iEt} a_E + C \varphi_E(x) e^{iEt} a_E^\dagger \right], \quad (20)$$

として, $E > 0$ を持つ固有状態の生成・消滅演算子を用いて展開できる [37]. ただし, C は荷電共役変換を表す. この Dirac, Majorana 場において仮に $E=0$ の固有状態が存在したとする. そのとき, Ψ_D は

$$\Psi_D(x) = \varphi_{E=0}(x) \alpha + \sum_{E>0} \left[\varphi_E(x) e^{-iEt} a_E + \varphi_{-E}(x) e^{iEt} b_E^\dagger \right], \quad \alpha = a_0 + b_0^\dagger, \quad (21)$$

となる. つまり, Dirac の零エネルギー固有状態は粒子と反粒子が等価に寄与することで形成されている. ここで, $a_0 \neq b_0$ はともに反交換関係を満たすため, 零エネルギー固有状態の演算子 α もフェルミ粒子として振る舞う. 一方で, Majorana 場の場合は

$$\Psi_M(x) = \varphi_{E=0}(x) \alpha + \sum_{E>0} \left[\varphi_E(x) e^{-iEt} a_E + C \varphi_E(x) e^{iEt} a_E^\dagger \right], \quad \alpha = a_0 + a_0^\dagger, \quad (22)$$

となり, Majorana 零エネルギー固有状態はその消滅演算子 α がそれ自身の生成演算子 $\alpha^\dagger$ と等価になる: $\alpha = \alpha^\dagger$. 実際に, Majorana 場の正準交換関係を要請すると直ちに, Majorana 零エネルギー固有状態の演算子は Clifford 代数の交換関係 $\{\alpha, \alpha\} = 2$ を満たすことが示される. 即ち, この零エネルギー粒子はフェルミ統計性に従わないことがわかる. Majorana 零エネルギー固有状態が奇妙な代数関係を満たすことから必然的にこの粒子の統計性が非可換となることが示されるが, ここではスペースの都合上詳細には立ち入らず, 参考文献を紹介するにとどめておく [1, 2, 37, 38].

さて、以上を踏まえた上で、相対論的な言葉を超伝導体の場合に置き換えて考える。超伝導体での $E=0$ をフェルミエネルギーに設定すると、相対論的な粒子生成 $a_E^\dagger$ というのは $E>0$ の Bogoliubov 準粒子の生成に対応し、反粒子 $b_E^\dagger$ は $-E<0$ の準粒子の生成に対応する。つまり、上記の $\varphi_E(x)$ は BdG 方程式 (4) の固有関数であり、 a_E, b_E はエネルギー E の固有状態の演算子である。スピン偏極した場合の BdG 方程式の持つ対称性より、正のエネルギー固有状態 $E>0$, $[u_E, v_E]$ は負のエネルギー固有状態 $-E<0$, $[u_{-E}, v_{-E}] = [v_E^*, u_E^*]$ と 1 対 1 対応する。相対論的な言葉で言うと、粒子と反粒子の区別がなくなっているということに対応しており、スピン偏極した p 波超伝導体は Majorana 場を用いて表現されることができ、スピン自由度がある場合に非可換統計性を実現するためには外場や温度等の環境に対して非常に強い制約が課せられる [39]。

スピン 1 重項の場合にも同様にエネルギー固有状態の 1 対 1 対応が成立する。しかし、エネルギー固有値の符号を反転させると同時にスピンも反転するため粒子と反粒子の等価性に対応した関係式が成立しない。これは、2.1 節で導入した 4 次元の Nambu 空間はスピン 1 重項の場合には可約であり、 $[\Psi_\uparrow, \Psi_\uparrow^\dagger]^T$ と $[\Psi_\downarrow, \Psi_\downarrow^\dagger]^T$ の 2 つのセクターに分解されることに起因している。つまり、スピン 1 重項超伝導体の場合は $\uparrow$ スピンの粒子演算子と $\downarrow$ スピンの正孔演算子の 2 成分を基にした Dirac 場で記述される。

