

多項式のニュートン写像における鉢の幅について

上智大学理工学部 西沢 清子 (Kiyoko Nishizawa)

上智大学理工学部 藤村 雅代 (Masayo Fujimura)

1 Introduction

Newton 法は多項式の根を求めるもっとも有効な手段の一つである。ここでは、多項式の Newton 写像の性質を複素力学系の立場から考察する。

Newton 写像の dynamics には 2 つのタイプがある。1 つは、測度ゼロの集合をのぞいた任意の点を始点とした軌道が多項式の根のどれかに収束するような場合、もう 1 つは根に収束しないような始点の開集合が存在する場合である。後者は、critical point が、根以外の吸引鉢に引き込まれるときに起こる。1 変数 3 次多項式族についての研究が Head([Hea87]), Tan Lei([Lei]) でなされている。

多項式に対する Newton 写像の力学的性質は、一般の有理関数の性質に比べて特殊である。2 章で、Newton 写像の知られている結果を示す。

3 章では、ある多項式の Newton 写像と共役になるような有理関数の特徴づけとなる定理を証明する。この定理により Newton 写像はかなり特殊な有理関数であることがわかる。また、与えられた有理関数がある多項式の Newton 写像と共役であることがわかったとき、その多項式の形も求めることもできる。4 章では、Sutherland の結果を中心に根の直接鉢の幅をはかることを話題の中心にする。直接鉢の幅を評価することによって、多項式の解を求めるアルゴリズム (Newton 法) での、解に収束する初期値がどのような

範囲にあるかが保証され、また直接鉢のエリアが無限であることの証明にもなる。

2 力学的性質

この章では、Newton 法を力学系の立場から研究する上で必要な用語を導入する。

一般に、次数 s 次の有理関数は $s+1$ 個の不動点を持つ。

多項式 $p(z)$ に対して、Newton 写像 N_p を次の式で定義する。

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$$

式の形から明らかなように、 s 個の相異なる根をもつ多項式の Newton 写像は s 次の有理関数になり、 N_p の不動点は $p(z)$ の根と ∞ である。さらに、 ∞ は常に N_p の唯一の反発的不動点であって、多項式の次数が d のとき、その固有値は $\frac{d}{d-1}$ である。又、多項式のそれぞれの根の重複度を m_i とするとき、特に、その根は、固有値 $\frac{m_i-1}{m_i}$ の N_p の吸引的不動点となる。とくにその根が単根ならば、 N_p の超吸引的不動点になる。

Newton 写像のイテレーションにより根 α に収束するような始点の集合を α の吸引鉢という。また、吸引鉢のうち、特に根を含むような連結領域のことを直接鉢といい $B(\alpha)$ と書く。

Newton 写像の性質

- (i) アフィン変換 $h(z) = az + b$ によって $q(z) = p(h(z))$ とすれば N_q と N_p は $h(z)$ により、共役である。
- (ii) 直接鉢 $B(\alpha)$ は単連結領域である。
- (iii) ∞ は常に直接鉢 $B(\alpha)$ の境界上にある。
- (iv) N_p を直接鉢 $B(\alpha)$ に制限したとき、その局所次数が $s+1$ ならば、 $B(\alpha)$ は ∞ に近

づく s 個の "水路" を持つ。(4.1 節の図参照)

3 Newton 写像の特徴付け

一般に d 個の相異なる根を持つ多項式に対する Newton 写像が、 d 次の有理関数になり、多項式の各根が、その有理関数の吸引的不動点になる。

この章では有理関数がある多項式の Newton 写像と共役になるための特徴づけをする。

いくつかの必要な概念を Milnor [Mil] から引用する。

定義 1 有理関数 $f(z) : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ の不動点 z_0 の multiplicity を

$f'(z_0) \neq 1$ のとき 1

$f'(z_0) = 1$ のとき z_0 で Taylor 展開をして

$$f(z) = z_0 + (z - z_0) + a(z - z_0)^m + \cdots \quad (a \neq 0)$$

となるとき m

とする。

定義 2 正則関数 $f(z) (\neq z)$ の不動点 $z_0 \neq \infty$ の (holomorphic) index を次の式で定義する。

$$\iota(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\delta} \frac{1}{z-f(z)} dz = \text{Res} \left(\frac{1}{z-f(z)}; z_0 \right)$$

multiplicity と index に関して、次のことが知られている。

定理 (Milnor) 有理関数 $f(z) (\neq z) : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ に対して、次のことが成り立つ。

