

## Robinson-Schensted 対応と left cell

東京商船大 有木 進

ここでは、G. Lusztig の *left cell* の理論によく取り上げられる例、すなわち対称群の *left cell* への分割は、*Q-symbol* による同値類別に一致すること (本文中の定理 A)、および *left cell* と *primitive ideal* の関係 (本文中の定理 B、定理 C) などを証明付きで紹介します。

Robinson-Schensted 対応の用語については、寺田君の用語に従います。

### 1. まずは紹介したい話を。

**P-symbol と Q-symbol.**  $\mathfrak{S}_n$  を  $n$  次対称群とし、その元  $w$  を、  
 $w = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ w_1 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$  のとき  $w_1 w_2 \cdots w_n$  なる 1 から  $n$  までの自然数の列と同一視します。そして  $P(w) = \emptyset \leftarrow w_1 \leftarrow w_2 \leftarrow \cdots \leftarrow w_n$  ,  
 $Q(w) = P(w^{-1})$  により、 $w$  の *P-symbol* と *Q-symbol* を定義します。

例.  $w = 31524$  ならば、

$$P(w) = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{array} \quad Q(w) = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{array}$$

**KL 多項式.** 他方、Kazhdan-Lusztig 多項式と呼ばれる多項式は次のように定義されます。

## 2

まず  $q$  を不定元とし、 $\mathfrak{S}_n$  の Hecke 環を

$$(T_{s_i} + 1)(T_{s_i} - q) = 0$$

$$T_{s_i} T_{s_{i+1}} T_{s_i} = T_{s_{i+1}} T_{s_i} T_{s_{i+1}}$$

$$T_{s_i} T_{s_j} = T_{s_j} T_{s_i} \quad (|i - j| > 1)$$

を基本関係にもつ  $\mathbb{Q}(q)$  上の associative algebra とする。ここで  $s_i = (i, i+1)$  は  $\mathfrak{S}_n$  の生成元。また、 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$  を  $w$  の最短表示とすると、 $T_w = T_{s_1} T_{s_2} \cdots T_{s_r}$  とおけば、 $\{T_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$  が Hecke 環の基底を与える。

定義. 次の2つの条件を満たす多項式  $P_{y,w}(q)$  がただ1つ存在する。これを KL 多項式という。ただし、 $y < w$  等は Bruhat order である。

$$\begin{aligned} (1) \quad C_w &= \sum_{y \leq w} (-1)^{l(w)-l(y)} q^{\frac{l(w)}{2}-l(y)} P_{y,w}(q^{-1}) T_y \\ &= \sum_{y \leq w} (-1)^{l(w)-l(y)} q^{-\frac{l(w)}{2}+l(y)} P_{y,w}(q) T_y^{-1} \end{aligned}$$

$$(2) \quad P_{y,w}(q) \text{ は } q \text{ の多項式で、} P_{w,w}(q) = 1 \text{ かつ、}$$

$$y < w \text{ のとき次数は } \frac{l(w) - l(y) - 1}{2} \text{ 以下。}$$

$P_{y,w}(q)$  の  $\frac{l(w)-l(y)-1}{2}$  次の係数を  $\mu(y, w)$  とおき、 $y < w$  かつ  $\mu(y, w) \neq 0$  のとき  $y \prec w$  とかきます。

そして、 $y = x_1, \dots, x_r = w$  に対し、

$$\mathcal{L}(x_i) = \{s_j \mid s_j x_i < x_i\} \subsetneq \mathcal{L}(x_{i+1}) \text{ で } x_i \prec x_{i+1} \text{ または } x_{i+1} \prec x_i$$

のとき、 $y \leq_L w$  とかきます。また、 $y \leq_L w$  かつ  $w \leq_L y$  のとき、 $y \sim_L w$  とかき、この同値関係による  $\mathfrak{S}_n$  の同値類を *left cell* とよびます。

さて実は上の定義における  $P_{y,w}(q)$  の *welldefinedness* は、  
 $s_i w < w$  のとき、 $C_w$  を

$$(1.1) \quad C_w = C_{s_i} C_{s_i w} - \sum_{\substack{z \prec s_i w \\ s_i z < z}} \mu(z, s_i w) C_z$$

という式、つまり、 $C_{s_i} = q^{-\frac{1}{2}} T_{s_i} - q^{\frac{1}{2}}$  に注意すれば、

$$(1.2) \quad \begin{aligned} P_{y,w}(q) &= q^{1-c} P_{s_i y, s_i w}(q) + q^c P_{y, s_i w}(q) \\ &\quad - \sum_{\substack{y \leq z \prec s_i w \\ s_i z < z}} \mu(z, s_i w) q^{\frac{l(w)-l(z)}{2}} P_{y,z}(q) \end{aligned}$$

(ただし、 $s_i y < y$  のとき  $c = 1$ 、 $s_i y > y$  のとき  $c = 0$ )

という式、により帰納的に構成して、次に一意性を証明するという方針で示すので、

$$(1.3) \quad \begin{aligned} T_{s_i} C_w &= -C_w && (s_i w < w \text{ のとき}) \\ &= q C_w + q^{\frac{1}{2}} C_{s_i w} + \sum_{\substack{z \prec w \\ s_i z < z}} \mu(z, w) q^{\frac{1}{2}} C_z && (s_i w > w \text{ のとき}) \end{aligned}$$

が示されているわけです。

ここで  $q = 1$  とおき、 $C_w|_{q=1}$  を  $a(w)$  とかけば、

$$(1.4) \quad \begin{aligned} s_i a(w) &= -a(w) && (s_i w < w) \\ &= a(w) + a(s_i w) + \sum_{\substack{z \prec w \\ s_i z < z}} \mu(z, w) a(z) && (s_i w > w) \end{aligned}$$

となります。また、 $w_0$  を *longest element*  $n n-1 \dots 2 1$  として、

$$a_w = \sum_{y \geq w} (-1)^{l(y)-l(w)} P_{w_0 y, w_0 w}(1) y^{-1}$$

とおくと、KL 多項式の定義よりすぐにわかる性質である

$$P_{y,w}(q) = P_{y^{-1}, w^{-1}}(q) \text{ より } a_{w_0 w^{-1} w_0} = a(w) \text{ です。}$$

$y \leq_L w$  の意味.  $\mathfrak{S}_n$  の 2 元、 $y \neq w$  に対して、次の同値がなりたちます。

補題 (1.1).  $\mathcal{L}(y) \not\subseteq \mathcal{L}(w)$  かつ、 $y \prec w$  または  $w \prec y$  は次と同値。

ある  $s_i$  が存在して、 $s_i a_{w_0 w^{-1}}$  を  $a_x$  たちの線型和にかきあらわしたとき、 $a_{w_0 y^{-1}}$  が非零係数であられる。

証明. ( $\Rightarrow$ )  $s_i \in \mathcal{L}(y) \setminus \mathcal{L}(w)$  をとると、 $y \prec w$  のときは (1.4) 式より O.K.  $w \prec y$  としよう。KL 多項式の性質、 $w < y$  かつ  $s_i y < y$  ならば  $P_{w,y}(q) = P_{s_i w, y}(q)$  を用いる。

(これは、(1.2) 式を用いて、 $l(y)$  に関する帰納法で示せばよい。)

つまり、 $s_i w \neq y$  ならば、 $\deg P_{w,y}(q) \leq \frac{l(y)-l(s_i w)-1}{2}$  と  $s_i w > w$  より  $\mu(w, y) = 0$  となり  $w \prec y$  に反する。

