

Cluster Variables on Double Bruhat Cells and Monomial Realizations of Crystal Bases

上智大学 理工学研究科 金久保 有輝

Yuki Kanakubo

Faculty of Science and Technology,
Sophia University

記号

G : simply connected semi simple algebraic group of rank r , B, B_- : opposite Borel subgroups,
 N, N_- : unipotent radicals, $H := B \cap B_-$, W : Weyl group of G , ω_i : fundamental weight,
 $g := \text{Lie}(G)$, $[1, i] := \{1, 2, \dots, i\}$ (For $i \in \mathbb{Z}_{>0}$), $I := [1, r] = \{1, \dots, r\}$.

1 Introduction

1.1 Cluster algebra

1930 年代, totally positivity の研究が行われていた. Totally positivity とは, 全ての小行列式 (minor) が非負になる, という行列の性質のことである. この初等的な行列の性質の研究は, 1994 年に Lusztig によって一般化された. 小行列式は, 行列の集合の上の関数と見なすことができる. Lusztig は, この “行列の集合” を一般の “代数群 G ” に, “小行列式” を “**generalized minor**” に置き換えて研究したのである. この研究の中で, 代数群 G の非交和分解

$$G = \coprod_{u,v \in W} G^{u,v}, \quad G^{u,v} := BuB \cap B_-vB_-$$

が用いられた. 各 $G^{u,v}$ を, **Double Bruhat cell** と呼ぶ.

2002 年には, Fomin と Zelevinsky により, $G^{u,v}$ の座標環 $\mathbb{C}[G^{u,v}]$ と generalized minors $\Delta(k, \mathbf{i})$ に関する予想が立てられた [3]. これは, $\mathbb{C}[G^{u,v}]$ が generalized minors $\{\Delta(k, \mathbf{i})\}$ を生成元の一部に持ち, 他の生成元も exchange relation と呼ばれる関係式によって, $\{\Delta(k, \mathbf{i})\}$ から次々と生成される, という予想である. 他の代数多様体の座標環でも, このような性質を持つものが多く見つかっており, これらを統一的に扱うために **cluster algebra** が導入された. このとき, $\Delta(k, \mathbf{i})$ は **cluster variables** と呼ばれた.

1.2 Main results : Cluster variable and crystal

今回は, $G = SL_{r+1}(\mathbb{C})$ とし, generalized minors $\Delta(k, \mathbf{i}) \in \mathbb{C}[G^{u,v}]$ を座標変換することを考える. 座標変換を施すと,

1. $\Delta(k, \mathbf{i})$ は, 係数 1 の Laurent 多項式となることがわかった.
2. 更にその各項を, ある crystal base $B(\lambda)$ の元として書き表すことができた.

二つ目の項目について, 少し詳しく説明しよう. $B(\lambda)$ は, 量子群 $U_q(g)$ の既約最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ の $q = 0$ における基底と考えることのできるもので, 作用素 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ と絡んだ, 扱い易い性質を持っている (Sect. 4). $B(\lambda)$ の各元は, しばしば Young tableau によって表示され, これにより, $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ の作用やウェイトの勘

定を組合せ論的に扱うことができるようになる。それ以外にも $B(\lambda)$ の表示法は多く知られているが、今回は **monomial** 表示という方法を用いる。これは、 $B(\lambda)$ の各元を Laurent 単項式で表示する方法である。 $\Delta(k, \mathbf{i})$ を座標変換して得られた Laurent 多項式の各項が、ある crystal base を monomial 表示したものであることがわかったのである。この結果について紹介する。本研究は、上智大学の 中島俊樹 教授との共同研究である。

2 Generalized minors for A type

Generalized minor を定義しよう [4]. $G_0 = N_-HN$ を、Gaussian decomposition を持つような元 $x \in G$ 全体として定義される開部分集合とする。この分解は一意的であり、この分解に即して $x = [x]_-[x]_0[x]_+$, $[x]_- \in N_-$, $[x]_0 \in H$, $[x]_+ \in N$ と記すことにする。