1. 不動点での index の和は 1:
$$\sum_{f(z)=z} \iota(f; z) = 1$$

2. z_0 が f の不動点で、そこでの固有値が $\lambda \neq 1$ ならば、
$$\iota(f; z_0) = \frac{1}{1-\lambda}$$

3. index は local analytic invariant である。

定理 1 d 次の有理関数に関して次の 2 条件は同値である。

1. $f(z)$ が相異なる d 個の不動点 $z_0, \dots, z_{d-1}$ を持ち、それぞれの固有値が、 $f'(z_i) = \frac{m_i-1}{m_i}$ である。
2. 相異なる d 個の根を持つ多項式 $p(z)$ が存在して、 f と N_p とは共役となる。

系として、Head [Hea87] の結果がある。これは、上の定理で、不動点がすべて超吸引的な特別な場合である。

系 1 d 次の有理関数に関して次の 2 つは同値。

- $f(z)$ が相異なる d 個の超吸引的不動点を持つ。
- 相異なる d 個の単根を持つ多項式 $p(z)$ が存在して、 f と N_p とは共役となる。

定理の証明

2. $\Rightarrow$ 1. は明らかなので、1. $\Rightarrow$ 2. を証明する。 $\deg(f(z)) = d$ より、 $f(z)$ は与えられた d 個の不動点の他に、もう一つ不動点を持つ、これを ζ とおく。 $z_0, \dots, z_{d-1}$ の multiplicity が 1 であることより、 $k = \sum m_i$ とおけば、index の計算により、 $f'(\zeta) = \frac{k}{k-1}$ を得る。よって、 ζ は反発的不動点である。

$\zeta \neq \infty$ の時は、座標変換 (Möbius 変換) によって $\zeta = \infty$ となるようにする。新しくできた有理写像 $\hat{f}$ を再び f と書くことにする。このとき、適当な多項式 Q, R によって

$$f(z) = \frac{Q(z)}{R(z)}, \quad \deg Q = d, \deg R < d,$$

とできる。

また、 $f(z_i) - z_i = 0$ ($i = 0, \dots, d-1$) より

$$f(z) = z + \frac{c \cdot \prod (z - z_i)}{R(z)}$$

となる。ここで、 $p(z) = c \cdot \prod (z - z_i)$ とする。各不動点 z_i での固有値が $\frac{m_i-1}{m_i}$ であることより、

$$R(z) = \sum_{i=0}^{d-1} m_i \prod_{i \neq j} (z - z_j)$$

がわかる。ここで

$$P(z) = p(z) \cdot \prod_{i=0}^{d-1} (z - z_i)^{m_i-1} = c \cdot \prod_{i=0}^{d-1} (z - z_i)^{m_i}$$

と置けば、

$$f(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}$$

を得る。 ■

4 鉢の幅について

ここでは、 d 次多項式として次のような多項式を考える。

$$p(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \dots + a_0 \quad (|a_i| \leq 1)$$

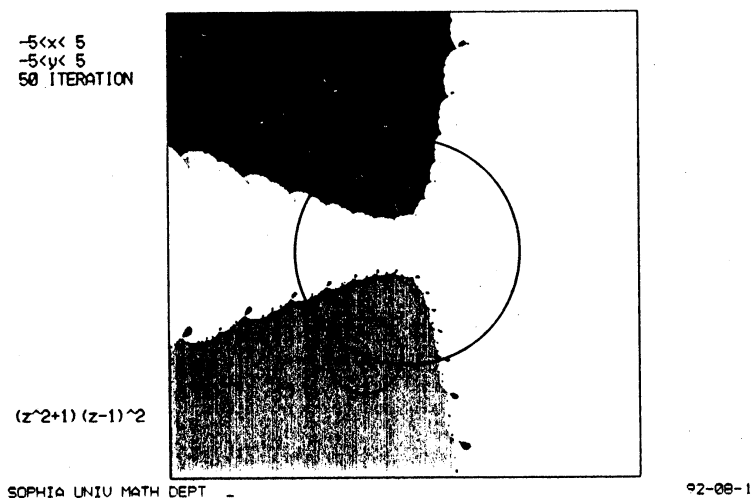
このような多項式の族を centered な $\mathcal{P}_d(1)$ という。このとき多項式の根は全て、原点中心の半径 2 の円に含まれる。さらに Lucas の定理によって $p'(z) = 0$ の根も、多項式の根の凸閉包に含まれる。

p と q が多項式で、 $q(z) = p(az + b)$ のとき N_p と N_q は $z \mapsto az + b$ によって共役になるので、Newton 法を研究するときには上のような $\mathcal{P}_d(1)$ に属する centered な多項式のみを考えれば十分である。