4.3 表面束縛状態とトポロジカル超伝導

2.3 節でも触れたように、軌道強磁性状態ではその特異な準粒子構造に起因して擬スピン n の織目構造が得られる。 $\mu>0$ の弱結合領域での擬スピン構造が非自明であることは、運動量空間での 2 次元球面 S^2 から 2 次元球面 S^2 で定義されるスピノル空間へのマッピングを考えることで理解できる。詳細は省くが、これは第 2 ホモトピー群 $\pi_2(S^2)$ によって記述され、トポロジカル不変量 $\mathcal{N} \equiv \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ が導入される [3]。実際に $\mu>0$ で実現される擬スピン構造は非自明な不変量 $\mathcal{N}=1$ で特徴づけられる一方で、 $\mu<0$ では自明な値をとる $\mathcal{N}=0$ 。このように、バルク領域で非自明なトポロジカル不変量を持つ超伝導体はトポロジカル超伝導体と呼ばれ、スピンレス p 波超伝導体以外にも幅広く存在することが知られている。例えば、 $^3\text{He-B}$ 相の様な時間反転対称性を持つ p 波超流動体は $\mathbb{Z}_2$ 数を用いて位相幾何学的な分類がされる [38]。

バルクで導入されたトポロジカル不変量はいくまで概念的なものであり、それを直接観測することはできない。しかしながら、バルクでの非自明な不変量の存在は試料の表面における準粒子構造に間接的に現れることが分かっている。これを理解するために、具体的に、軌道強磁性状態の表面を考える。ここで、面に垂直な方向を x 軸としよう。ここで、 $x>0$ に対して $U(x)=0$, $x<0$ では $U(x)=U_0 \gg E_F$ という階段型の外部ポテンシャル $U(x)$ を導入する。これは局所的に化学ポテンシャルを変化させる： $\mu \rightarrow \mu_{\text{eff}}(x) \equiv \mu - U(x)$ 。図 5 に示したように、試料内での化学ポテンシャルを $\mu>0$ とするとその準粒子構造は非自明なトポロジカル不変量 $\mathcal{N}=1$ で特徴づけられるが、試料の外では $\mu_{\text{eff}}(x)<0$ となり自明な値 $\mathcal{N}=0$ を持つ。この様に考えると、トポロジカル超伝導体の表面は一種のトポロジカル相転移点と見なすことができ、2.3 節での議論を適用するとギャップレスな分散を持つ準粒子状態がこの表面に束縛されていることが期待される。

このようなトポロジカルな観点以外にも、BdG 方程式 (4) を直接的に解析することで、この系の問題を位相差 π を持つ SNS 接合系の問題 (式 (7)) へマップすることができる [7]。結果として、低エネルギー準粒子が線形な分散を持つことが示され、トポロジカル不変量に基づく議論とコンセンサスを得る。尚、表面

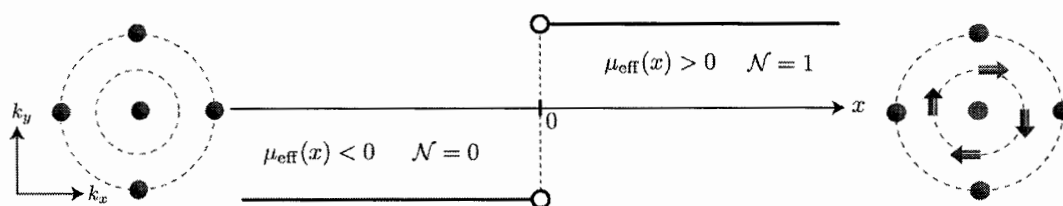


図 5: 軌道強磁性状態の表面の概念図

に束縛された準粒子の分散が線形になるのは軌道強磁性状態が自発的に時間反転対称性を破っているためであり、時間反転対称性を保つ p 波超伝導体では表面束縛状態の分散はコーン型になる。このような分散の違いにより、軌道強磁性状態では表面に質量流が流れ、時間反転対称性を持つ超伝導体ではスピン流が流れる [40].