定義 2.1. 各 $u, v \in W = \mathfrak{S}_{r+1}$ と $i \in [1, r]$ に対する **generalized minor** $\Delta_{u\omega_i, v\omega_i}$ とは、 G 上の正則関数で、開部分集合 $\bar{u}G_0\bar{v}^{-1}$ へのその制限が

$$\Delta_{u\omega_i, v\omega_i}(x) = ([\bar{u}^{-1}x\bar{v}]_0)^{\omega_i}$$

で与えられるものである。

$G = SL_{r+1}(\mathbb{C})$ の場合、 $\Delta_{u\omega_i, v\omega_i}(x)$ は次のようにして求めることができる：

命題 2.2. [4] ワイル群 $W = \mathfrak{S}_{r+1}$ の元 u, v に対し、 $\Delta_{u\omega_i, v\omega_i}$ の $x \in G = SL_{r+1}(\mathbb{C})$ での値 $\Delta_{u\omega_i, v\omega_i}(x)$ は、行が、集合 $u([1, i])$ の元、列が、集合 $v([1, i])$ の元でラベル付けされる x の小行列式として与えられる。

つまり、 G が A 型の代数群の場合、generalized minors は普通の意味での minor(小行列式) に他ならないのである。例を見てみよう。

例 2.3. $r = 3$, $u = s_1s_2s_3$, $v = s_1s_2$, $x = (x_{ij}) \in G = SL_{r+1}(\mathbb{C})$ のとき、 $\Delta_{u\omega_2, v\omega_2}(x)$ は次のようにして求められる：

$$u[1, i] = s_1s_2s_3\{1, 2\} = \{2, 3\}, \quad v[1, i] = s_1s_2\{1, 2\} = \{2, 3\}$$

より、

$$\Delta_{u\omega_2, v\omega_2}(x) = \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32}$$

となる。

定義 2.4.

- (1) $u = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$, $v = s_{i_{n+1}} \cdots s_{i_{n+m}}$ を、 $u, v \in W$ の reduced expressions とする。このとき、 (u, v) と、その reduced expressions に対する **reduced word** を

$$\mathbf{i} = (\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n, i_{n+1}, \dots, i_{n+m})$$

で定める。ここに、 $\bar{j}$ は形式的な記号である。

- (2) $k \in [1, l(u) + l(v)]$ に対し、次のようにおく。

$$u_{\leq k} = u_{\leq k}(\mathbf{i}) := \begin{cases} s_{i_1} \cdots s_{i_k} & \text{if } k \leq n, \\ u & \text{if } k > n. \end{cases}$$

$$v_{>k} = v_{>k}(\mathbf{i}) := \begin{cases} s_{i_{n+m}} s_{i_{n+m-1}} \cdots s_{i_{k+1}} & \text{if } k \geq n \\ v^{-1} & \text{if } k < n. \end{cases}$$

以上の準備のもと, upper cluster algebra $\mathbb{C}[G^{u,v}]$ の中で, cluster variables の役割をする $\Delta(k, \mathbf{i})$ を次のようにして定義する.

定義 2.5.

$$\Delta(k; \mathbf{i})(x) := \Delta_{u \leq k \omega_{|i_k|}, v_{>k} \omega_{|i_k|}}(x).$$

3 Double Bruhat cells and coordinate transformations

Introduction でも述べたように, double Bruhat cell は次のように定義される:

定義 3.1. ワイル群の二つの元 $u, v \in W$ に対し, $G^{u,v} := BuB \cap B_{-v}B_{-}$ を **double Bruhat cell**, $L^{u,v} := NuN \cap B_{-v}B_{-} \subset G^{u,v}$ を **reduced double Bruhat cell** という.

$G^{u,v}$, $L^{u,v}$ を座標変換することを考えよう. そのために, 次のように三つの行列を用意する.