4.1 直接鉢の性質

Manning [Man86] と Sutherland [Sut90] の結果を中心に、多項式の Newton 写像の直接鉢の幅の下からの評価を考える。ここでの直接鉢の幅とは、原点を中心、半径 R の円上に中心を持ち根 α の直接鉢にすっぽりはいるような円の直径のことをさすことにする。

(下図参照)



Newton 写像に対して、根 α の直接鉢 $B(\alpha)$ は単連結であることが知られている [Prz89]。よって、Riemann の写像定理より単位円板 D から $B(\alpha) \setminus 0$ を α に移すような解析的微分同相写像がある。これを用いて、 $N|_{B(\alpha)}$ とブラシュケ積 M を共役にすることができる。[Bur79]

$$\begin{array}{ccc}
 B(\alpha) & \xrightarrow{N|_{B(\alpha)}} & B(\alpha) \\
 \uparrow h & & \uparrow h \\
 D & \xrightarrow{M} & D
 \end{array}$$

$$M(z) = ze^{i\theta} \prod_{j=1}^s \frac{z - \mu_j}{1 - \bar{\mu}_j z}$$

$M(z)$ は 0 を吸引的不動点として持ち、単位円上の $\xi_1, \dots, \xi_s$ を反発的不動点として持つ。

特に α が単根で $B(\alpha)$ が free critical point を含まないとき、 $M(z) = z^2$ になる。

次のような Manning による可換図を考える。

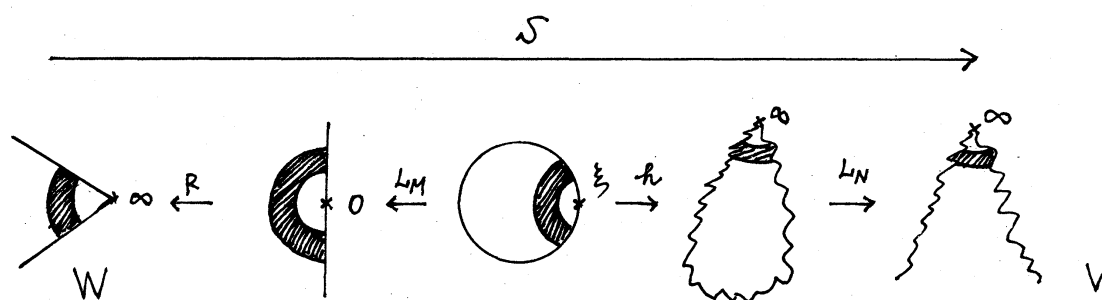
$$\begin{array}{ccccccc}
 \overline{C}, \infty & \xleftarrow{R} & \overline{C}, 0 & \xleftarrow{L_M} & D, \xi & \xrightarrow{h} & B(\alpha), \infty & \xrightarrow{L_N} & \overline{C}, \infty \\
 \downarrow \frac{d-1}{d} z & & \downarrow M'(\xi) z & & \downarrow M(z) & & \downarrow N|_{B(\alpha)} & & \downarrow \frac{d-1}{d} z \\
 \overline{C}, \infty & \xleftarrow{R} & \overline{C}, 0 & \xleftarrow{L_M} & D, \xi & \xrightarrow{h} & B(\alpha), \infty & \xrightarrow{L_N} & \overline{C}, \infty
 \end{array}$$

ただし、 L_N は $N|_{B(\alpha)}$ の ∞ における Shröder 関数方程式の解、 L_M は $M(z)$ の ξ における Shröder 関数方程式の解、また $R(z) = z^{\frac{\log(\frac{d-1}{d})}{\log M'(\xi)}}$ である。

