

Barnes integral と Generalized hypergeometric equation について

広島大 理学部 河野實彦

線型微分方程式

$$(1) \quad \left\{ \prod_{j=1}^p (D + d_j) - \frac{d}{dx} \prod_{j=1}^q (D + \beta_j - 1) \right\} x(x) = 0$$

$$D \equiv x \frac{d}{dx}, \quad (q+1 \geq p).$$

の大域的性質を考察する。この微分方程式は“一般化された超幾何微分方程式”(Generalized hypergeometric differential equation, 今後, G.H.E と略記する)と呼ばれるもので, その名は 次のような事実により, 命名されたものと思われる。即ち, 上の微分方程式は, 原点 $x=0$ において, 確定特異点を有し, 局所論によれば, 確定特異点の近傍における解は

$$(2) \quad x(x) = x^p \sum_{m=0}^{\infty} G(m) x^m$$

なる収束巾級数の形で表わされるものが存在する訳で

あるが、そのとき、係数 $G(m)$ が、例へば

$$(13) \quad G(m) = \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(m+1+d_j - \rho_k)}{\prod_{j=1}^{q+1} \Gamma(m+1+\rho_j - \rho_k)}$$

となり、級数 (2) は 正に Gauss の超幾何級数の一般化に当たっている。さて、 m を変数とみれば

(3) の $G(m)$ の形を見れば、 $G(m)$ は一階の差分方程式を満たしている事は容易にわかるが、逆に、確定特異点の近傍における収束巾級数解の係数 $G(m)$ が、有理関数を係数にもつ一階差分方程式を満たすような微分方程式は、いつも $G.H.E$ に帰着されるというのが、H. Schepfe の結果 (1942) である。例へば、拡張された Bessel の微分方程式と云うか、又は Turrittin の微分方程式とも云われる

$$(4) \quad x^{(n)}(t) - t^v x(t) = 0$$

v : arbitrary complex number

も、 $z = \beta t^K$ なる変数変換を行えば

$$(5) \quad t^n \frac{d^n}{dt^n} = [KD]_n, \quad D \equiv z \frac{d}{dz}$$

なる関係式を得て、 $z = z''$ $K = n+v$, $\beta = (n+v)^{-n}$ とおくことにより、上の微分方程式は

$$(6) \quad \frac{d}{ds} \left(D - \frac{1}{s+v} \right) \left(D - \frac{2}{s+v} \right) \cdots \left(D - \frac{m-1}{s+v} \right) x(s) - x(s) = 0$$

に変換される。即ち、Turritin の微分方程式も G.H.E の特別の場合に過ぎないのである。

さて、G.H.E は $q+1=p$ のときは Fuchs 型であり、 $s=0, s=1, s=\infty$ に確定特異点を持つこの場合は、ここでは考える必要にする。これから $q+1 > p$ と仮定し、 $s=0$ が確定特異点、 $s=\infty$ が不確定特異点の場合の大域的解析について説明しよう。

まず、G.H.E の解を積分

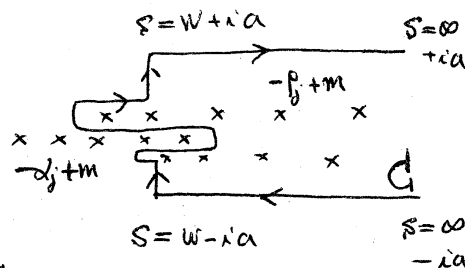
$$(7) \quad x(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(s) t^s ds$$

の形で求めて見よう。

ここで、積分路 C は $s=\infty - i\alpha$

から、 $s=W - i\alpha$ に直線上に沿って

進み、そこから $s=W + i\alpha$ には適当な路を通って行き、 $s=W + i\alpha$ から $s=\infty + i\alpha$ には、また直線上を進むものとする。(a, W は後で適当に決める実数) このよき積分路は Barnes contour と呼ばれ、また積分(7)を Barnes integral と言う。いま、形式的な計算を行えば、 $\varphi(s)$ は一階の差分方程式



$$(8) \quad \varphi(s+1) = \frac{\prod_{j=1}^p (s+d_j)}{(s+1) \prod_{j=1}^q (s+\beta_j)} \varphi(s)$$

を満足しなければならぬ事を知らず、差分方程式の理論によつて、(8)の一般解は

$$(9) \quad \varphi(s) = \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(s+d_j)}{\Gamma(s+1) \prod_{j=1}^q \Gamma(s+\beta_j)} p(s) \equiv \varphi_0(s) p(s)$$