5 おわりに

このノートでは、超伝導/超流動体における量子渦の微視的な構造について、特に BdG 理論に基づく結果を紹介してきた。これらの結果は一般的なもので、超伝導物質系以外にも冷却原子気体系やカラー超伝導等にも適用される。特にトポロジカル相転移によって低エネルギー準粒子状態が劇的に変えられることを紹介した。4 節のスピン偏極した p 波超伝導体の理論はスピン 3 重項超伝導/超流動体の低エネルギーの有効理論となっており、 ^3He の A 相や Sr_2RuO_4 等で実現が期待されている半整数量子渦もスピン偏極した Majorana 型準粒子を内在していることが指摘されている。また、軌道強磁性状態は $\nu=5/2$ 分数量子ホール状態の基底状態の候補である Moore-Read Pfaffian (MR) 状態と数学的に等価であるため、Majorana 準粒子や渦の非可換性等の物理現象も MR 状態と共有される [3, 2].

準古典理論は BdG 理論の弱結合極限での有効理論となっているため、BdG 理論の情報が一部失われている。例えば、3, 4 節で触れたように、準粒子状態は平均粒子間隔 k_F^{-1} と超伝導コヒーレンス長 ξ という異なる 2 つの長さスケールで記述されるが、準古典理論では k_F^{-1} 程度の物理が無視される。このような理論の簡略化の恩恵として、準古典理論は弱結合超伝導体や超流動体に対する定量的な理論を提供する。つまり、超伝導物質のフェルミ面の複雑な形状やギャップ関数の異方性等の物質固有の情報を取り込んだ計算を行なうことが可能になる。例えば、高磁場中の超伝導体では磁束渦糸が密に周期的に配列している。この密な磁束渦糸によって低エネルギーの状態密度が増幅され、比熱等の熱力学量が低温にて特異な振る舞いをする [41]. また、フェルミ面の形状とギャップ関数の異方性、即ち電子状態と超伝導状態の競合の結果として多数の磁束渦糸の織りなす周期構造が三角形、四角形、二等辺三角形、さらには不等辺三角形等へ移り変わる [42]. この様な磁束渦糸格子の形態学 (morphology) を理解することで、そこから超伝導物質の電子状態やギャップ関数等を決定することも可能である。このような定量的な研究は BdG 理論では現実的には不可能であり、準古典理論を用いることで物質固有の興味深い物理現象が抽出されるだろう。

また、このノートでは量子渦に束縛されたフェルミオン励起についてのみ触れたが、量子渦そのもののボソニックな励起というのも興味深い。量子渦糸の低エネルギー励起として渦糸が螺旋振動する Kelvin モードが知られているが、これは量子乱流の散逸過程で重要な役割を演じることが指摘されており、近年になっ

て注目されつつある。さらに、量子渦糸が格子を形成すると、この格子の弾性振動モードが低エネルギー励起として存在する (Tkachenko モード) が、これは超流動状態そのものの安定性や超流動から量子ホール状態への量子相転移などと直接的に関わっていると指摘されている。この様な量子渦の励起状態は冷却原子気体 BEC において実験的に実現され、理論との整合性が定量的に議論されている [43, 44]。しかしながら、フェルミオンの自由度を内在する場合の量子渦の運動がどのようなものになるのかについては未だ謎である。量子渦の物理を究めていくことで、超流動性の起源と終焉が垣間見えてくるかもしれない。