ここで S を合成写像 $L_N \circ h \circ L_M^{-1} \circ R^{-1}$ とおき、 $W = S^{-1}(V)$ とすれば、 W はセクターで ∞ での角度は、

$$\pi \frac{\log(\frac{d-1}{d})}{\log(M'(\xi))}$$

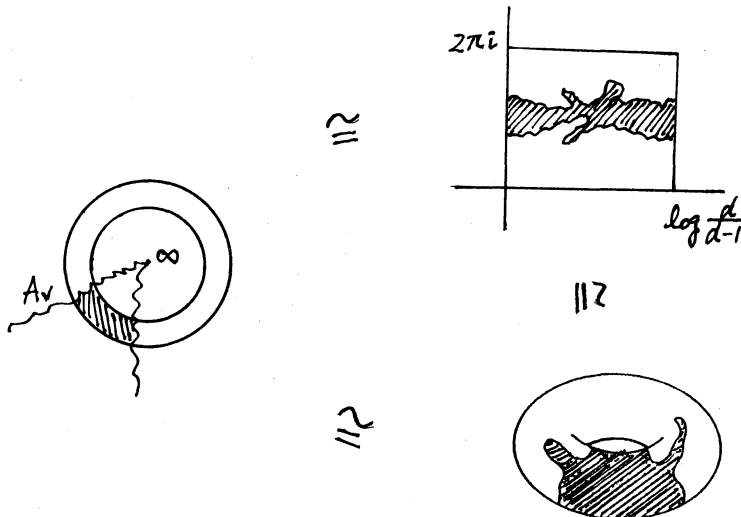
になる。下図参照。



4.2 直接鉢の幅をはかる

この節では根 α の直接鉢 $B(\alpha)$ の無限遠点での基本領域での最狭部分の幅を下から評価をすることによって、鉢の幅を求めることにする。

まず、写像 L_N の形より $B(\alpha)$ の ∞ の近くでの点の動きは $z \mapsto \frac{d-1}{d}z$ で、原点に近寄ってくるので、各軌道が1回だけ通過するような基本領域をとることができる。この領域 A_V はトーラス内のアニュラスと同相になり、その modulus は W の角度から計算できて、 $\frac{\pi}{\log M'((\xi))}$ となる。([Sut90] の Lemma 3.2) これを セクター V の "opening modulus" と呼ぶ。



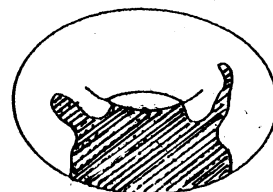
次の定理は上でのアニュラス A_V の最狭部分の幅をを求めるもので、[Sut90] の Proposition 3.5 にあたるものであるが、 $B(\alpha)$ の形によっては適用できない場合があったので、一部訂正した。また、これにより下限の値も訂正されている。実倉光広氏のアドバイスによるものである。

定理 2 T を $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$ と同型なトーラス、 A を上の意味で T に含まれる modulus

が m のアニュラスとする。

このとき A の境界の間の距離は少なくとも

$$\frac{2k \exp(\pi/2m)}{1 + \exp(\pi/m)}$$



である。ただし、 $k = \min\{1, \Im(\tau)\}$ 。

定理の証明

下図のように

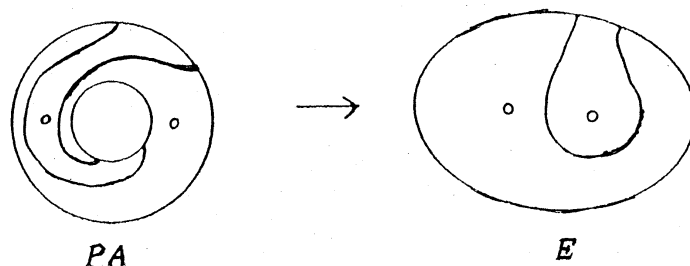
$$\text{長軸 } \left(-\frac{r+\frac{1}{r}}{2}, \frac{r+\frac{1}{r}}{2}\right), \quad \text{短軸 } \left(-\frac{r-\frac{1}{r}}{2}, \frac{r-\frac{1}{r}}{2}\right)$$

の楕円から 2 点 $-1, 1$ を取り除いたものを E とする。この楕円の曲線族 Γ として、楕円の境界を結ぶ曲線で、区間 $(-1, 1)$ を通るものを考える。

また、アニュラス $\{z; \frac{1}{r} < |z| < r\}$ から 2 点 $-1, 1$ を取り除いたものを PA とおき、その上の曲線族 Γ' として、アニュラスの内部の境界と外部の境界を結ぶものを考える。



