

混合問題における特異性の伝播について

筑波大 数学系 若林誠一郎

1. 序 定係数双曲型方程式(系)に対する Cauchy 問題の基本解の特異性の評価は、Atiyah-Bott-Gårding [1] によって与えられた。 $1/4$ -空間における定係数双曲型混合問題に対しては、まず Matsumura [4] がそこで用いられた localization method を混合問題に適用して、反射波に対応する特異性の inner estimate を与えた。そして、Wakabayashi [8] において、ある種の制限の下で側面波に対応する特異性の inner estimate が与えられ、Tsuji [7], Wakabayashi [9] において strictly hyperbolic operator の積に対する混合問題(境界が非特性)に対して境界波に対応する特異性も含めた形で、基本解の特異性の inner estimate が与えられた。また、同じ仮定の下で基本解の outer estimate が Wakabayashi [10] によって与えられた。これらは単独の方程式に対する結果であるが、方程式系に対しても全く同様の議論を用いて対応する結果を得るこ

とができる(Garnir[3])。しかし数理物理学にあらわれる双曲型方程式(系)の混合問題を扱う上で、上に述べた仮定は強すぎる。例えば結晶光学の方程式、電磁流体の方程式等は、[9],[10]の議論では扱えない。ここでは、 $1/4$ -空間における $\mathcal{E}$ -well posed な定係数双曲型混合問題に対して、その基本解の特異台の inner and outer estimates が[1]に対応する形で与えられることをしめす。

Cauchy問題においては、hyperbolic polynomial の性質を調べればよいが、混合問題においては、さらに hyperbolic functionである Lopatinski行列式に対して類似の性質をしめすことによって望む結果が得られる。hyperbolic polynomial と違って、Lopatinski行列式の localizationの主部と全部の localizationとは必ずしも一致しない。そのため、Cauchy問題と少し異った形で結果が与えられる。また、Lopatinski行列式の定義域(正確には、Lopatinski行列式の localizationの定義域)が一般に制限されているために側面波に対応する特異性があるから、Cauchy問題とは異なる。

なお、stationary phase methodを用いた Duff[2]の研究があることに注意しておく。

2. 記号及び仮定 次の記号を用いる:

$\mathbb{R}^n$: n 次元(実)Euclid空間, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} x' &= (x_1, \dots, x_{n-1}), \quad \tilde{\xi} = (\xi, \xi_{n+1}), \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \\ \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \vartheta = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad \tilde{\vartheta} = (\vartheta, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \mathbb{R}_+^n &= \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}, \quad X = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^1, \\ D &= i^{-1}(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n). \end{aligned}$$

$P(\xi)$ を次数 m の hyperbolic polynomial w.r.t. ϑ とする。すなわち、

$$P^0(-i\vartheta) \neq 0, \quad P(\xi + s\vartheta) \neq 0 \quad \text{when } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ and } \text{Im } s < -\gamma_0.$$

ここで、 P^0 は P の主部を表わす。すなわち、

$$P(t\xi) = t^m(P^0(\xi) + o(1)) \quad \text{as } t \rightarrow \infty, \quad P^0(\xi) \neq 0.$$

$\Gamma = \Gamma(P, \vartheta) (= \Gamma(P)) (\subset \mathbb{R}^n)$ によって $\{\xi \in \mathbb{R}^n; P^0(-i\xi) \neq 0\}$ の ϑ を含む connected component を表わし、

$$\Gamma_0 = \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}; (\xi', 0) \in \Gamma\},$$

$$\dot{\Gamma} = \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}; (\xi', \xi_n) \in \Gamma \text{ for some } \xi_n \in \mathbb{R}\}$$

とおく。 $P(\xi)$ の ξ^0 での localization $P_{\xi^0}(\eta)$ 及びその重複度 m_{ξ^0} を

$\nu^m P(\nu^{-1}\xi^0 + \eta) = \nu^{m_{\xi^0}}(P_{\xi^0}(\eta) + o(1))$ as $\nu \downarrow 0$, $P_{\xi^0}(\eta) \neq 0$,
によって定義する([1]参照)。そのとき、 $\Gamma \subset \Gamma_{\xi^0} \equiv \Gamma(P_{\xi^0})$
が成立つ。 $P(\xi)$ を