$1 \leq i \leq r$ に対し

$$x_i(t) = i \text{ 行目} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & t \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{\bar{i}}(t) = i \text{ 行目} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & t & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$x_{-i}(t) = i \text{ 行目} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & t^{-1} & 0 \\ & & & 1 & t \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置く. $u, v \in W$, $\mathbf{i}$ を定義 2.4 のように取り, 写像 $\mathbf{x}_{\mathbf{i}}^G : H \times (\mathbb{C}^\times)^{n+m} \rightarrow G$ を

$$\mathbf{x}_{\mathbf{i}}^G(a, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m}) := a x_{i_1}^-(t_1) \cdots x_{i_n}^-(t_n) x_{i_{n+1}}(t_{n+1}) \cdots x_{i_{n+m}}(t_{n+m})$$

で定める. また, $\mathbf{x}_{\mathbf{i}}^L : (\mathbb{C}^\times)^{n+m} \rightarrow G$ を

$$\mathbf{x}_{\mathbf{i}}^L(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m}) := x_{-i_1}(t_1) \cdots x_{-i_n}(t_n) x_{i_{n+1}}(t_{n+1}) \cdots x_{i_{n+m}}(t_{n+m})$$

で定める. このとき, $G^{u,v}$, $L^{u,v}$ に関する次の同型対応が成り立つことが知られている:

定理 3.2. [2][3] ある $G^{u,v}$ (resp. $L^{u,v}$) の Zariski open な部分集合 U (resp. U') があり, 次の双正則同型が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^G : H \times (\mathbb{C}^\times)^{n+m} &\xrightarrow{\sim} U \\ (\text{resp. } \mathbf{x}_1^L : (\mathbb{C}^\times)^{n+m} &\xrightarrow{\sim} U') \end{aligned}$$

となる.

この定理を用いて, $G^{u,v}$ 上の関数である $\Delta(k, \mathbf{i})$ を, $H \times (\mathbb{C}^\times)^{n+m}$, または $(\mathbb{C}^\times)^{n+m}$ 上の関数と見なすことにする:

定義 3.3. $a \in H$ と, $\mathbf{t}, \tau \in (\mathbb{C}^\times)^{n+m}$ に対し, $H \times (\mathbb{C}^\times)^{n+m}$ (resp. $(\mathbb{C}^\times)^{n+m}$) 上の関数 $\Delta^G(k, \mathbf{i})(a, \mathbf{t})$ (resp. $\Delta^L(k, \mathbf{i})(\tau)$) を

$$\begin{aligned} \Delta^G(k; \mathbf{i})(a, \mathbf{t}) &:= (\Delta(k; \mathbf{i}) \circ x_1^G)(a, \mathbf{t}), \\ \Delta^L(k; \mathbf{i})(\tau) &:= (\Delta(k; \mathbf{i}) \circ x_1^L)(\tau) \end{aligned}$$

で定める.

4 Crystal

4.1 Crystal と, 量子群の表現論

一般に, crystal は次のように定義される [6]:

定義 4.1. $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を対称化可能な一般 Cartan 行列, $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を A の Cartan datum とする. Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ に付随する crystal とは, 集合 B と, 写像 $wt : B \rightarrow P$, $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \rightarrow B \cup \{0\}$ と $\varepsilon_i, \varphi_i : B \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $(i \in I)$ との組で, 以下を満たすもののことである:

$b \in B$, $i \in I$ に対し,

1. $\varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) = \langle h_i, wt(b) \rangle$,
2. $wt(\tilde{e}_i b) = wt(b) + \alpha_i$, if $\tilde{e}_i b \in B$,
3. $wt(\tilde{f}_i b) = wt(b) - \alpha_i$, if $\tilde{f}_i b \in B$,
4. $\varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$, $\varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$ if $\tilde{e}_i b \in B$,
5. $\varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1$, $\varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1$ if $\tilde{f}_i b \in B$,
6. $\tilde{f}_i b = b' \Leftrightarrow b = \tilde{e}_i b'$, if $b, b' \in B$,
7. $\varphi_i(b) = -\infty$, $(b \in B) \Rightarrow \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0$.

この定義は, 量子群 $U_q(g)$ の既約最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ の crystal base $B(\lambda)$ の性質を一般化したものである. そこで, 量子群の表現論を簡単に復習しておこう. 詳細は [6] を参照して頂きたい.

$U_q(g)$ を Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ に付随し, $\mathbb{F}$ を基礎体とする量子群とする. $V(\lambda)$ (λ は dominant weight) を $U_q(g)$ の既約最高ウェイト表現, u_λ をその最高ウェイトベクトルとする. $V(\lambda)$ には **Kashiwara operators** $\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ が作用する. これは, $f_i, e_i \in U_q(g)$ の作用を修正した作用素である (定義は [6]).