( $\Leftarrow$ )  $y = s_i w > w$  のとき  $w \prec s_i w$  を示せばよい。実際、KL 多項式の性質、 $P_{y,w}(0) = 1$  (これも (1.2) 式から従う。) と、 $\deg P_{w, s_i w}(q) \leq 0$  より、 $P_{w, s_i w}(q) = \mu(w, s_i w) = 1 \neq 0$ 。 ■

系.  $W = \mathfrak{S}_n$  とする。  $\{a_x\}$  の部分集合で張られ、 $W a_{w_0 w^{-1}}$  を含む  $\mathbb{Q}[W]$  の部分空間のうち最小のものを  $\langle W a_{w_0 y^{-1}} \rangle_a$  とかけば、

$$y \leq_L w \Leftrightarrow \langle W a_{w_0 y^{-1}} \rangle_a \subseteq \langle W a_{w_0 w^{-1}} \rangle_a$$

また、 $\{a(x)\}$  の部分集合で張られ、 $a(w)$  を含む  $Q[W]$  の左イデアルのうち最小のものを  $\overline{V}_w^L$  とおけば、

$$y \leq_L w \quad \Leftrightarrow \quad \overline{V}_y^L \subseteq \overline{V}_w^L$$

RS 対応と left cell. この章の目標は、次の定理の紹介です。

定理 A.  $y, w \in \mathfrak{S}_n$  にたいし、 $y \sim_L w \Leftrightarrow Q(y) = Q(w)$

例.  $\mathfrak{S}_3$  の場合。  $y < w$  かつ  $l(w) - l(y) \leq 2$  のときは、定義より  $P_{y,w}(q) = 1$  なので、 $P_{1,w_0}(q)$  のみ考えればよい。  $y < w$  かつ  $s_i w < w$  のとき  $P_{y,w}(q) = P_{s_i y, w}(q)$  なので、 $P_{1,w_0}(q) = 1$  である。 ゆえに、 $y < w$  となるのは、長さの差が 1 のときのみ。

よって、 $y \sim_L w$  となるのは、 $s_1 \sim_L s_2 s_1$  と  $s_2 \sim_L s_1 s_2$  。 ゆえに、left cell は、 $\{123\}, \{213, 312\}, \{132, 231\}, \{321\}$  の 4 つで、それぞれ  $Q$ -symbol は、

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   | 1 |
|   |   | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |   |   | 2 |
|   |   | 2 |   | 3 |   |
|   |   |   |   |   | 3 |

$\mathfrak{S}_4$  については、[Sh] p.20 を参照してください。

Knuth の定理.  $P(y) = P(w)$  のとき  $y \equiv w$  とかくことにします。

Knuth によれば、この同値関係は次の Knuth の基本関係で生成されています。

## 6

$y = y_1 y_2 \dots y_i y_{i+1} y_{i+2} \dots y_n$  において、

$$y_{i+1} < y_i < y_{i+2} \text{ のとき } w = y_1 \dots y_i y_{i+2} y_{i+1} \dots y_n$$

$$y_{i+1} < y_{i+2} < y_i \text{ のとき } w = y_1 \dots y_{i+1} y_i y_{i+2} \dots y_n$$

とおくと、 $y \equiv w$ 。

ここで、 $D(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = \{ w \mid w s_i < w, w s_{i+1} > w \}$  とします。

coset、 $y < s_i, s_{i+1} >$  の minimum length の representative を  $y^0$  とすると、 $y \in D(\alpha_i, \alpha_{i+1})$  ならば、 $y = y^0 s_i$  または  $y = y^0 s_{i+1} s_i$  です。そこで、前者のとき  $y^0 s_i s_{i+1}$  後者のとき  $y^0 s_{i+1}$  を  $D(\alpha_i, \alpha_{i+1})(y)$  とか、 $y^*$  という記号であらわします。ここでは、 $D_{i,i+1}(y)$  であらわすことにします。すると Knuth の基本関係は次のようにいいかえられます。

$$y \in D(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \text{ のとき } y \equiv D_{i,i+1}(y)$$

これは、 $y < s_i y$  かつ  $\mathcal{L}(y) \not\subseteq \mathcal{L}(s_i y)$  のとき  $y^{-1} \equiv (s_i y)^{-1}$ 、というふうにもいいかえられます。

$i$  と  $i+1$  をとりかえることにより、 $D(\alpha_{i+1}, \alpha_i)$ 、 $D_{i+1,i}(y)$  を同様に定義します。

定理 A の証明の準備。

命題 (1.2).  $y \leq_L w$  ならば、 $\mathcal{L}(y^{-1}) \supseteq \mathcal{L}(w^{-1})$

証明.  $\mathcal{L}(y) \not\subseteq \mathcal{L}(w)$  としてよい。補題 (1.1) より  $y = s_i w > w$  または  $y < w$  である。前者のときは O.K. 後者のとき、 $\mathcal{L}(w^{-1}) \not\subseteq \mathcal{L}(y^{-1})$  とすると  $P_{y,w}(q) = P_{y^{-1},w^{-1}}(q)$  かつ  $y < w$  より

$y^{-1} \prec w^{-1}$  であることに注意すると、 $w^{-1} = s_j y^{-1} > y^{-1}$  となり、  
 $\mathcal{L}(y) \not\subseteq \mathcal{L}(w)$  に反す。■

命題 (1.3).  $y, w \in D(\alpha_i, \alpha_{i+1})$  かつ  $y \prec w$  ならば

$$D_{i,i+1}(y) \prec D_{i,i+1}(w) \text{ または } D_{i,i+1}(w) \prec D_{i,i+1}(y)$$

証明.  $D_{i,i+1}$  の定義より結局次の2つの場合に  $\mu(y_1, w_1) = \mu(y_2, w_2)$  を示せばよい。

(1)  $y_2 t < y_2 = y_1 s < y_1 < y_1 t$  かつ  $w_2 t < w_2 = w_1 s < w_1 < w_1 t$  のとき。  
 (ただし、 $\{s, t\} = \{s_i, s_{i+1}\}$ )

(1.2) 式より、 $P_{y_1, w_1}(q) = P_{y_1^{-1}, w_1^{-1}}(q) = P_{y_2, w_2}(q) + qP_{y_1, w_2}(q) - \sum \dots$  とかけて、最後の和にあらわれる  $P_{y_1, z}(q)$  は  $zs < z$  をみताす。  
 $zt > z$  とすると、 $w_2 t < w_2$ ,  $zt > z$ ,  $z \prec w_2$  より  $w_2 = zt$  で  
 (補題 (1.1))  $z = z^0$  となり、 $zs < z$  に反す。

よって  $z \neq y_1 t$  のとき  $P_{y_1, z}(q) = P_{y_1 t, z}(q)$  は  $\mu(y_1, w_1)$  に寄与しない。

ゆえに、 $P_{y_1, w_2}(q) = P_{y_1 t, w_2}$  より従う。

(2)  $y_2 s > y_2 = y_1 t > y_1 > y_1 s$  かつ  $w_2 t < w_2 = w_1 s < w_1 < w_1 t$  のとき。

(1.2) 式より、 $P_{y_1, w_1}(q) = P_{y_1 s, w_2}(q) + qP_{y_1, w_2}(q) - \sum \dots$  とかけて、  
 $y_1 s \neq w_2$  ならば、最後の和も前と同様の理由で  $\mu(y_1, w_1)$  に寄与しない  
 ので、命題は  $P_{y_1, w_2}(q) = P_{y_2, w_2}(q)$  より従う。 $y_1 s \prec w_2$  ならば、  
 $y_1 s t = w_2$  なのでやはり命題は成立。■

系.  $y, w \in D(\alpha_i, \alpha_{i+1})$  のとき、

$$y^{-1} \sim_L w^{-1} \text{ ならば } D_{i,i+1}(y)^{-1} \sim_L D_{i,i+1}(w)^{-1}$$

証明. 命題 (1.2) と  $y^{-1} \sim_L D_{i,i+1}(y)^{-1}$  より  $\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(D_{i,i+1}(y))$   
 故、命題 (1.3) より従う。■

## 8

命題 (1.4).  $Q(y) = Q(w)$  ならば  $y \underset{L}{\sim} w$

証明.  $w^{-1} = D_{i,i+1}(y^{-1})$  としてよいので明らか。■

定理 A の証明.