写像 $z \mapsto \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$ は PA から E への 2 対 1 写像で等角である。



ここで、 Γ' の極值的長さが計算できて、

$$\lambda(\Gamma') = \frac{1}{\pi} \log r$$

よって、

$$\lambda(\Gamma) = \frac{2}{\pi} \log r$$

である。

トーラス内のアニュラス A を適当に平行移動して最狭部分を T の中心にくるようにする。

最狭部分の長さを δ とし、楕円 E を $\frac{\delta}{2}$ 倍して T に埋め込む。

1 対 1 に埋め込むために、 $r = \frac{k}{\delta} + \sqrt{\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 - 1}$,

($k = \min\{1, \Im(\tau)\}$) とする。

A 内の曲線族 Γ_A として A 内の閉曲線で、ホモトピーが 0 でないものを考えると、

$$\lambda(\Gamma_A) = \frac{1}{m}$$

となる。

Γ_A 内の任意の曲線が Γ の曲線を含むことより、

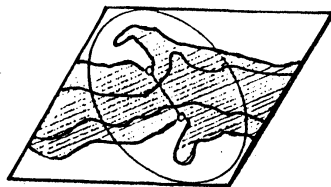
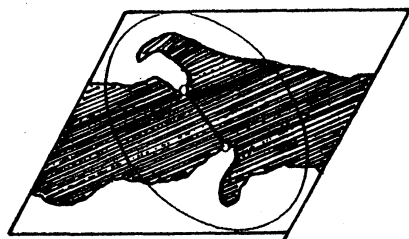
$$\Gamma < \Gamma_A$$

ゆえに

$$\frac{1}{m} = \lambda(\Gamma_A) \geq \lambda(\Gamma) = \frac{2 \log \left(\left(\frac{k}{\delta} \right) + \sqrt{\left(\frac{k}{\delta} \right)^2 - 1} \right)}{\pi}$$

δ について解くと、

$$\delta \geq \frac{2k \exp\left(\frac{\pi}{2m}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\pi}{m}\right)}$$



上の定理により 次の定理を得る。これは Sutherland の結果を修正したものである。

定理 3 ξ を $M(z)$ の不動点とすると、 $B(\alpha)$ は、すくなくとも、中心が $t_\xi \in B(\alpha)$, $(|t_\xi| = R > 2(d+1)/(d-1))$, で 半径

$$\frac{(R-2)}{3d(1 + \sqrt{(M'(\xi))})}$$

の円を含む。

5 3 次多項式の鉢の幅について

5.1 細い水路をもつ直接鉢

この節では、根 α の直接鉢の境界と、その吸引鉢の境界が交わることがあるか？ということを考える。視覚的な面から簡単にいえば、「直接鉢に、自分と同じ色のコブがつくか？」ということである。もしこのようなことが生じれば、 ∞ にのびるいくらでも細い水路をもつ直接鉢がえられる。従って、直接鉢の幅を、多項式の次数のみで下から評価することは出来ない。このとき ∞ にのびるいくつかの水路のうちで最も幅の広い水路の幅をもって、その直接鉢の幅とすれば、多項式の次数のみで、直接鉢の幅を下から評価することが出来ないだろうか。

以下では 3 次多項式に話を限る。共役性により次の Thurston model を用いて一般性を失わない。

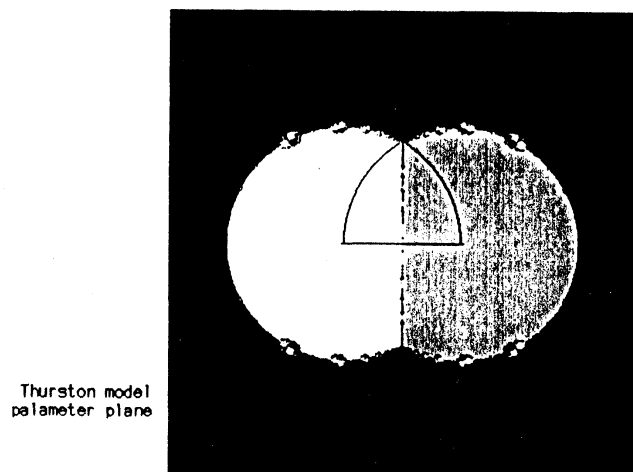
$$\begin{aligned} \{ p_\lambda(z) &= (z-1)(z + \frac{1}{2} + \lambda)(z + \frac{1}{2} - \lambda) \} \\ \left\{ N_{p_\lambda}(z) &= \frac{2z^3 + \lambda^2 - \frac{1}{4}}{3z^2 - (\lambda^2 + \frac{3}{4})} \right\} \end{aligned}$$