$V(\lambda)$ は $\mathbb{F}(q)$ 上のベクトル空間となる. $\mathbb{F}(q)$ の元で, $q = 0$ で正則なもの全体を $\mathbb{A}$ とおく. $L(\lambda)$ を, $\tilde{f}_{i_1} \tilde{f}_{i_2} \cdots \tilde{f}_{i_s} u_\lambda (s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i_k \in I)$ で張られる $V(\lambda)$ の自由 $\mathbb{A}$ 部分加群とする. 更に集合 $B(\lambda)$ を,

$$B(\lambda) := \{\tilde{f}_{i_1} \tilde{f}_{i_2} \cdots \tilde{f}_{i_s} u_\lambda \mid s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i_k \in I\}$$

で定める. このとき, 次が成り立つ [6]:

1. $\tilde{e}_i L(\lambda) \subset L(\lambda)$, $\tilde{f}_i L(\lambda) \subset L(\lambda)$ ($i \in I$),
2. $\tilde{e}_i B(\lambda) \subset B(\lambda) \cup \{0\}$, $\tilde{f}_i B(\lambda) \subset B(\lambda) \cup \{0\}$ ($i \in I$),
3. $B(\lambda)$ は, $L(\lambda)/qL(\lambda)$ の $\mathbb{F}$ 基底となる.

$L(\lambda)/qL(\lambda)$ は, $V(\lambda)$ において, $q = 0$ とした空間である. このように, $B(\lambda)$ は $V(\lambda)$ の $q = 0$ における基底と考えることができるのである.

また, $i \in I$ に対し, 写像 $\varepsilon_i, \varphi_i : B \rightarrow \mathbb{Z}$ を

$$\varepsilon_i(b) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k b \in B\},$$

$$\varphi_i(b) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{f}_i^k b \in B\}$$

で定める. また, $wt : B \rightarrow P$ を, $b \in B_\mu := B(\lambda) \cap V(\lambda)_\mu$ のとき, $wt(b) = \mu$ として定める. このとき, $B = B(\lambda)$, $\tilde{f}_i$, $\tilde{e}_i$, ε_i , φ_i , wt は, crystal の公理 (定義 4.1, 1~7) を満たす [6].

組 $(L(\lambda), B(\lambda))$ のことを, $V(\lambda)$ の **crystal base** と呼ぶ. このように, crystal は, crystal base を一般化した概念なのである.

最低ウェイト表現 $V^-(\lambda)$ に対しても, crystal base $(L^-(\lambda), B^-(\lambda))$ を構成することができ, これも crystal となる. ここに,

$$B^-(\lambda) := \{\tilde{e}_{i_1} \tilde{e}_{i_2} \cdots \tilde{e}_{i_s} u'_\lambda \mid s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i_k \in I\}$$

で, u'_λ は $V^-(\lambda)$ の最低ウェイトベクトルである. これと区別するために, 以下, $V(\lambda)$ のことを $V^+(\lambda)$, $(L(\lambda), B(\lambda))$ のことを $(L^+(\lambda), B^+(\lambda))$ と書くことにする.

4.2 Monomial realizations

$B^\pm(\lambda)$ を, $U_q(g)$ -既約最高 (最低) ウェイト加群 $V^\pm(\lambda)$ に対する crystal bases とする. Young tableau を始め, crystal base の表示方法は多く知られている. 今回はその表示方法の一つである monomial realization に着目する. これは, $B^\pm(\lambda)$ の各元を Laurent 単項式で表し, Kashiwara operators $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ の作用を Laurent 単項式の積で表すものであり ([1], [5]), 以下のように構成される:

$A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ を対称化可能な一般 Cartan 行列とする. $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を A の Cartan datum とする. 整数の集合 $p = (p_{i,j})_{i,j \in I, i \neq j}$ で, $p_{i,j} + p_{j,i} = 1$ を満たすようなものを一つ取り, 固定する.