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m'} P_j(\xi') \xi_n^j, \quad P_{m'}(\xi') \neq 0,$$

と書けば、 $P_n(\xi) = P_{(0,1)}(\xi)$ より

$$P_n(\xi') \neq 0 \quad \text{for } \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} - i\gamma_0\vartheta' - i\dot{\Gamma}_{(0,1)}$$

が得られる。 $\Gamma_c \subset \tilde{\Gamma} \subset \tilde{\Gamma}_{(c,1)}$ より、 $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} - i\gamma_c \mathcal{V}' - i\Gamma_c$ のとき $P(\xi', \lambda) = 0$ の λ に関する根を $\lambda_1^+(\xi'), \dots, \lambda_l^+(\xi'), \lambda_1^-(\xi'), \dots, \lambda_{m-l}^-(\xi') (Im \lambda_k^\pm(\xi') \geq 0)$ と表わせる。混合問題 $\{P, B_j; j=1, \dots, l\}$ の基本解とは

$$(1) \quad \begin{cases} P(D_x)G(x, y_n) = f(x') \delta(x_n + y_n), & (x, y_n) \in X, \\ B_j(D_x)G(x, y_n)|_{x_n=0} = 0, & j=1, \dots, l, x' \in \mathbb{R}^{n-1}, y_n < 0, \\ \text{supp}_x G(x, y_n) \subset (0, \dots, 0, -y_n) + K, \end{cases}$$

をみたす $x_n = 0$ の近傍で $x_n = 0$ までこめて x_n に関して滑らかな超関数 $G(x, y_n)$ のことである。ここで、 K は $K \setminus \{0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0\}$ なる原点を頂点とするある閉凸錐を表わす。

x_1 を時間変数、 $(x_2, \dots, x_n)$ を空間変数と考えている。

$P_+(\xi', \lambda) = \prod_{j=1}^l (\lambda - \lambda_j^+(\xi'))$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} - i\gamma_c \mathcal{V}' - i\Gamma_c$, とおき、Lopatinski 行列式 $R(\xi')$ を

$$R(\xi') = \det L(\xi'), \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} - i\gamma_c \mathcal{V}' - i\Gamma_c,$$

$$L(\xi') = \left(\frac{1}{2\pi i} \oint B_j(\xi', \lambda) \lambda^{k-1} P_+(\xi', \lambda)^{-1} d\lambda \right)_{j,k=1,\dots,l}$$

により定義する。次の仮定をおく:

(A) $\{P, B_j\}$ は Σ -well posed である。すなわち、

$$R^c(-i\mathcal{V}') \neq 0, \quad R(\xi' + is\mathcal{V}') \neq 0 \text{ when } \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}, Im s < -\gamma_1.$$

ここで、 $R^c(\xi')$ は $R(\xi')$ の主部を表わし、 $\gamma_1 > \gamma_c$ とえらんでおく (Sakamoto [5])。

条件 (A) より、(1) の解 $G(x, y_n)$ が一意に存在することが従

う (Shibata [6]).

$$G(x, y_n) = E(x, x_n + y_n) - F(x, y_n)$$

と表わす。ここで、 $E(x)$ は Cauchy 問題の基本解を表わす。

そのとき、 $F(\tilde{z})$ ($\tilde{z} = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1})$) は

$$F(\tilde{z}) = (z_n \pi)^{-(n+1)} \int_{R^{n+1} \setminus L_{j, \tilde{z}}} \tilde{z}^{j-1} \sum_{j, k=1}^l e^{i \tilde{z} \cdot \tilde{\xi}} \\ \times \frac{R_{jk}(\tilde{\xi}) B_k(\tilde{\xi}, \varepsilon_{n+1}) \varepsilon_n^{j-1}}{R(\tilde{\xi}) P_+(\tilde{\xi}) P(\tilde{\xi}, \varepsilon_{n+1})} d\tilde{\xi}, \quad j > 0,$$