の形で表わされる。 $p(s)$ は任意の周期 1 をもつ周期関数である。実は、この周期関数 $p(s)$ の決め方が、G.H.E の大域的解析のミソなのであるから、いま、周期関数

$$(10) \quad p_k(s) = \frac{e^{-\pi i s}}{\sin \pi (s+\beta_k)}$$

に対応する特殊解 (9) を $\varphi_k(s) = \varphi_0(s) p_k(s)$ とし、

$$(11) \quad x_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi_k(s) t^s ds$$

なる積分を考える。ここで、Barnes contour C の a, w は、 $a > \max \{ |\operatorname{Im}(-\beta_j)| \}$, $w < \min \{ \operatorname{Re}(-\beta_j), 0 \}$ のように選ぶ、 $s = w - i'a$ から $s = w + i'a$ までの路は、 $-d_j - \nu$ ($j=1, 2, \dots, p$; $\nu=0, 1, 2, \dots$) なる点がある。全て、路の左側にあるように決める。

仮定 $q+1 > p$ より、積分 (11) は収束し、先の形式的

計算の正当性も保証されることは容易にわかる。即ち、それは G, H, E の解となり、また、留数の定理により

$$(12) \quad x_k(t) = -\frac{e^{\pi i \rho_k}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(m+1-\rho_k+\rho_j)}{\prod_{j=1}^{q+1} \Gamma(m+1-\rho_k+\rho_j)} t^{1-\rho_k+m}$$

$$\text{但し } \rho_{q+1} = 1.$$

を得るが、 $\rho_j \neq \rho_k \pmod{\text{integer}} \quad (j \neq k)$ なる仮定の下では、上の収束巾級数解 $x_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, q+1$) が、確定特異点 $t=0$ の近傍における基本解となることも明らかであろう。

ところで、特性定数 ρ_j ($j=1, 2, \dots, q+1$) の中で、ある一つの ρ_k に対して、それと整数差の特性定数がある場合、いくつかある場合には、基本解の構成を如何にするか、良いかについて、説明しよう。いま

$$(13) \quad \rho_k = \rho_{k,0} \leq \rho_{k,1} \leq \rho_{k,2} \leq \dots \leq \rho_{k,h_k}$$

と仮定する。この場合には、周期関数 φ

$$(14) \quad P_{k,h}(s) = \left(\frac{e^{-\pi i s}}{\sin \pi(s+\rho_k)} \right)^{h+1}, \quad (0 \leq h \leq h_k)$$

をとるのである。そして $\varphi_{k,h}(s) = \varphi_0(s) P_{k,h}(s)$ とし

$$(15) \quad x_{k,h}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi_{k,h}(s) t^s ds \quad (0 \leq h \leq h_k)$$

と定義すれば, これは線形独立な解となることか
 れかる。実際, この事を知るためには, 留数計算を
 すればよい。 Barnes contour C の右側に存在す
 る $\varphi_{k,h}(s)$ の極 $-p_k+m$ ($m=1,2,\dots$) の位数は
 高々 $h+1$ であるので

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{e^{-\pi i s}}{\sin \pi(s+p_k)} \right)^{h+1} &= (2i)^{h+1} e^{\pi i(h+1)p_k} \sum_{\mu=0}^{\infty} B_{\mu}^{(h+1)} \frac{(2\pi i(s+p_k-m))^{\mu-h-1}}{\mu!} \\ B_{\mu}^{(h+1)} \quad (\mu=0,1,2,\dots) &\text{は } (h+1)\text{位の Bernoulli 数} \end{aligned} \right.$$

なる関係式を用いて, $\text{Res } \varphi_{k,h}(s)t^s \Big|_{s=m-p_k}$ を求めると

$$(17) \quad \text{Res } (\varphi_{k,h}(s)t^s) \Big|_{s=m-p_k}$$

$$= \lim_{s \rightarrow m-p_k} \left\{ \frac{1}{h!} \frac{d^h}{ds^h} \left((s+p_k-m)^{h+1} \varphi_{k,h}(s)t^s \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{h!} \left(\frac{e^{\pi i p_k}}{\pi} \right)^{h+1} \sum_{l=0}^h h C_{h-l} (\log t)^{h-l} t^{-p_k+m}$$

$$\times \sum_{\mu=0}^l l C_{\mu} B_{\mu}^{(h+1)} (2\pi i)^{\mu} \varphi_0^{(l-\mu)}(m-p_k)$$