ここで Λ を、

$$\Lambda : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left\{-\frac{1}{2} + e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2} + e^{i\theta}; \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi\right\}$$

のようにすれば Λ は、この 3 次 Newton 写像のパラメータ平面の基本領域である [Lei]。

すなわち任意の N_p にたいして、共役となる $N_{p\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$ が存在する。(下図参照)



SOPHIA UNIV MATH DEPT

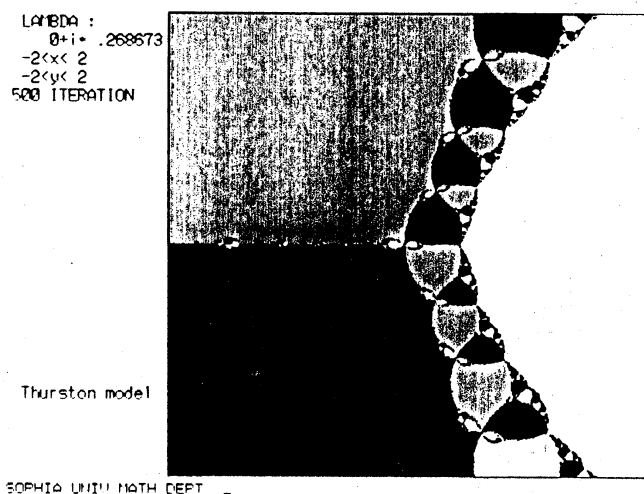
92-08-11

Thurston model では族 $\{N_{p\lambda}\}_\lambda$ に共通に ∞ はいつでも反発的不動点であり、0 は free critical point である。その critical value $-\frac{\lambda^2-1/4}{\lambda^2+3/4}$ の存在範囲は、 $\lambda \in \Lambda$ のとき原点を中心とする半径 3 の円に含まれる。

ここで 0 が前周期点になるようなパラメータ λ 、たとえば、 $0 \rightarrow N_{p\lambda}(0) \rightarrow \infty$ となる λ を求める。それは次の方程式の解である。

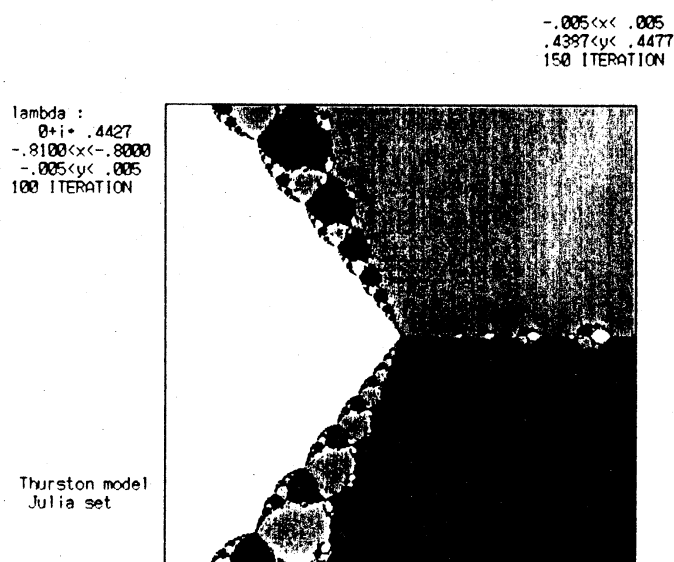
$$\lambda^6 - \frac{3}{4}\lambda^4 + \frac{51}{16}\lambda^2 + \frac{15}{64} = 0$$