と書かれる。ここで、

$$R_{jk}(\tilde{\xi}) = (k, j)\text{-factor of } L(\tilde{\xi})$$

である。ここで $F(\tilde{z})$ を X 上の超函数と考えるが、

$F(\tilde{z})$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の超函数とも考えることができ、 $\text{supp } F \subset \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^{n+1}; z_n \geq 0\}$ であることに注意しておく。

問題は仮定(A)の下で $WF(G)$ を評価することであるが、

[1] によ、 $WF(E)$ の評価は与えられているので、 $WF(F)$ を評価すればよい。境界上に与えられた δ -函数に対する混合問題の解 (Poisson 核) の積分表示は $F(\tilde{z})$ のそれより少し簡単になり、その wave front set が評価されれば $WF(F)$ も評価される (すなわち同じ議論が適用できる)。Poisson 核の wave front set に対する結果は比較的簡単に記述されるが、 $WF(F)$ に対する結果は入射波が境界で反射される状況を非常に良く説明してくれる。故に、ここでは $WF(F)$ に対して結果を述べる。

3. 結果 $P(\varepsilon)$ を

$$P(\varepsilon) = \prod_{j=1}^t p_j(\varepsilon)^{\nu_j}, \quad p_j: \text{既約},$$

と表わし、 $\varepsilon' \in \mathbb{R}^{n-1} - i\gamma_0 \mathbb{R}' - i\Gamma_0$ のとき、 $\prod_{j=1}^t p_j(\varepsilon' + \lambda) = 0$ が虚部正の根をとる λ と仮定する。 $\varepsilon' \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して、

$$\dot{\Gamma}_{\varepsilon'} = \bigcap_{j=1}^t \left\{ \bigcap_{\varepsilon'' \in \mathbb{R}} \dot{\Gamma}((p_j)_{\varepsilon''}) \cap \dot{\Gamma}(((p_j)_{\varepsilon''})_{\varepsilon', 0}) \right\}$$

とおく。そのとき、次の2つの補題が成立つ。

補題 1 $\forall$ compact set K in $\mathbb{R}^{n-1} - i\gamma_0 \mathbb{R}' - i\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}$, $\exists \nu_K (> 0)$ st.

(i) $R(\nu^{-1}\varepsilon' + \eta)$: well-defined for $\eta \in K$ and $0 < \nu \leq \nu_K$,

(ii) $\nu^{h_{\varepsilon'}} R(\nu^{-1}\varepsilon' + \eta') = \sum_{j=1}^{\infty} \nu^{j/L} R_{\varepsilon', j}(\eta')$,

$$R_{\varepsilon', j}(\eta') (= R_{\varepsilon'}(\eta')) \neq 0,$$

(収束性 $(\eta', \nu) \in K \times \{0 < \nu \leq \nu_K\}$ で一様)

ここで、 $h_{\varepsilon'} \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{N}$ である。さらに、 $R_{\varepsilon', j}(\eta')$ は $\mathbb{R}^{n-1} - i\gamma_0 \mathbb{R}' - i\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}$ で正則である。

補題 2 $\forall$ compact set K in $\mathbb{R}^{n-1} - i\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}$, $\exists \nu_K, r_K (> 0)$ st.

(i) $R(\nu^{-1}r\varepsilon' + r\eta')$: well-defined when $r_K \eta' \in \mathbb{R}^{n-1} - i\gamma_0 \mathbb{R}' - i\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}$, $\alpha \eta' \in K$ for some $\alpha \in \mathbb{C}$ ($|\alpha|=1$), $0 < \nu \leq \nu_K$ and $r \geq r_K$,

(ii) $(\nu r^{-1})^{h_{\varepsilon'}} R(\nu^{-1}r\varepsilon' + r\eta') = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \nu^{h_j(\varepsilon') - l} / L R_{\varepsilon', j}^l(\eta')$,

$$R_{\varepsilon', j}^l(\eta') \neq 0 \quad \text{if} \quad R_{\varepsilon', j}(\eta') \neq 0,$$