$\mathcal{Y}$ の定義

変数の集合 $\{Y_{m,i} \mid i \in I, m \in \mathbb{Z}\}$ に対し, Laurent 単項式の集合 $\mathcal{Y}$ を

$$\mathcal{Y} := \{Y = \prod_{m \in \mathbb{Z}, i \in I} Y_{m,i}^{l_{m,i}} \mid l_{m,i} \in \mathbb{Z}, l_{m,i} \text{ は有限個を除いて } 0\}.$$

で定める.

写像 $wt, \varepsilon_i, \varphi_i$ の定義

写像 $wt : \mathcal{Y} \rightarrow P$ と, $\varepsilon_i, \varphi_i : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$, ($i \in I$) を, 次のように定める:

$\mathcal{Y}$ の元 $Y = \prod_{m \in \mathbb{Z}, i \in I} Y_{m,i}^{l_{m,i}}$ に対し,

$$wt(Y) = \sum_{i,m} l_{m,i} \Lambda_i, \quad \varphi_i(Y) = \max \left\{ \sum_{k \leq m} l_{k,i} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \varepsilon_i(Y) = \varphi_i(Y) - wt(Y)(h_i)$$

で定める.

$\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ の定義

$$A_{m,i} := Y_{m,i} Y_{m+1,i} \prod_{j \neq i} Y_{m+p_j,i,j}^{a_{j,i}}$$

とおく.

Kashiwara operators $\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ の $\mathcal{Y}$ への作用を, 次のように定める:

$$\tilde{f}_i Y = \begin{cases} A_{n_f,i}^{-1} Y & \text{if } \varphi_i(Y) > 0 \\ 0 & \text{if } \varphi_i(Y) = 0, \end{cases} \quad \tilde{e}_i Y = \begin{cases} A_{n_e,i} Y & \text{if } \varepsilon_i(Y) > 0 \\ 0 & \text{if } \varepsilon_i(Y) = 0. \end{cases}$$

ここに, $n_f := \min \left\{ n \mid \varphi_i(Y) = \sum_{k \leq n} l_{k,i} \right\}$, $n_e := \max \left\{ n \mid \varphi_i(Y) = \sum_{k \leq n} l_{k,i} \right\}$ である.

定理 4.2. [1, 5]

- (1) 上のように定めた $(\mathcal{Y}, wt, \varphi_i, \varepsilon_i, \tilde{f}_i, \tilde{e}_i)_{i \in I}$ は, crystal となる.
- (2) $Y \in \mathcal{Y}$ が全ての $i \in I$ について $\varepsilon_i(Y) = 0$ を満たすなら, Y を含む連結成分は $B(wt(Y))$ に同型である.

例 4.3. $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ とし, 無限列

$$\mathbf{j} = (i_1, i_2, i_3, \dots),$$

を $i_k = i_l$, if $k \equiv l \pmod n$ で定める. この $\mathbf{j}$ から, 整数の集合 $(p_{k,l})$ を次のようにして定める:

$$p_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{if } i_k < i_l, \\ 0 & \text{if } i_l < i_k. \end{cases}$$

$\lambda = \beta \Lambda_d$ (resp. $\lambda = -\beta \Lambda_d$), ($\beta \in \mathbb{Z}_{>0}, d \in I$) に対し, $\text{Crystal } B^+(\lambda)$ (resp. $B^-(\lambda)$) を $\mathcal{Y}$ に以下のようにして埋め込むことができる:

$$v_\lambda \mapsto Y_{\beta+\gamma,d} Y_{\beta-1+\gamma,d} \cdots Y_{1+\gamma,d}, \quad (\text{resp. } v_\lambda \mapsto \frac{1}{Y_{\beta+\gamma,d} Y_{\beta-1+\gamma,d} \cdots Y_{1+\gamma,d}}),$$

ここに, v_λ は $B^+(\lambda)$ (resp. $B^-(\lambda)$) の highest (resp. lowest) weight vector で, γ は任意の整数である. この埋め込みを $\mu^+(\beta, \gamma)$ (resp. $\mu^-(\beta, \gamma)$) と記すことにする.