証明. 命題 (1.4) の逆を示す. *partition*  $\pi$  に次図のように  $1 \dots n$  をかき込んでできる *tableau* を  $P_\pi$  とかく。

$$\begin{array}{cccc} 1 & l_1 + 1 & \dots & \\ 2 & l_1 + 2 & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & l_1 & & \end{array}$$

$P(y) = P_{\pi_1}$ ,  $P(w) = P_{\pi_2}$  としてよい。

$(P(y'), Q(y')) = (P_{\pi_1}, P_{\pi_1})$  により  $y'$  をさだめると

$$y' = D_{i_1, j_1} \circ \dots \circ D_{i_r, j_r}(y)$$

とかける。命題 (1.2) より、 $\mathcal{L}(y^{-1}) = \mathcal{L}(w^{-1})$  だから、命題 (1.3) 系より、 $w' = D_{i_1, j_1} \circ \dots \circ D_{i_r, j_r}(w)$  も *welldefined* で、 $\mathcal{L}((y')^{-1}) = \mathcal{L}((w')^{-1})$  かつ  $P(w') = P_{\pi_2}$ 。

さて、

$$(y')^{-1} = l_1 \ l_1 - 1 \ \dots \ 1 \ l_1 + l_2 \ \dots \ l_1 + 1 \ \dots$$

であり、 $(w')^{-1}$  の *word* とくらべたとき  $i$  と  $i+1$  が転倒しているところは一致していて、 $\pi_2$  の第 1 列の長さを  $l'_1$  とすると最初の  $l'_1$  個は単調に

減少しているので、 $l_1 \leq l'_1$  を得る。  $(P(w''), Q(w'')) = (P_{\pi_2}, P_{\pi_2})$  により  $w''$  をさだめると、上と同様の議論により今度は  $l_1 \geq l'_1$  を得るから  $\pi_1$  と  $\pi_2$  の第1列めの長さは等しい。以下同様にして  $P_{\pi_1} = P_{\pi_2}$  が示せる。よって  $y' = w'$  となり  $\therefore Q(y) = Q(w)$ 。 ■

## 2. primitive ideal の言葉にすると。

translation functor.  $\mathfrak{g}$  を  $\mathbb{C}$  上の半単純リー環、 $\mathfrak{b}$  を Borel 部分環、 $\mathfrak{h}$  を Cartan 部分環、 $U(\mathfrak{g})$ ,  $U(\mathfrak{b})$ ,  $U(\mathfrak{h})$  をその包絡環、有限生成  $U(\mathfrak{g})$ -加群で *weight multiplicity* 有限の *weight* 分解をもち、 $U(\mathfrak{b})$ -finite (つまり各元が有限次元  $U(\mathfrak{b})$ -submodule に含まれる。)

なものの全体のなす圏を  $\mathcal{O}$  とします。

$W$  を  $\mathfrak{g}$  の Weyl 群とし、ドット作用を  $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$  ( $\rho$  は正ルートの和の半分。) で定めます。Harish Chandra の定理によれば、 $U(\mathfrak{g})$  の中心  $Z(\mathfrak{g})$  は  $U(\mathfrak{h})$  のドット作用での  $W$  の不変式環にひとしく、 $\lambda$  での *evaluation* により定まる  $Z(\mathfrak{g})$  の一次元表現 (*central character*) を  $[\lambda]$  とかくと、 $[\lambda] = [\mu] \Leftrightarrow W \cdot \lambda = W \cdot \mu$  です。そこで

$$\mathcal{O}_{[\lambda]} = \{ M \in \mathcal{O} \mid z - [\lambda](z) \text{ は } M \text{ 上 nilpotent } (\forall z) \}$$

とおくと、 $\mathcal{O} = \bigoplus \mathcal{O}_{[\lambda]}$  です。

highest weight  $\lambda$  の Verma module と irreducible module をそれぞれ  $M(\lambda)$  と  $L(\lambda)$  とすると、 $\forall M \in \mathcal{O}$  は、商が highest weight module であるような有限の長さの *filtration* をもつので、とくに  $M$  は組成商が  $L(\lambda)$  の形の有限の長さの組成列をもち、 $\mathcal{O}_{[\lambda]}$  の Grothendieck 群  $K_0(\mathcal{O}_{[\lambda]})$  は  $\{ M(w \cdot \lambda) \}$  および  $\{ L(w \cdot \lambda) \}$  を基底にもちます。

定義.  $M \in \mathcal{O}_{[\lambda]}$  とし、 $\mu$  を  $\lambda - \mu$  が *integral weight* であるようにとる。

$\lambda - \mu$  の ( ふつうの  $W$ -作用のもとでの )  $W$ -orbit の中で、*dominant integral* なものを取り、それを *highest weight* にもつ有限次元既約表現を  $E$  とする。このとき、

$T_{\lambda}^{\mu}(M) = pr_{\mu}(M \otimes_{\mathbb{C}} E)$  ( $pr_{\mu}$  は  $\mathcal{O}_{[\mu]}$  への射影) とおくと、 $T_{\lambda}^{\mu}$  は  $\mathcal{O}_{[\lambda]}$  から  $\mathcal{O}_{[\mu]}$  への *exact functor* である。とくに  $K_0(\mathcal{O}_{[\lambda]})$  から  $K_0(\mathcal{O}_{[\mu]})$  への *functor* を *induce* する。

[Ja2] にあるように、*translation functor* には次の性質があります。

命題 (2.1). (1)  $\lambda + \rho$  と  $\mu + \rho$  を *dominant integral weight* とし、任意の正ルート  $\alpha$  にたいし、

$(\lambda + \rho, \alpha) = 0$  ならば  $(\mu + \rho, \alpha) = 0$ , が成り立つとする。このとき、  
 $T_{\lambda}^{\mu}(M(w \cdot \lambda)) = M(w \cdot \mu)$

(2)  $\hat{F}_{\lambda}$  を、任意の正ルート  $\alpha$  にたいし

$(\lambda + \rho, \alpha)$  が 正、0、負 のとき、 $(\mu + \rho, \alpha)$  がそれぞれ正、0、0 以下 となり、かつ  $\lambda - \mu$  が *integral* であるような *weight*  $\mu$  の全体とする。また、 $\lambda$  と  $\mu + \rho$  は *dominant integral weight* であるとする。  
 このとき、

$$\begin{aligned} T_{\lambda}^{\mu}(L(w \cdot \lambda)) &= L(w \cdot \mu) \quad (w \cdot \mu \in \hat{F}_{w \cdot \lambda}) \\ &= 0 \quad (\text{otherwise}) \end{aligned}$$