$$\equiv \left(\sum_{l=0}^h G_{k,h}^l(m-1) (\log t)^{h-l} \right) t^{-p_k+m}$$

を得る。よって、結局、次のような h_k+1 の解を得た訳で、これらの線形独立性は形から、明らかである；

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} x_{k,h}(t) &= - \sum_{l=0}^h (\log t)^{h-l} \left(\sum_{m=0}^{\infty} G_{k,h}^l(m) t^{1-\beta_k+m} \right) \\ G_{k,h}^l(m) &= \left(\frac{e^{\pi i \beta_k}}{\pi} \right)^{h+1} \frac{1}{(h-l)!} \sum_{\mu=0}^l \frac{(2\pi i)^{\mu}}{\mu! (l-\mu)!} B_{\mu}^{(h+1)} \varphi_0^{(l-\mu)}(m+1-\beta_k) \\ &\quad (0 \leq h \leq h_k) \end{aligned} \right.$$

さて、 G, H, E の大域的解析を行うために、新たな特殊解を定義しなくてはならない。

周期関数 E

$$(19) \quad \tilde{p}(s) = \prod_{j=1}^{g+1} \left(\frac{\pi e^{-\pi s \alpha_j}}{\sin \pi(s+\beta_j)} \right)$$

$$\text{とあって、} \quad \hat{\varphi}(s) = \varphi_0(s) \tilde{p}(s),$$

$$(20) \quad \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \hat{\varphi}(s) t^s ds$$

と定義すれば、積分 $\tilde{x}(t)$ は、E.W. Barnes により始めて (1907)、その大域的性質の研究がなされた関数なのである。

この関数 $\hat{x}(t)$ と (18) における原点 $t=0$ の近傍の
基本解 $x_{k,h}(t)$ との間には

$$(21) \quad x_{k,h}(t) = \sum_{l=0}^{q-h} T_l(k,h) \hat{x}(te^{2\pi i l})$$

$$(0 \leq h \leq h_k)$$

なる関係式が成立ち、 $x_{k,h}(t)$ の大域的解析は、
 $\hat{x}(t)$ のそれを通して、なされるのである。 二二二、
係数 $T_l(k,h)$ は 容易にわかるように、代数的方法で
簡単に計算され、後に 1) による Stokoe 係数と
呼ばれるものとなるのである。

さて、 $\hat{x}(t)$ の大域的性質の解析であるが、
それは 次の二つの補助定理による。

補助定理 1 関数

$$(22) \quad \varphi_0(s) = \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(s+d_j)}{\prod_{j=1}^{q+1} \Gamma(s+p_j)}$$

は、次の様に 階乗級数 によって 漸近展開 される。

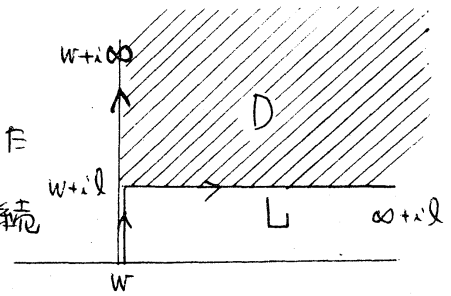
$$(23) \quad \varphi_0(s) = (\mu^s)^d \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{A_j}{\Gamma(\mu s + d + j)} + O\left(\frac{1}{\Gamma(\mu s + d + N)}\right) \right\}$$

$$\text{as } s \rightarrow \infty \text{ in } |\arg s| < \pi - \varepsilon$$

二二二、 $\mu = q+1-p$, $d = \sum_{j=1}^{q+1} p_j - \sum_{j=1}^p d_j + \frac{1}{2}(p-q)$,
 A_j は 定数 。

補助定理 2

関数 $\psi(s)$ は、右図の斜線とった領域 D において境界をめぐって連続であり、内部では analytic であるとする。今、領域 D の中で、 s は充分大きくしたとき、



$$(24) \quad \psi(s) = \frac{O(1)}{\Gamma(\mu s + G)} \quad \text{as } s \rightarrow \infty \text{ in } D$$