4.3 Demazure Crystal

ワイル群 W の元 w に対し, **Demazure crystal** $B^+(\lambda)_w$ が定められる. これは, $\text{crystal } B^+(\lambda)$ の部分集合で, 次のようにして定められる.

定義 4.4. v_λ を, $B^+(\lambda)$ の highest weight vector とする. ワイル群 W の単位元 e に対し, $B^+(\lambda)_e := \{v_\lambda\}$ と定める. $w \in W$ に対し, $s_i w < w$ のとき,

$$B^+(\lambda)_w := \{\tilde{f}_i^k b \mid k \geq 0, b \in B^+(\lambda)_{s_i w}, \tilde{e}_i b = 0\} \setminus \{0\}$$

と定める.

同様に、 $B^-(\lambda)_w$ を次のようにして定める。

定義 4.5. v_λ を、 $B^-(\lambda)$ の lowest weight vector とする。 $B^-(\lambda)_e := \{v_\lambda\}$ と定める。 $w \in W$ に対し、 $s_i w < w$ のとき、

$$B^-(\lambda)_w := \{\tilde{e}_i^k b \mid k \geq 0, b \in B^-(\lambda)_{s_i w}, \tilde{f}_i b = 0\} \setminus \{0\}$$

と定める。

5 Main result

以下、 G が A 型代数群の場合、つまり $G = SL_{r+1}(\mathbb{C})$ の場合を考えていく。

5.1 $v = e$ の場合

ワイル群の元 $u, v \in W$ を次のようなものとして取ろう：

$$u = s_1 s_2 \cdots s_r s_1 \cdots s_{r-1} \cdots s_1 \cdots s_{r-m+2} s_1 \cdots s_{i_n}, \quad v = e.$$

これに応じて、 u, v に対する reduced word $\mathbf{i}$ を

$$\mathbf{i} = (\underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{r}}_{1 \text{ 周目}}, \underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{r}-1}_{2 \text{ 周目}}, \dots, \underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{r}-\bar{m}+2}_{m-1 \text{ 周目}}, \underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{i}_n}_{m \text{ 周目}})$$

で定める。 $\mathbf{i}$ の中で、左から k 番目の数を $\bar{i}_k$ とする。 $\bar{i}_k$ が m' 周目に属するとする。

例 4.3 のように、

$$\mathbf{j} = (\underbrace{1, \dots, r}_{1 \text{ 周目}}, \underbrace{1, \dots, (r-1)}_{2 \text{ 周目}}, \dots, \underbrace{1, \dots, (r-m+2)}_{(m-1) \text{ 周目}}, \underbrace{1, \dots, i_n}_{m \text{ 周目}})$$

に対して、 $B^-(\lambda)$ ($\lambda = (m' - m)\Lambda_d$) を $\beta = m - m'$, $\gamma = m' - 1$ として、 $\mathcal{Y}$ へ埋め込む。更に $l_0 := 0$, $l_1 := r$, $l_2 := r + (r - 1), \dots, l_m := r + (r - 1) + \dots + (r - m + 1), \dots, l_r := r + (r - 1) + \dots + 2 + 1$ とおき、変数 $Y_{m,j}$ を、 τ の変数 τ_{l_m+j} に変数変換する。これにより、 $\{\tau_{m+j}\}$ を $\mathcal{Y}$ の元と見なす。

このとき、次の定理が成り立つ：

定理 5.1. $i_k = d$ とする。

$$\Delta^L(k; \mathbf{i})(\tau) = \sum_{x \in B^-(\lambda)_{u \leq k}} \mu^-(m - m', m' - 1)(x), \quad \lambda := (m' - m)\Lambda_d$$

が成り立つ。

このように、generalized minor を座標変換したところ、各項を、ある Demazure crystal の元で書き表すことができた。

例 5.2. $u = s_1 s_2 s_3 s_4 s_1 s_2 s_3 s_1$, $v = e$, $\mathbf{i} = (-1, -2, -3, -4, -1, -2, -3, -1)$ とする。定理 3.2, 命題 2.2 を用いて計算をすると、

$$\Delta^L(1; \mathbf{i})(\tau) = \frac{\tau_1 \tau_5}{\tau_2 \tau_6} + \frac{\tau_1}{\tau_2 \tau_8} + \frac{1}{\tau_5 \tau_8},$$

となる.