証明. (1)  $E$  を有限次元表現とする。  $M(w \cdot \lambda) \otimes_{\mathbb{C}} E$  には *successive quotient* が *highest weight*  $w \cdot (\lambda + \nu)$  ( $\nu$  は  $E$  の *weight*) の *highest weight module* であるような *filtration* が存在し、指標をみるとこれらの *successive quotient* は  $M(w \cdot (\lambda + \nu))$  であることがわかる。故に、

$\nu = \tau \cdot \mu - \lambda$  をみたす  $\nu$  は  $\mu - \lambda$  しかないことを示せばよい。

$|\nu| \leq |\lambda - \mu|$  に代入すると

$$(\lambda + \rho, \mu + \rho - \tau(\mu + \rho)) \leq 0$$

を得る。  $\tau = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$  なる *reduced expression* にたいして

$$\mu + \rho - \tau(\mu + \rho) = \sum_{(\mu + \rho, \alpha_{i_k}) > 0} (\mu + \rho, \alpha_{i_k}) s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}} \alpha_{i_k}$$

であることを用いると、  $(\mu + \rho, \alpha_{i_j}) = 0$  ( $\forall j < k$ ) ,  $(\mu + \rho, \alpha_{i_k}) > 0$  とはなり得ないことが示せるので、  $\therefore \nu = \mu - \lambda$  。

(2) 指標で考えれば十分である。  $w \cdot \mu \in \hat{F}_{w \cdot \lambda}$  のとき。

この条件は、  $s_i \cdot \mu = \mu$  ならば  $ws_i < w$  といいかえられる。

$L(w \cdot \lambda) = \sum_{w \leq y} a(w, y) M(y \cdot \lambda)$  とかいて、  $T_\lambda^\mu(L(w \cdot \lambda))$  中の  $L(w \cdot \mu)$  の重複度が1であることをみれば、  $T_\lambda^\mu(L(w \cdot \lambda)) \neq 0$  がわかる。  $T_\lambda^\mu(L(w \cdot \lambda))$  の *proper submodule* の  $M(w \cdot \mu) = T_\lambda^\mu(M(w \cdot \lambda))$  への *pull back* に  $M(w' \cdot \mu)$  が含まれていれば、これは  $w' > w$  でしかも  $T_\lambda^\mu(M(w' \cdot \lambda))$  に等しいので、  $T_\lambda^\mu(L(w \cdot \lambda))$  への像は0でなければならない。 よって  $T_\lambda^\mu(L(w \cdot \lambda))$  は既約。

$w \cdot \mu \notin \hat{F}_{w \cdot \lambda}$  のとき。

$\exists \alpha > 0$  such that  $w^{-1}\alpha > 0$  かつ  $(\mu + \rho, w^{-1}\alpha) = 0$  である。  $w^{-1}\alpha$  : *simple* としてよく、このとき (1) より  $(\mu + \rho, \alpha_j) \neq 0$  ( $\alpha_j \neq w^{-1}\alpha$ ) なる  $\mu$  にたいして示せば十分。  $T_\lambda^\mu(L(w \cdot \lambda))$  中の  $L(w \cdot \mu)$  の重複度は  $1 + a(w, ws)$  (ただし、  $s$  は  $w^{-1}\alpha$  に対応する *reflection*) だから、  $a(w, ws) = -[M(w \cdot \lambda) : L(ws \cdot \lambda)] = -1$  より 重複度は0。 よって  $M(w \cdot \mu) \rightarrow T_\lambda^\mu(L(w \cdot \lambda))$  は 0-map。 ■

## 12

さて  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) を、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$  の基本ルート、 $\Lambda_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) を基本ウエイトとします。つまり

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1}^\vee) = -1, \quad (\alpha_i, \alpha_j^\vee) = 0 \quad (|i-j| > 1),$$

$$(\Lambda_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}.$$

すると、

$$\begin{aligned} \text{系.} \quad T_0^{-\Lambda_i}(L(w \cdot 0)) &= L(w \cdot (-\Lambda_i)) \quad (ws_i < w) \\ &= 0 \quad (ws_i > w) \end{aligned}$$

Knuth の基本関係の表現論的意味.  $D_{i,i+1}(y)$  には、次のような表現論的意味があります。

命題 (2.2).  $y \in D(\alpha_i, \alpha_{i+1})$  に対して

$$[T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0)), L(w \cdot 0)] \neq 0 \quad \text{かつ} \quad ws_{i+1} < w$$

をみたす  $w$  がただ 1 つ存在して  $D_{i,i+1}(y)$  に等しい。

(証明は後述。)

primitive ideal.

定義.  $I(\lambda) = \text{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(L(\lambda))$  を primitive ideal とよぶ。

補題 (2.3).  $M_1, M_2 \in \mathcal{O}_{[\lambda]}$  とする。

このとき、 $\text{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M_1) \subseteq \text{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M_2)$  ならば、

$$\text{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(T_\lambda^\mu(M_1)) \subseteq \text{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(T_\lambda^\mu(M_2))$$

証明.  $E$  を有限次元表現とする。  $c : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g})$  を、  
 $c(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$  ( $X \in \mathfrak{g}$ ) の生成する単射準同型とする。  $J_i =$   
 $c^{-1}(\text{Ann}(M_i) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} \text{Ann}(E))$  とおくと、  $J_i \subseteq \text{Ann}(M_i \otimes_{\mathbb{C}} E)$   
 は明らかで、  $U(\mathfrak{g})/J_i \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M_i \otimes_{\mathbb{C}} E, M_i \otimes_{\mathbb{C}} E)$  は

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{g}) &\xrightarrow{c} U(\mathfrak{g})/\text{Ann}(M_i) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g})/\text{Ann}(E) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M_i, M_i) \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M_i \otimes_{\mathbb{C}} E, M_i \otimes_{\mathbb{C}} E) \end{aligned}$$

なる単射とみなせるから、  $J_i = \text{Ann}(M_i \otimes_{\mathbb{C}} E)$  。

ゆえに、  $\text{Ann}(M_1 \otimes_{\mathbb{C}} E) \subseteq \text{Ann}(M_2 \otimes_{\mathbb{C}} E)$  である。そして、一般に  
 $M \in \mathcal{O}$  の組成列の長さを  $l$  とし、  $S \supseteq \{[\nu] \mid \text{pr}_\nu(M) \neq 0\}$  とおくと

$$\begin{aligned} \text{Ann}(\text{pr}_\mu(M)) &= \{u \in U(\mathfrak{g}) \mid \\ &u \cdot \prod_{[\nu] \in S \setminus \{[\mu]\}} (z - [\nu](z))^l \in \text{Ann}(M) \ (\forall z \in Z(\mathfrak{g}))\} \end{aligned}$$

であるから補題は示された。■

$$\text{定義. } T_\lambda^\mu(I(w \cdot \lambda)) = \text{Ann}(T_\lambda^\mu(L(w \cdot \lambda)))$$

この定義の *welldefinedness* は補題 (2.3) よりしたがいします。

部分リー環の primitive ideal との関係。  $S$  を基本ルート系の部分集合、  $\mathfrak{g}_S$  を対応する半単純部分リー環、  $\mathfrak{h}_S = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_S$ 、  $\mathfrak{h}_S^\perp$  を  $S$  と直交する  $\mathfrak{h}$  の subspace とします。このとき次の命題が成り立ちます。