(収束性 (η', ν, r) ; $r_K \eta' \in \mathbb{R}^{n-1} - i\gamma_0 \mathbb{R}' - i\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}$, $\alpha \eta' \in K$ for some

$\alpha \in \mathbb{C}$ ($|\alpha|=1$), $0 < \nu \leq \nu_K$ and $r \geq r_K$) で一様)

ここで、 $h_j(\varepsilon') \in \mathbb{R}$ である。さらに、 $R_{\varepsilon', j}^l(\eta')$ は $\mathbb{R}^{n-1} - i\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}$

て正則である。

注意 $(R_{\xi''})^0(\eta') = R_{\xi''}^c(\eta')$.

これら2つの補題は、 $R_{jR}(\xi')$, $P_+(\xi', \lambda)$ に対して成立つ。

$(R_{\xi''})^0(-i\eta') \neq 0$ であるので、 $\Gamma(R_{\xi''})$ によって $\{\eta' \in \dot{\Gamma}_{\xi''}; (R_{\xi''})^c(-i\eta') \neq 0\}$ の η' を含む connected component を表わし、
 $\Gamma(P_{+\xi'})$ によって $\{\eta \in \dot{\Gamma}_{\xi'} \times \mathbb{R}; P_{+\xi'}^c(-i\eta) \neq 0\}$ の η を含む connected component を表わす。

補題3 $\Gamma(R_{\xi''})(\subset \mathbb{R}^{n-1})$ は開凸錐であり、

$$R_{\xi''}(\xi') \neq 0 \quad \text{for } \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} - i\eta', \eta' \in \dot{\Gamma}(R_{\xi''}),$$

$$(R_{\xi''})^0(\xi') \neq 0 \quad \text{for } \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} - i\Gamma(R_{\xi''}).$$

補題4 $\Gamma(P_{+\xi'}) (\subset \mathbb{R}^n)$ は開凸錐であり、

$$P_{+\xi'}(\xi) \neq 0 \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n - i\eta, \eta \in \dot{\Gamma}(P_{+\xi'}),$$

$$P_{+\xi'}^c(\xi) \neq 0 \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n - i\Gamma(P_{+\xi'}),$$

$$\Gamma(P_{+\xi'}) \supset \Gamma_{\xi'}.$$

Lopatinski 行列式 $R(\xi')$ の主部 $R^c(\xi')$ の localization が定義できることをしめすために、

$$t_j \equiv t_j(\xi') = k_{\xi'} + k_j(\xi'),$$

$$t \equiv t(\xi') = \max_j t_j(\xi'), \quad \omega \equiv \omega(\xi') = \min \{j; t(\xi') = t_j(\xi')\},$$

と置く。そのとき、 $t(\xi') = t_0(0)$ であり、補題2より次の補題を得る。

補題5 $R^0(\varepsilon')$ は定義でき、 $(R^0)_{\xi^0}(\eta')$ と定義できる。

さらに、

$$(R^0)_{\xi^0}(\eta') = R_{\xi^0, \omega(\xi^0)}^0(\eta').$$

$(R^0)_{\xi^0}(-i\eta') \neq 0$ であるので、 $\Gamma((R^0)_{\xi^0})$ によって $\{\eta' \in \Gamma_{\xi^0}; (R^0)_{\xi^0}(-i\eta') \neq 0\}$ の η' を含む connected component を表わす。

補題6 $\Gamma((R^0)_{\xi^0}) (\subset \mathbb{R}^{n+1})$ は開凸錐であり、

$$(R^0)_{\xi^0}(\varepsilon') \neq 0 \text{ for } \varepsilon' \in \mathbb{R}^{n+1} - i\Gamma((R^0)_{\xi^0}).$$