参考文献

- [1] D. A. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **86**, 268 (2001).
- [2] C. Nayak, S.H. Simon, A. Stern, M. Freedman, S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **80**, 1083 (2008).
- [3] N. Read and D. Green, Phys. Rev. B **61**, 10267 (2000).
- [4] N. B. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity* (Oxford University Press, Oxford 2001).
- [5] G. Eilenberger, Z. Phys. **214**, 195 (1968); J. W. Serene and D. Rainer, Phys. Rep. **101**, 221 (1983).
- [6] S. Kashiwaya and Y. Tanaka, Rep. Prog. Phys. **63**, 1641 (2000).
- [7] M. Stone and R. Roy, Phys. Rev. B **69**, 184511 (2004).
- [8] K. Machida and H. Nakanishi, Phys. Rev. B **30**, 122 (1984).
- [9] K. Enomoto, K. Kasa, M. Kitagawa, and Y. Takahashi, Phys. Rev. Lett. **101**, 203201 (2008).
- [10] T.-L. Ho and R.B. Diener, Phys. Rev. Lett. **94**, 090402 (2005).
- [11] A. J. Leggett, in *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter*, edited by A. Pekalski and J. Przystawa (Springer, Berlin, 1980).
- [12] P. Pieri and G. C. Strinati, Phys. Rev. Lett. **91** 030401 (2003).
- [13] C. Caroli, P. G. de Gennes, and J. Matricon, Phys. Lett. **9**, 307 (1964).
- [14] K. M. Suzuki, T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. A **77**, 063617 (2008).
- [15] H. F. Hess *et al.*, Phys. Rev. Lett. **62**, 214 (1989); **64**, 2711 (1990).
- [16] N. Hayashi, T. Isoshima, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. Lett. **80**, 2921 (1998).
- [17] H. Nishimori *et al.*, J. Phys. Soc. Jpn. **73**, 3274 (2004).
- [18] M. Möttönen *et al.*, Phys. Rev. A **68**, 023611 (2003).
- [19] A. Kanda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 257002 (2004).

- [20] T. Isoshima *et al.*, Phys. Rev. A **61**, 063610 (2000); A. E. Leanhardt *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 190403 (2002).
- [21] N. Hayashi, M. Ichioka, and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 3368 (1998).
- [22] M. W. Zwierlein *et al.*, Nature **435**, 1047 (2005).
- [23] Y. Matsuda and H. Shimahara, J. Phys. Soc. Jpn. **76**, 051005 (2007).
- [24] P. Fulde and R.A. Ferrell, Phys. Rev. **135**, A550 (1964); A.I. Larkin and Y.N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **20**, 762 (1965).
- [25] T. Mizushima, K. Machida, and M. Ichioka, Phys. Rev. Lett. **95**, 117003 (2005).
- [26] M. Ichioka, H. Adachi, T. Mizushima, and K. Machida, Phys. Rev. B **76**, 014503 (2007).
- [27] K. Kumagai, H. Shishido, T. Shibauchi, and Y. Matsuda, Phys. Rev. Lett. **106**, 137004 (2011).
- [28] T. Mizushima *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 060404 (2005); K. Machida *et al.*, *ibid* **97**, 120407 (2006).
- [29] Y.-a. Liao *et al.*, Nature **467**, 567 (2010).
- [30] M. Takahashi, T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. Lett. **97**, 180407 (2006).
- [31] T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. Lett. **101**, 150409 (2008).
- [32] T. Mizushima and K. Machida, Phys. Rev. A **81**, 053605 (2010); **82**, 023624 (2010).
- [33] 水島健, 市岡優典, 町田一成, 日本物理学会誌 **64**, 836 (2009).
- [34] Y. Tsutsumi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **101**, 135302 (2008).
- [35] S. Tewari, S. Das Sarma, and D.-H. Lee, Phys. Rev. Lett. **99**, 037001 (2007).
- [36] V. Gurarie and L. Radzihovsky, Phys. Rev. B **75**, 212509 (2007).
- [37] G. W. Semenoff and P. Sodano, Electron. J. Theor. Phys. **10**, 157 (2006).
- [38] 日本語の解説として, 佐藤昌利, 物性研究 **94**, 311 (2010).
- [39] T. Kawakami, T. Mizushima, and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **80**, 044603 (2011).
- [40] X.-L. Qi, T. L. Hughes, S. Raghu, and S.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **102**, 187001 (2009).
- [41] N. Nakai, P. Miranović, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. B **73**, 172501 (2006).
- [42] N. Nakai, P. Miranović, M. Ichioka, and K. Machida, Phys. Rev. Lett. **89**, 237004 (2002); K. M. Suzuki, K. Inoue, P. Miranović, M. Ichioka, and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **79**, 013702 (2010).
- [43] T. Mizushima *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 180401 (2003); T. P. Simula *et al.*, *ibid* **101**, 020402 (2008).
- [44] T. Mizushima *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 060407 (2004).