命題 (2.4).  $\lambda|_{\mathfrak{h}_S^\perp} = \mu|_{\mathfrak{h}_S^\perp}$  かつ

$$\text{Ann}_{U(\mathfrak{g}_S)}(L(\lambda|_{\mathfrak{h}_S})) \subseteq \text{Ann}_{U(\mathfrak{g}_S)}(L(\mu|_{\mathfrak{h}_S}))$$

ならば、 $I(\lambda) \subseteq I(\mu)$ 。

(証明は後述)

primitive ideal と RS 対応. この章の目標は次の定理 B です。

定理 B.

$$Q(y) = Q(w) \Leftrightarrow I(y \cdot 0) = I(w \cdot 0)$$

translation functor の性質 (命題 (2.1)) より  $y \cdot 0$ ,  $w \cdot 0$  のかわりに  $y \cdot \lambda$ ,  $w \cdot \lambda$  ( $\lambda$  は dominant integral) でもかまいません。

まず命題を 1 つ準備します。

命題 (2.5). (1)  $y, w \in D(\alpha_i, \alpha_{i+1})$  かつ  $I(y \cdot 0) \subseteq I(w \cdot 0)$  ならば、 $I(D_{i,i+1}(y) \cdot 0) \subseteq I(D_{i,i+1}(w) \cdot 0)$

$i$  と  $i+1$  をとりかえても同様の結果が成り立つ。

(2)  $y^{-1} \equiv w^{-1}$  ならば、 $I(y \cdot 0) = I(w \cdot 0)$

証明. (1) 命題 (2.2) および命題 (2.1) 系より、

$$I(D_{i,i+1}(y) \cdot (-\Lambda_{i+1})) \subseteq I(D_{i,i+1}(w) \cdot (-\Lambda_{i+1}))$$

である。  $U(\mathfrak{g})$  の両側イデアル  $I$  に対して、

$$\sqrt{I} = \{ u \in U(\mathfrak{g}) \mid (U(\mathfrak{g})u U(\mathfrak{g}))^{3!} \subseteq I \}$$

とおくと、命題 (2.2) より  $T_{-\Lambda_{i+1}}^0(L(D_{i,i+1}(y) \cdot (-\Lambda_{i+1})))$  の組成列には  $L(y \cdot 0)$  以外には  $T_0^{-\Lambda_{i+1}}(I(\tau \cdot 0)) = U(\mathfrak{g})$  であるような  $L(\tau \cdot 0)$  しかあらわれないので、

$$\sqrt{T_{-\Lambda_{i+1}}^0(I(D_{i,i+1}(y) \cdot (-\Lambda_{i+1})))} = I(y \cdot 0) \cap I_1 \cap \cdots \cap I_r$$

(ただし、 $T_0^{-\Lambda_{i+1}}(I_k) = U(\mathfrak{g})$  かつ  $\sqrt{I_k} = I_k$ 。)

とかける。よって  $I(y \cdot 0) \cdot I_1 \cdot \dots \cdot I_r \subseteq I(w \cdot 0)$  だから  $L(w \cdot 0)$  に作用させて  $I(y \cdot 0) \subseteq I(w \cdot 0)$  を得る。

(2)  $w^{-1} = D_{i,i+1}(y^{-1})$  にたいし示せば十分。このとき、 $y = s_i y^0$  かつ  $w = s_{i+1} s_i y^0$ 、または  $y = s_i s_{i+1} y^0$  かつ  $w = s_{i+1} y^0$  である。

$S = \{\alpha_j\}$  として命題 (2.4) を適用すると、 $(\mu + \rho, \alpha_j) > 0$  ならば  $\text{Ann}_{U(\mathfrak{g}_S)}(L(s_j \cdot \mu |_{\mathfrak{h}_S})) \subseteq \text{Ann}_{U(\mathfrak{g}_S)}(L(\mu |_{\mathfrak{h}_S}))$  より  $I(s_j \cdot \mu) \subseteq I(\mu)$  が示せる。よって、 $\mu = s_i y^0 \cdot 0$  または  $s_{i+1} y^0 \cdot 0$  とすれば、 $I(s_i y^0 \cdot 0) \supseteq I(s_{i+1} s_i y^0 \cdot 0)$ ,  $I(s_{i+1} y^0 \cdot 0) \supseteq I(s_i s_{i+1} y^0 \cdot 0)$  である。逆の包含関係を示すため  $S = \{\alpha_i, \alpha_{i+1}\}$  として命題 (2.4) を再び適用する。 $y^0 \cdot 0 + \rho$  は  $\mathfrak{h}_S$  上 *dominant integral regular* ゆえ、結局  $A_2$  型のときに *dominant integral*  $\lambda$  にたいして  $I(s_i \cdot \lambda) \subseteq I(s_{i+1} s_i \cdot \lambda)$ ,  $I(s_{i+1} \cdot \lambda) \subseteq I(s_i s_{i+1} \cdot \lambda)$  を示せばよい。これは命題 (2.1)、補題 (2.3)、および

$$I(s_i \cdot 0) = I(D_{i+1,i}(s_i s_{i+1}) \cdot 0) \subseteq I(D_{i+1,i}(s_{i+1}) \cdot 0) = I(s_{i+1} s_i \cdot 0)$$

$$I(s_{i+1} \cdot 0) = I(D_{i,i+1}(s_{i+1} s_i) \cdot 0) \subseteq I(D_{i,i+1}(s_i) \cdot 0) = I(s_i s_{i+1} \cdot 0)$$

からしたがう。■

## 16

定理 B の証明.

証明.  $(\Rightarrow)$  は命題 (2.5)(2) より明らか.  $(\Leftarrow)$  を示す. 定理 A と同様に  $P_\pi$  をさだめる.

$P(y) = P_{\pi_1}$ 、 $P(w) = P_{\pi_2}$  としてよい.

$(P(y'), Q(y')) = (P_{\pi_1}, P_{\pi_1})$  により  $y'$  をさだめると

$$y' = D_{i_1, j_1} \circ \cdots \circ D_{i_r, j_r}(y)$$

とかける. ここで命題 (2.1) 系より、

$$\mathcal{L}(y^{-1}) = \{ s_i \mid T_0^{-\Lambda_i}(I(y \cdot 0)) \neq U(\mathfrak{g}) \}$$

に注意すればあとは定理 A と同じである. ■

### 3. HC-module を用いれば.

HC-module.

定義.  $M$  を  $(U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g}))$ -両側加群とし、 $\mathfrak{g}_\Delta = \mathfrak{g}$  の  $M$  への作用を

$$X \cdot m = Xm - mX \quad (m \in M, X \in \mathfrak{g}_\Delta)$$

でさだめるとき、 $M$  が  $U(\mathfrak{g}_\Delta)$ -finite ならば  $M$  を Harish Chandra module とよぶ.