今、 $\xi^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して、

$$\begin{aligned} \Gamma_{\xi^0} &= \{ \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^{n+1}; (\eta', \eta_{n+1}) \in \Gamma(P_{(\xi^0, \xi_{n+1}^0)}) \} \\ &\quad \cap (\Gamma(P_{+\xi^0}) \times \mathbb{R}) \cap (\Gamma(R_{\xi^0}) \times \mathbb{R}^2), \\ \Gamma_{\xi^0}^0 &= \{ \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^{n+1}; (\eta', \eta_{n+1}) \in \Gamma(P_{(\xi^0, \xi_{n+1}^0)}) \} \\ &\quad \cap (\Gamma(P_{+\xi^0}) \times \mathbb{R}) \cap (\Gamma((R^0)_{\xi^0}) \times \mathbb{R}^2), \end{aligned}$$

とおく。

定理1 $\tilde{\xi}^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して、

$$\begin{aligned} &t^{N/L} \{ t^{p_0} e^{-it\tilde{z} \cdot \tilde{\xi}^0} F(\tilde{z}) - \sum_{j=0}^N F_{\tilde{\xi}^0, j}(\tilde{z}) t^{-N/L} \} \\ &\rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty, \text{ in } \mathcal{D}'(X), \quad N=0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ここで、 $p_0 \in \mathbb{Q}$, $L \in \mathbb{N}$ である。さらに、

$$\begin{aligned} &U_{\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}, \{1\}} \bigcup_{j=0}^{\infty} \text{supp } F_{\tilde{\xi}, j}(\tilde{z}) \times \{\tilde{\xi}\} \subset \text{WF}(F(\tilde{z})) \\ &\subset \text{WFA}(F(\tilde{z})) \subset U_{\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}, \{1\}} K_{\tilde{\xi}}^0 \times \{\tilde{\xi}\}, \\ &\overline{\text{ch}} [\bigcup_{j=0}^{\infty} \text{supp } F_{\tilde{\xi}^0, j}(\tilde{z})] \subset K_{\tilde{\xi}^0}, \end{aligned}$$

$$K_{\tilde{\xi}^c} \subset K_{\tilde{\xi}^c}^c.$$

ここで,

$$K_{\tilde{\xi}^c} = \{ \tilde{z} \in X; \tilde{z} \cdot \tilde{\eta} \geq 0 \text{ for } \forall \tilde{\eta} \in \Gamma_{\tilde{\xi}^c} \},$$

$$K_{\tilde{\xi}^c}^c = \{ \tilde{z} \in X; \tilde{z} \cdot \tilde{\eta} \geq 0 \text{ for } \forall \tilde{\eta} \in \Gamma_{\tilde{\xi}^c}^c \}.$$

定理 2. M を compact set in $\Gamma((R^d)_{\tilde{\xi}^c})$ とする。そのとき, $\exists U$: nbd. of $\tilde{\xi}^c$ s.t.

$$M \subset \Gamma((R^d)_{\tilde{\xi}}) \text{ for } \tilde{\xi} \in U.$$

系. $\bigcup_{\tilde{\xi} \in R^{n+1} \setminus \{0\}} K_{\tilde{\xi}}^c \times \{\tilde{\xi}\}$ は, $T^*X \setminus 0$ で閉じている。

ここで述べた補題・定理等の証明は, [11] で与えられている。

4. 例

例 1 $n=4$

$$P(\tilde{\xi}) = (\tilde{\xi}_1^2 - \tilde{\xi}_2^2 - \tilde{\xi}_3^2 - \tilde{\xi}_4^2 + a\tilde{\xi}_3)(\tilde{\xi}_1^2 - \tilde{\xi}_4^2), \quad a > 0,$$

$$B_1(\tilde{\xi}) = 1, \quad B_2(\tilde{\xi}) = (-\tilde{\xi}_1 - i\tilde{\xi}_3)\tilde{\xi}_4 - \tilde{\xi}_4^2,$$