一方, 今は A 型の場合を考えているので, 一般 Cartan 行列 $A = (a_{ij})$ は, $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = -1$, $a_{ij} = 0$, ($|i-j| > 1$) を満たす. これと $\tilde{e}_i$ の作用の定義から

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1 \frac{1}{\tau_5 \tau_8} &= \frac{\tau_1 \tau_5}{\tau_2} \frac{1}{\tau_5 \tau_8} = \frac{\tau_1}{\tau_2 \tau_8}, \\ \tilde{e}_1 \tilde{e}_1 \frac{1}{\tau_5 \tau_8} &= \tilde{e}_1 \frac{\tau_1}{\tau_2 \tau_8} = \frac{\tau_5 \tau_8}{\tau_6} \frac{\tau_1}{\tau_2 \tau_8} = \frac{\tau_1 \tau_5}{\tau_2 \tau_6}\end{aligned}$$

である. よって,

$$\Delta^L(1; \mathbf{i})(\tau) = \tilde{e}_1 \tilde{e}_1 \frac{1}{\tau_5 \tau_8} + \tilde{e}_1 \frac{1}{\tau_5 \tau_8} + \frac{1}{\tau_5 \tau_8} = \sum_{x \in B^-(-2\Lambda_1)_{s_1}} \mu^-(2, 0)(x)$$

となる. この場合, $\frac{1}{\tau_5 \tau_8}$ が, ウェイト $-2\Lambda_1$ を持つ最低ウェイトベクトルである.

5.2 v が一般の場合

u は, $u = s_1 s_2 \cdots s_r s_1 \cdots s_{r-1} \cdots s_1 \cdots s_{r-m+2} s_1 \cdots s_{i_{n_u}}$ ととる. これに対し, v は u と順番を逆にして, $v = s_{i'_{n_v}} \cdots s_1 s_{r-m+2} \cdots s_1 \cdots s_{r-1} \cdots s_1 s_r \cdots s_2 s_1$ ととる.

これに対応して, (u, v) の reduced word $\mathbf{i}$ を

$$\mathbf{i} = (\underbrace{\bar{1}, \dots, \bar{r}}_{1 \text{ 周目}}, \underbrace{\bar{1}, \dots, \overline{r-1}}_{2 \text{ 周目}}, \dots, \underbrace{\bar{1}, \dots, \overline{r-m_u+2}}_{m_u-1 \text{ 周目}}, \underbrace{\bar{1}, \dots, \overline{i_{n_u}}}_{m_u \text{ 周目}}, \\ \underbrace{i'_{n_v}, \dots, 1}_{m_u+1 \text{ 周目}}, \underbrace{(r-m_v+2), \dots, 1}_{m_u+2 \text{ 周目}}, \dots, \underbrace{(r-1), \dots, 1}_{m_u+m_v-1 \text{ 周目}}, \underbrace{r, \dots, 1}_{m_u+m_v \text{ 周目}}) \quad (2)$$

と設定する. k が m' 周目に属するとする.

まず, 新たな関数 $\hat{\Delta}^L(k; \mathbf{i})(\tau)$ を定義する. これは, $\Delta^L(k; \mathbf{i})(\tau)$ を修正したものであり, 変数変換を施すことで, $\Delta^L(k; \mathbf{i})(\tau)$ や $\Delta^G(k; \mathbf{i})(a, \mathbf{t})$ と一致する.

$\Delta^L(k; \mathbf{i})(\tau)$ を求めるためには, 行列

$$x_{-1}(\tau_1) x_{-2}(\tau_2) \cdots x_{i_{n_u}}(\tau_{n_u}) x_{i'_{n_v}}(\tau_{n_u+1}) \cdots x_2(\tau_{n_u+n_v-1}) x_1(\tau_{n_u+n_v}) \quad (3)$$

の, 行 $u \leq_k \{1, \dots, d\}$, 列 $v >_k \{1, \dots, d\}$ で作られる小行列式であった. (定理 3.2, 命題 2.2).