$M$  を両側加群とし、 $V$  をその半単純  $U(\mathfrak{g}_\Delta)$ -部分加群とすると  $U(\mathfrak{g}) \otimes M$  の  $U(\mathfrak{g}_\Delta)$ -部分加群  $\mathfrak{g} \otimes V$  から  $M$  への自然な写像は  $U(\mathfrak{g}_\Delta)$ -homomorphism なので、 $M$  の  $U(\mathfrak{g}_\Delta)$ -finite vectors は  $HC$ -module になります。

$HC$ -module  $M$  に対し、右作用での annihilator を  $RAnn(M)$ 、左作用での annihilator を  $LAnn(M)$  とかきます。すると次の命題が成り立ちます。

命題 (3.1).  $X_1, X_2$  を有限生成  $HC$ -module とすると、  
 $RAnn(X_1) \subseteq RAnn(X_2)$

$\Leftrightarrow$

右作用が自明な有限次元  $HC$ -module  $E$  が存在して、 $X_2$  は  $X_1 \otimes_{\mathbb{C}} E$  の subquotient。

証明. ( $\Leftarrow$ )  $RAnn(X_1) = RAnn(X_1 \otimes_{\mathbb{C}} E)$  より明らか。

( $\Rightarrow$ )  $X_i$  を生成する有限次元  $U(\mathfrak{g}_\Delta)$ -部分加群 を  $V_i$  とする。

$V_2$  を  $X \cdot v = Xv - vX$ ,  $v \cdot X = 0$  ( $X \in \mathfrak{g}$ ) により  $HC$ -module にすると、全射

$$(U(\mathfrak{g})/RAnn(X_2)) \otimes_{\mathbb{C}} V_2 \rightarrow X_2 : u \otimes v \mapsto vu$$

が得られる。また、 $\nu \cdot X = 0$ ,  $(X \cdot \nu)(v) = \nu(-Xv + vX)$

( $\nu \in V_1^*$ ) により  $V_1^*$  を  $HC$ -module とみなせば、 $V_1$  の基底、 $v_1 \dots v_r$  とその双対基底  $\nu_1 \dots \nu_r$  をもちいて、単射

$$U(\mathfrak{g})/RAnn(X_1) \rightarrow X_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_1^* : u \mapsto \sum v_i u \otimes \nu_i$$

が得られる。故に  $E = V_1^* \otimes V_2$  とすればよい。 ■

さて、 $U(\mathfrak{g})$ -加群  $M, N$  に対して、 $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, N)$  は  $u_1 \varphi u_2(m) = u_1(\varphi(u_2 m))$  により両側加群になるので、その  $U(\mathfrak{g}_{\Delta})$ -finite vectors のなす部分両側加群を  $L(M, N)$  とかきます。

命題 (3.2).  $M \in \mathcal{O}_{[\mu]}$  かつ、 $\lambda, \mu$  が dominant integral とすると、

$$[L(M(\lambda), M) : L(M(\lambda), L(w \cdot \mu))] = [M : L(w \cdot \mu)]$$

命題 (3.3).  $\lambda, \mu$  を dominant integral とすると、

$$R\text{Ann}(L(M(\lambda), L(w \cdot \mu))) = I(w^{-1} \cdot \lambda)$$

primitive ideal と表現の重複度. この章では次の定理 C を紹介します。

定理 C.  $\lambda, \mu_1, \mu_2$  を dominant integral とすると、

$$I(y \cdot \lambda) \subseteq I(w \cdot \lambda)$$

$\Leftrightarrow$

ある有限次元表現  $E$  があって、 $[L(y^{-1} \cdot \mu_1) \otimes E : L(w^{-1} \cdot \mu_2)] \neq 0$

証明. 命題 (3.3) (3.1) より左辺は、右作用が自明な有限次元 HC-module  $E$  があって  $L(M(\lambda), L(w^{-1} \cdot \mu_2))$  が  $L(M(\lambda), L(y^{-1} \cdot \mu_1)) \otimes E$  の subquotient であることと同値。

2 番目のテンソル積は  $L(M(\lambda), L(y^{-1} \cdot \mu_1) \otimes E)$  に等しいので、命題 (3.2) より右辺と同値。 ■

## 4. そして環はとじる。

primitive ideal と left cell.

$L(y \cdot 0) = \sum_{y \leq w} a(y, w) M(w \cdot 0)$  とかくと、Kazhdan-Lusztig 予想とよばれる定理により、 $a(y, w) = (-1)^{l(w)-l(y)} P_{w_0 w, w_0 y}(1)$  ですが、ここで

$$\chi_y(\mu) = \sum_{y \leq w} a(y, w) M(w \cdot \mu)$$

により  $\chi_y(\mu)$  を定義します。

定理.

$$I(y^{-1} \cdot 0) \subseteq I(w^{-1} \cdot 0) \Leftrightarrow a_w \in \langle W a_y \rangle_a$$

証明. ( $\Rightarrow$ ) 定理 C より、有限次元表現  $E$  が存在して、

$$[L(y \cdot 0) \otimes E : L(w \cdot 0)] \neq 0. \quad L(y \cdot 0) \otimes E = \sum \chi_y(\nu)$$

(ただし  $\nu$  は  $E$  の weight を重複度込みではしる。) なので、

$$[\chi_y(\tau \cdot 0) : L(w \cdot 0)] \neq 0 \text{ となる } \tau \text{ がある。}$$

そこで、 $\tau^{-1} a_y = \sum [\tau^{-1} a_y : a_w] a_w$  とかけば、

$$\chi_y(\tau \cdot 0) = \sum [\tau^{-1} a_y : a_w] L(w \cdot 0)$$

なので O.K.

( $\Leftarrow$ )  $\exists \tau$  s.t.

$[\chi_y(\tau \cdot 0) : L(w \cdot 0)] \neq 0$  としてよい。 ここで、

$$\sum_{\tau} \mathbb{Z} \chi_y(\tau \cdot 0) = \sum_E \mathbb{Z} \text{pr}_0(L(y \cdot \lambda) \otimes E)$$

であるような *dominant integral* な  $\lambda$  がとれる。

実際、 $\lambda - \tau \cdot 0$  が  $\forall \tau$  に対して *dominant* になるようにとれば、 $E = L(\lambda - w_0 \tau \cdot 0)^*$  に対しては、

$$pr_0(L(y \cdot \lambda) \otimes E) = \chi_y(w_0 \tau \cdot 0) + \sum \chi_y(w_0 \sigma \cdot 0)$$

となり、和は  $\sigma > \tau$  をはしるので、*transition matrix* が *unitriangular* だからである。

故に、 $[L(y \cdot \lambda) \otimes E : L(w \cdot 0)] \neq 0$  となり、定理 C より O.K. ■

この定理から、 $y \leq_L w \Leftrightarrow I(ww_0 \cdot 0) \subseteq I(yw_0 \cdot 0)$  がわかるので、定理 B より  $y \sim_L w$  は、 $Q(yw_0) = Q(ww_0)$  と同値で、さらに寺田君の解説にあるように、 $Q(ww_0) = (Q(w)^I)'$  なので、 $Q(y) = Q(w)$  と同値。こうして定理 A が再び示されました。

## 5. 証明してなかった命題の証明。

命題 (2.2) の証明。

(主張 1)  $T_{-\Lambda_i}^0(M(w \cdot (-\Lambda_i))) = M(w \cdot 0) + M(ws_i \cdot 0)$

( $\because$ ) 命題 (2.1) の証明と同様で定義通りに計算すればよく、 $L(\Lambda_i)$  の *weight*  $\nu$  で  $w \cdot (-\Lambda_i + \nu) = \tau \cdot 0$  となるのが  $\Lambda_i$  と  $s_i \Lambda_i$  に限ることを示せば十分である。

$|- \Lambda_i + \nu + \rho|^2 = |\rho|^2$  に、 $|\Lambda_i| \geq |\nu|$  を代入すれば

$$(\Lambda_i - \nu, \rho - \Lambda_i) \leq 0$$

となるので、 $\nu$  は  $\nu = \Lambda_i - m\alpha_i$  の形で、再び  $|\nu|^2 \leq |\Lambda_i|^2$  に代入して  $m = 0, 1$  を得る。