そのとき, $R(\tilde{\xi}) = i\tilde{\xi}_3 + \sqrt{\tilde{\xi}_1^2 - \tilde{\xi}_2^2 - \tilde{\xi}_3^2 + a\tilde{\xi}_3}$ であり, $\{P, B_1, B_2\}$ は条件 (A) を満たす。この例では, $\bigcup_{\tilde{\xi} \in R^5 \setminus \{0\}} K_{\tilde{\xi}} \times \{\tilde{\xi}\}$ は, $T^*X \setminus 0$ の閉部分集合ではなく,

$$\bigcup_{\tilde{\xi} \in R^5 \setminus \{0\}} \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{supp } F_{\tilde{\xi}_j} \times \{\tilde{\xi}\} = \bigcup_{\tilde{\xi} \in R^5 \setminus \{0\}} K_{\tilde{\xi}} \times \{\tilde{\xi}\}$$

$$\subsetneq WF(F) \subset WF_A(F) \subset \bigcup_{\tilde{\xi} \in R^5 \setminus \{0\}} K_{\tilde{\xi}}^c \times \{\tilde{\xi}\},$$

$$\overline{\text{ch}}[WF(F)|_{\tilde{\xi}^c}] = \overline{\text{ch}}[WF_A(F)|_{\tilde{\xi}^c}] = K_{\tilde{\xi}^c}^c \text{ for } \tilde{\xi}^c \neq 0,$$

が示される。

例 2. $n = 3$

$$\begin{cases} P(\xi) = ((\xi_1 - \xi_2)^2 - \xi_3^2 + a)((2\xi_1 - \xi_2)^2 - \xi_3^2), \\ B_1(\xi) = 1, \quad B_2(\xi) = \xi_3 \end{cases}$$

そのとき、 $R(\xi') = -1$ で、 $\{P, B_1, B_2\}$ は条件(A)をみたす。

$(\xi_1 - \xi_2)^2 - \xi_3^2 + a$ は、 $a \neq 0$ のとき既約であることに注意しておく。

$$\begin{aligned} WF(F)|_{(1,1,-1,1)} &= \{ \tilde{z} \in X; \tilde{z} = \alpha(z, -1, 0, -1) + \\ &\quad \beta(z, -1, 1, 0) + \gamma(1, -1, 0, 0), \alpha, \beta > 0 \text{ and } \gamma \geq 0 \}, \\ &\quad (a \neq 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} WF(F)|_{(1,1,-1,1)} &= \{ \tilde{z} \in X; \tilde{z} = \alpha(z, -1, 0, -1) + \beta(z, -1, 1, 0), \\ &\quad \alpha, \beta > 0 \}, \quad (a = 0) \end{aligned}$$

である。上げ、 $a \neq 0$ のとき側面波と呼ぶべき波に対応する特異性があることをしめす。Cauchy 問題に比べて低階の影響が非常に大きいことを、この例はしめしている。

References

- [1] Atiyah, M. F., Bott, R. and Gårding, L., Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients. I, Acta Math., 124 (1970), 109-189.
- [2] Duff, G. F. D., On wave fronts, and boundary waves, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 189-225.
- [3] Garnir, H. G., Solution élémentaire des problèmes aux limites hyperboliques, to appear.
- [4] Matsumura, M., Localization theorem in hyperbolic mixed problems, Proc. Japan Acad., 47 (1971), 115-119.
- [5] Sakamoto, R., $\mathcal{E}$ -well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ., 14 (1974), 93-118.
- [6] Shibata, Y., A characterization of the hyperbolic mixed problems in a quarter space for differential operators with constant coefficients, to appear.
- [7] Tsuji, M., Fundamental solutions of hyperbolic mixed problems with constant coefficients, Proc. Japan Acad., 51 (1975), 369-373.
- [8] Wakabayashi, S., Singularities of the Riemann function of hyperbolic mixed problems in a quarter-space, Proc. Japan Acad., 50 (1974), 821-825.
- [9] _____, Singularities of the Riemann function of hyperbolic mixed problems in a quarter-space, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 11 (1976), 417-440.
- [10] _____, Analytic wave front sets of the Riemann functions of hyperbolic mixed problems in a quarter-space, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 11 (1976), 785-807.
- [11] _____, Propagation of singularities of the fundamental solutions of hyperbolic mixed problems, to appear.