が成立つと、仮定すれば、積分

$$(25) \quad G(t) = \int_L \psi(s) t^s ds$$

$$(26) \quad g(t) = \int_w^{w+i\infty} \psi(s) t^s ds$$

に関して、 $G(t)$ は $\arg t$ の t に対して、絶対収束し、 $g(t)$ は $\arg t > \frac{1}{2}\mu\pi$ において、絶対収束する。また $G(t)$ は $g(t)$ の領域 $\arg t \leq \frac{1}{2}\mu\pi$ における解析接続となつてゐる。更に、領域 $\arg t \geq \frac{1}{2}\mu\pi + \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$) においては

$$(27) \quad G(t) \equiv g(t) = O(t^w)$$

が成立つ。

この二つの補助定理と、(19)で定義した周期関数 $\hat{p}(s)$ 上の領域 D において、 $e^{2\pi i s}$ の巾級数展開、即ち、次のような Fourier 展開

$$(28) \quad \hat{p}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{2\pi i s_j} \quad \text{in } D$$

あることにより、Barnes 積分 $\hat{\zeta}(s)$ の大域的性質が解かれるのである。その詳しいことについては、これ以上述べない。

さて、話が急に変わって申訳だが、実数上での特異境界値問題の研究において、固有値の分布状態を調べる問題は、一つの重要な研究である。即ち、固有値が discrete な場合に、これらの固有値が如何に分布しているかを説明することであるが、二階の自己随伴型微分方程式

$$(29) \quad -x'' + q(x)x = \lambda x$$

に対しては、Titchmarsh により、例へば

$$(30) \quad N(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{X_\lambda} \sqrt{\lambda - q(t)} dt + O(1)$$

ここで、 X_λ は $q(X_\lambda) = \lambda$ なる値、なる結果が得られる。

特に, $q(t) = t$ の場合には

$$(31) \quad N = \frac{1}{\pi} \frac{2}{3} \lambda_N^{\frac{3}{2}} + K + O(\lambda_N^{-\frac{1}{2}})$$

となるが, 一般の n 階自己随伴型微分方程式に対しては, 未だほとんど, この種の問題は研究されていない。その理由は, 二階微分方程式に対しては, 解の零点分布と関連づけられ, それらの良くわかった Bessel 関数と固有関数との比較という方法により, 上の結果は得られた誤であるが, 一般の微分方程式に対しては, 解の零点分布の解析は, これまた別な大変困難な問題であり, これまで二階の微分方程式と同様な解析は行えなかった。

最近, McLeod が n 階自己随伴型微分方程式

$$(32) \quad x^{(2n)} + (-1)^{n-1}(\lambda - t)x = 0$$

に対する固有値分布問題を解いた。これは, 上の微分方程式において, $z = (\lambda - t)$ なる変数変換を行えば, 正に Turritin の方程式 (4) に帰着され, Turritin, Heading 等による (4) の大域的解析の結果を用いて,

$$(33) \quad N = \frac{2n}{\pi(2n+1)} \lambda_N^{\frac{2n+1}{2n}} + K + O(\lambda_N^{-\frac{1}{2n}})$$

先にも述べた如く, Scheffé の結果によると, 係数 $p_l(t)$ が全て,

$$(36) \quad p_l(t) = (a_l^{(0)} + a_l^{(k)} t^k) t^{z(n-l)} \quad (l=1, 2, \dots, n)$$

となる微分方程式は, 必ず G. H. E に帰着され, このときに

$$(37) \quad \begin{cases} a_l^{(0)} \geq 0, a_l^{(k)} \geq 0 & (l=1, 2, \dots, n-1) \\ a_n^{(k)} > 0 \end{cases}$$

の条件を課することは, 一般のときの条件 (35) と比べてそれほど不自然ではないからである。そして, 自己随伴型 G. H. E にあする特異境界値問題の固有値分布に関して, (33) と類似の結果を導こうというのが, これから研究課題であり, G. H. E の大域的解析を詳しく調べる一つの目的でもある。

〔参考文献〕

- (1) E. W. Barnes, The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series, Proc. London Math. Soc (2), 5 (1907) pp 59-116

- (2) B. L. J. Braaksma, Asymptotic expansions and analytic continuations for a class of Barnes-integrals, *Composito Math*, 15 (1964) pp 239-341
- (3) B. L. J. Braaksma, Asymptotic analysis of a differential equation of Turrittin, *SIAM. J. Math. Anal*, 2 (1971) pp 1-16.
- (4) K. Okubo, Stokes 現象 I. II, 函数方程式 第15卷 第3号.
- (5) E. C. Titchmarsh, Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Vol 1, Oxford (1962)
- (6) M. A. Naimark, Linear differential operators
- (7) J. B. McLeod, On the distribution of eigenvalues for an n -th order equation, *Quart. J. Math. Oxford* (2), 17 (1966) pp 112-131.