(主張2)  $K_0(\mathcal{O}_{[0]})$  中で、 $T_0^{-\Lambda_i} T_{-\Lambda_i}^0$  は2倍写像。

( $\because$ ) (主張1) と命題 (2.1) より明らか。

(主張3) (1)  $ys_i < y$  のとき、非負整数  $b_{y,w}^{(i)}$  が存在して、 $b_{y,ys_i}^{(i)} = 1$  かつ

$$\chi_y(s_i \cdot \mu) = \chi_y(\mu) + \sum_{ws_i > w} b_{y,w}^{(i)} \chi_w(\mu)$$

(2)  $ys_i > y$  のとき、 $\chi_y(s_i \cdot \mu) = -\chi_y(\mu)$

(  $T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0)) = \chi_y(0) + \chi_y(s_i \cdot 0)$  だから、(1) よりとくに、命題 (2.2) の  $w$  の候補として、 $ws_i > w$  を満たすもののみ考えればよいことがわかる。 )

( $\because$ ) (1)  $M(\tau \cdot \mu)$  の係数たちの等式だと考えれば、 $\mu = 0$  として十分。(主張1) より、

$$\begin{aligned} T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0)) &= L(y \cdot 0) + \chi_y(s_i \cdot 0) \\ &= aL(y \cdot 0) + bL(ys_i \cdot 0) + \sum_{w \neq y, ys_i} b_{y,w}^{(i)} L(w \cdot 0) \end{aligned}$$

とかける。 仮に最後の和に  $ws_i < w$  の項があらわれると、

$$[ T_0^{-\Lambda_i} T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0)) : L(w \cdot (-\Lambda_i)) ] \neq 0$$

となり、(主張2) より  $w \neq y, ys_i$  に反す。 さらに

$$T_0^{-\Lambda_i} T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0)) = aL(y \cdot (-\Lambda_i))$$

となるので、 $a = 2$ 。次に全射、

$$T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(M(y \cdot 0)) \rightarrow T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0))$$

を考えると、 $b \leq 1$ 。仮に  $b = 0$  とすると、

$M(y \cdot 0)$  から  $T_{-\Lambda_i}^0 T_0^{-\Lambda_i}(L(y \cdot 0))$  への全射が得られるので、 $a = 2$  反す。

$$(\text{主張 4}) \quad \chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(s_{i+1} s_i \cdot 0) = \sum c_w \chi_w(0)$$

とかけば、 $ws_{i+1} < w$  ならば  $c_w = 0$

( $\because$ ) (主張 3) より、

$$\chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(s_{i+1} s_i (s_{i+1} \cdot 0)) =$$

$$\chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(s_i s_{i+1} s_i \cdot 0) = -\chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(s_{i+1} s_i \cdot 0)$$

なので、 $\sum c_w \chi_w(s_{i+1} \cdot 0) = -\sum c_w \chi_w(0)$  である。故に  $\chi_w(0)$  の係数を見比べればよい。

(主張 3) を用いて、 $\chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(s_{i+1} s_i \cdot 0)$  を  $\chi_w(0)$  たちであらわし、 $w_2 s_i > w_2$  かつ  $w_2 s_{i+1} < w_2$  である  $w_2$  に対して  $\chi_{w_2}(0)$  の係数を見ると、(主張 4) より  $w_2 \neq y^0 s_i s_{i+1}$  ならば、

$$\sum_{\substack{w_1 s_{i+1} > w_1 \\ w_1 s_i < w_1}} b_{y^0 s_i s_{i+1}, w_1}^{(i+1)} b_{w_1, w_2}^{(i)} = 0$$

となる。つまり、

$$(\text{主張 5}) \quad w_1 \in D(\alpha, \alpha_{i+1}) \text{ かつ } w_2 \in D(\alpha_{i+1}, \alpha_i) \text{ かつ}$$

$$w_2 \neq y^0 s_i s_{i+1} \text{ ならば、 } b_{y^0 s_i s_{i+1}, w_1}^{(i+1)} b_{w_1, w_2}^{(i)} = 0$$

同様に今度は  $\chi_{y^0 s_i s_{i+1}}(0)$  の係数を見ると、

$$\begin{aligned} & -1 + b_{y^0 s_i s_{i+1}, y^0 s_i}^{(i+1)} b_{y^0 s_i, y^0 s_i s_{i+1}}^{(i)} + b_{y^0 s_i s_{i+1}, y^0 s_{i+1} s_i}^{(i+1)} b_{y^0 s_{i+1} s_i, y^0 s_i s_{i+1}}^{(i)} \\ & + \sum_{\substack{w \notin y < s_i, s_{i+1} > \\ w s_{i+1} > w \\ w s_i < w}} b_{y^0 s_i s_{i+1}, w}^{(i+1)} b_{w, y^0 s_i s_{i+1}}^{(i)} = 0 \end{aligned}$$

ここで最後の和は 0 である。 実際、 $w = w^0 s_i$  のときは、 $b_{w^0 s_i s_{i+1}, w^0 s_i}^{(i+1)} = 1$  と (主張 5) より、 $b_{w, y^0 s_i s_{i+1}}^{(i)}$  が 0 で、 $w = w^0 s_{i+1} s_i$  のときは、 $b_{w^0 s_{i+1} s_i, w^0 s_{i+1}}^{(i)} = 1$  と (主張 5) より、 $b_{y^0 s_i s_{i+1}, w}^{(i+1)}$  が 0 だからである。

同様にして、 $b_{y^0 s_i s_{i+1}, y^0 s_{i+1} s_i}^{(i+1)}$  も 0。 よって、

$$(\text{主張 6}) \quad b_{y^0 s_i, y^0 s_i s_{i+1}}^{(i)} = 1$$

(命題 (2.2) の証明)  $y = y^0 s_i$  のときは、(主張 5) より、 $w s_{i+1} < w s_i > w$  かつ  $w \neq y^0 s_i s_{i+1}$  ならば  $b_{y^0 s_i, w}^{(i)} = 0$  なので (主張 6) より O.K.

$y = y^0 s_{i+1} s_i$  のときは、 $w s_i > w$ ,  $w s_{i+1} < w$  かつ  $w \neq y^0 s_{i+1}$  ならば  $b_{y^0 s_{i+1} s_i, w}^{(i)} = 0$  であることを示せばよいが、ここで  $i$  と  $i+1$  を入れかえた式を示しても同じである。 すると、 $w = w^0 s_{i+1} s_i$  のとき (主張 5) と  $b_{w^0 s_{i+1} s_i, w^0 s_{i+1}}^{(i)} = 1$  より O.K. で  $w = w^0 s_i$  のとき (主張 5) と  $b_{w^0 s_i, w^0 s_i s_{i+1}}^{(i)} = 1$  (主張 6) より O.K.

命題 (2.4) の証明.