そこで, 新たに行列 $x_{\frown_i}(\tau_j)$, ($i > 0$) を

$$x_{\frown_i}(\tau_j) := \begin{matrix} i \text{ 行目} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \tau_j & 1 & \\ & & & 0 & \tau_j^{-1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

で定義し, (3) の積の中の $x_i(\tau_j)$, ($i > 0, n_u + 1 \leq j \leq n_u + n_v$) を全て $x_{\widehat{i}}(\tau_j)$ で置き換えた

$$x_{-1}(\tau_1)x_{-2}(\tau_2)\cdots x_{i_{n_u}}(\tau_{n_u})x_{\widehat{i}_{n_v}}(\tau_{n_u+1})\cdots x_{\widehat{2}}(\tau_{n_u+n_v-1})x_{\widehat{1}}(\tau_{n_u+n_v}) \quad (4)$$

という行列を考える. 関数 $\hat{\Delta}^L(k; \mathbf{i})(\tau)$ を次のように定義する:

定義 5.3. $\hat{\Delta}^L(k; \mathbf{i})(\tau)$ を, 行列 (4) の, 行 $u_{\leq k}\{1, \dots, d\}$, 列 $v_{> k}\{1, \dots, d\}$ で作られる小行列式として定めることにする.

定義 5.4. Dominant weight λ と, ワイル群の元 $u, v \in W$ に対し, Double Demazure crystal $B_{u,v}(\lambda)$ を

$$B_{u,v}(\lambda) := B^+(\lambda)_u \cap B^-(\lambda)_v$$

で定める.

$\mathbb{Z}^d$ 上の半順序 $\leq$ を, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d)$ に対し,

$$a \leq b \Leftrightarrow a_i \leq b_i, \text{ for all } i$$

で定める. $m_0 := \min(m_v, m')$, $\alpha := (1, 2, \dots, d)$, $\beta := (m_0 + 1, m_0 + 2, \dots, m_0 + d)$ とおくとき, 次が成り立つ.

定理 5.5. $i_k = d$, ($1 \leq k \leq n_u$) とする. 各 $\xi \in \mathbb{Z}^d$, ($\alpha \leq \xi \leq \beta$) に対し, ある dominant weights $\lambda_\xi, \lambda'_\xi$ と, $u_\xi, v_\xi \in W$ ($u_\xi \leq u$, $v_\xi \leq v$) と, $Z_\xi \in \mathcal{Y}$, そして埋め込み $M : B_{v^{-1}, v_\xi}(\lambda_\xi) \rightarrow \mathcal{Y}$, $M' : B_{u_{\leq k}, u_\xi}(\lambda'_\xi) \rightarrow \mathcal{Y}$ が存在し,

$$\hat{\Delta}^L(k; \mathbf{i})(\tau) = \sum_{\alpha \leq \xi \leq \beta} \left(\left(\sum_{x \in B_{v^{-1}, v_\xi}(\lambda_\xi)} M(x) \right) Z_\xi \left(\sum_{y \in B_{u_{\leq k}, u_\xi}(\lambda'_\xi)} M'(y) \right) \right)$$

となる.

定理 5.6. $\Delta^G(k; \mathbf{i})(a, \mathbf{t})$, $\Delta^L(k; \mathbf{i})(\tau)$ は, $\hat{\Delta}^L(k; \mathbf{i})(\tau)$ に適当に変数変換を施すことで, 得ることができる.

参考文献

- [1] Nakajima H, t-analogs of quantum affine algebras of type A_n and D_n , Contemp. Math, 325, AMS, Providence, RI, 141–160 (2003).
- [2] Arkady Berenstein and Andrei Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math. 143 No. 1, 77–128 (2001).
- [3] Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky, Cluster Algebras 1 : Foundations. JAMS vol.15, No 2, 497-529 (2002).
- [4] Arkady Berenstein, Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky, Cluster algebras 3 : Upper bounds and double bruhat cells. Duke Mathematical Journal vol. 126 No1, 1–52 (2005).
- [5] Kashiwara M. Realizations of crystals. Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001).
- [6] Kashiwara M. On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras. Duke Mathematical Journal vol. 63, No. 2.(1991)