$n^-$ ,  $n^+$  を anti Borel と Borel の nilradical とします。

$$U(\mathfrak{g}) = (n^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) n^+) \oplus U(\mathfrak{h})$$

から  $U(\mathfrak{h})$  への自然な射影を  $\phi$  とし、

$$\phi_S : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h})$$

$$\phi^S : U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h}) \rightarrow U(\mathfrak{h})$$

なる 2 つの射影も同様に定義します。  $\phi = \phi^S \circ \phi_S$  です。

$$(\text{主張}) \quad I(\lambda) = \{ u \in U(\mathfrak{g}) \mid \lambda(\phi(U(\mathfrak{g})uU(\mathfrak{g}))) = 0 \}$$

( $\because$ )  $L(\lambda)$  の *highest weight vector* を  $v_\lambda$  とする。  $u \in I(\lambda)$  は  $U(\mathfrak{g})uU(\mathfrak{g})v_\lambda$  が  $L(\lambda)$  の *proper submodule* であることと同値。

(命題 (2.4) の証明)  $\lambda$  を *highest weight* にもつ既約  $U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h})$ -加群を  $\hat{L}(\lambda)$  とかくと、

$$\begin{aligned} \text{Ann}_{U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h})}(\hat{L}(\lambda)) \\ = \text{Ann}(L(\lambda)|_{\mathfrak{h}_S}) \otimes U(\mathfrak{h}_S^\perp) + U(\mathfrak{g}_S) \otimes \text{Ker}(\lambda|_{U(\mathfrak{h}_S^\perp)}) \end{aligned}$$

より、  $\text{Ann}(\hat{L}(\lambda)) \subseteq \text{Ann}(\hat{L}(\mu))$ 。 ここで、

$$\phi(U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h})uU(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h})) = \phi^S(U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h})\phi_S(u)U(\mathfrak{g}_S + \mathfrak{h}))$$

と (主張) より  $\phi_S(I(\lambda)) \subseteq \text{Ann}(\hat{L}(\lambda))$  だから、  $u \in I(\lambda)$  なら

(主張) より  $\mu(\phi(u)) = 0$ 。  $I(\lambda)$  が両側イデアルであることに注意すると、再び (主張) より  $I(\lambda) \subseteq I(\mu)$ 。

命題 (3.2) の証明. 以下では  $\lambda, \mu, \nu$  を *dominant integral* とします。すると、

$$\begin{aligned} [L(M(\lambda), M(w \cdot \mu))|_{U(\mathfrak{g}_\Delta)} : L(\nu)] \\ = \dim \text{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M(\lambda), L(\nu)^* \otimes M(w \cdot \mu)) \end{aligned}$$

であり、 $\lambda$  が dominant よりさらに、

$$\dim (L(\nu)^*)^{\lambda-w\cdot\mu} = \dim L(\nu)^{w\cdot\mu-\lambda} \text{ (weight space の次元)}$$

に等しいわけですから、

**定義.**  $w\cdot\mu-\lambda$  の  $W$ -軌道の中で dominant なものを  $\nu_w$  とかけば、  
 $L(M(\lambda), M(w\cdot\mu))$  にあらわれる  $L(\nu)$  は  $\nu_w \leq \nu$  を満たす。

これを *min K-type* とよぶ。

(主張 1)  $L(M(\lambda), L(w\cdot\mu)) \neq 0$

( $\because$ )  $M(\lambda)$  は *projective object* 故  $L(M(\lambda), *)$  は *exact functor*。

故に、 $M(w'\cdot\mu) \subsetneq M(w\cdot\mu)$  のとき

$$[L(M(\lambda), M(w'\cdot\mu)) : L(\nu_w)] = 0$$

を示せばよいが、仮にそうでないとすると  $L(\nu_w)^{\nu_{w'}} \neq 0$  なので、 $\nu_w = \nu_{w'}$  つまり  $w = w'$  で矛盾。

(主張 2)  $X, Y$  を有限生成 *HC-module* で、右作用に関して  $\mathcal{O}_{[\lambda]}$  に属するとする。このとき、

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{(U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g}))}(X, Y) \\ & \simeq \text{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(X \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M(\lambda), Y \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M(\lambda)) \end{aligned}$$

( $\because$ )  $X$  と  $Y$  がこのような

*HC-module* のなす圏において *projective* ならば、これらは右作用が自明な

有限次元  $HC$ -module  $E$  と  $U(\mathfrak{g})/Ann(M(\lambda))$  のテンソル積の直和因子だから、このとき (主張 2) は

$$\begin{aligned} Hom_{(U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g}))}(E \otimes U(\mathfrak{g})/Ann(M(\lambda)), E \otimes U(\mathfrak{g})/Ann(M(\lambda))) \\ \rightarrow Hom_{U(\mathfrak{g})}(E \otimes M(\lambda), E \otimes M(\lambda)) \end{aligned}$$

が単射であることと両辺の次元がともに  $\dim(E^* \otimes E)^0$  に等しいことからしたがる。

ここで左辺の次元を計算するには

$$\dim Hom_{\mathfrak{g}}(E, U(\mathfrak{g})/Ann(M(\lambda))) = E^0$$

をもちいるわけだが、これは  $S(\mathfrak{g})$  の調和多項式の全体  $H$  が表現としては  $\sum \dim(L(\nu)^0)L(\nu)$  に等しいことより従う。

$X$  が *projective* で  $Y$  が任意のときは、

$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow Y$  ( $P_1, P_2$  は *projective*) にたいして可換図式をかけば示せる。

$X, Y$  とともに任意のときも同様である。

(命題 (3.2) の証明) (主張 2) より *indecomposable projective* は

\*  $\otimes_{U(\mathfrak{g})} M(\lambda)$  により *indecomposable projective* にうつる。故に既約成分の重複度を調べれば

$$L(M(\lambda), L(w \cdot \mu)) \otimes_{U(\mathfrak{g})} M(\lambda) \rightarrow L(w \cdot \mu)$$

は同型であることがわかる。こうして、有限生成で右作用が  $\mathcal{O}_{[\lambda]}$  に、左作用が  $\mathcal{O}_{[\mu]}$  に属する  $HC$ -module のなす圏と  $\mathcal{O}_{[\mu]}$  の圏同値が得られたので、題意は示された。

命題 (3.3) の証明.  $\theta$  を 正ルートを一斉に負ルートにうつす  $\mathfrak{g}$  の *automorphism* とし、 $X^t = -\theta(X)$  ( $X \in \mathfrak{g}$ ) により 転置をさだめる。  $L(M(\mu), L(w^{-1} \cdot \lambda))$  を、  
 $u_1 \cdot \varphi \cdot u_2 = u_2^t \varphi u_1^t$  により *HC-module* とみなしたものを考えると、  
 これは  $L(M(\lambda), L(w \cdot \mu))$  と同型である。 実際、*translation functor* をほどこすことを考えれば  $\lambda - w \cdot \mu$  が全て *dominant* であるときを示せば十分で、このとき *min K-type*  $\nu_w$  は全て異なるので、同型を示すには *min K-type* が一致することを見ればよい。

故に命題 (3.3) は、 $L\text{Ann}(L(M(\mu), L(w^{-1} \cdot \lambda))) = I(w^{-1} \cdot \lambda)$  より従う。

#### REFERENCES

- [Dix]. J.Dixmier, "Enveloping Algebras," North-Holland, 1977.
- [Ja1]. J.C.Jantzen, "Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren," Springer-Verlag, 1983.
- [Ja 2]. J.C.Jantzen, "Moduln mit einem höchsten Gewicht," Springer LN 750, 1979.
- [Bo]. W.Borho, *Survey on Enveloping Algebras of semisimple Lie Algebras*, CMS Conference Proceedings 5 (1984), 19 – 50.
- [Sh]. Shi Jian-Yi, "The Kazhdan-Lusztig Cells in Certain Affine Weyl Groups," Springer LN 1179, 1986.
- [L]. G.Lusztig, *The two-sided cells of the affine Weyl group of type  $\tilde{A}_n$* , in "Infinite-dimensional groups with applications," V.G.Kac ed., MSRI publications, vol. 4, Springer-Verlag, 1985, pp. 275–283.