このパラメータに対する N_p の鉢の様子は次のようになる。直接鉢に、吸引鉢がついている。

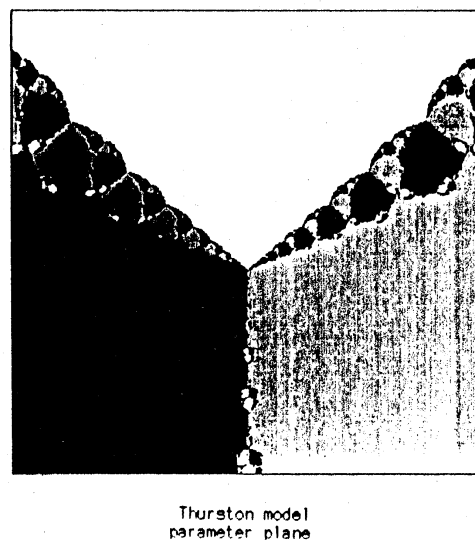


92-08-11

方程式の根 λ は、いわゆる Misiurewicz point である。この値を中心にしたパラメータ平面と $N_{p_\lambda}(0)$ を中心にした z 平面が似た形をしていることが観察される。



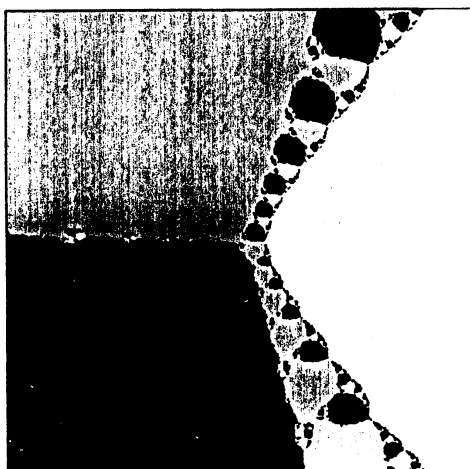
$-.005 < x < .005$
 $.4397 < y < .4477$
 150 ITERATION



この λ を少し摂動させて τ とすると N_{p_τ} の free critical point が直接鉢の中に入って ∞ に延びる新たな細い水路ができる。したがって直接鉢は ∞ に延びる 2 本の水路を持つ。 τ の取り方によってこの水路の幅はいくらでも小さくすることができる。すなわち、

前節の鉢の幅がいくらでも 0 に近づくような例をつくることのできるのである。

LAMBDA :
 .02+i*.33
 -5<x<5
 -5<y<5
 50 ITERATION



SOPHIE LUNU MATH DEPT

92-08-11

このように 2 本以上の水路がある場合には、 ∞ の近傍で直接鉢のセクターを取るときに太い方を取ることは自然である。直接鉢の水路の幅は、free critical point のある場所によって決まるのではないかと考えられる。

まず、 $p(z)$ の根 α が単根で、その直接鉢に free critical point を 1 つ含むときを考える。

N_p と共役なブラシュケ積は次のような形をしている。

$$M(z) = z^2 \frac{z - \mu}{1 - \bar{\mu}z}$$

この $M(z)$ の単位円上での不動点を計算すると、

$$\xi_1 = ib + \sqrt{1 - b^2}, \quad \xi_2 = ib - \sqrt{1 - b^2}, \quad \text{ただし } \mu = a + ib$$

となる。そこでの固有値を計算すると

$$M'(\xi_1) = 2 + \frac{1 - a^2 - b^2}{(\sqrt{1 - b^2} - a)^2}, \quad M'(\xi_2) = 2 + \frac{1 - a^2 - b^2}{(-\sqrt{1 - b^2} - a)^2}$$

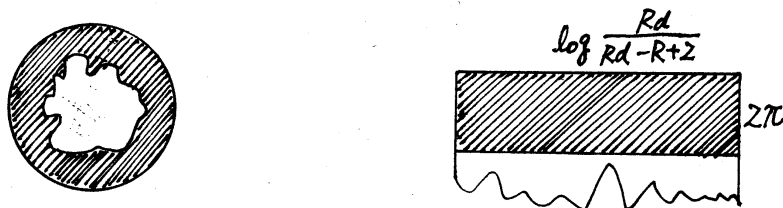
ここで、 $a > 0$ なら $3 \geq M'(\xi_1) > M'(\xi_2)$.

したがって、セクターを考えると、 ξ_2 に対する方が opening modulus が大きいことがわかる。この大きいほうの modulus の最小値は $\frac{\pi}{\log 3}$ となる。また free critical point を含まない直接鉢のセクターの opening modulus は $\frac{\pi}{\log 2}$ である。すなわち $\frac{\pi}{\log 3} < \frac{\pi}{\log 2}$ である。

定理 3 の R として $R > 3$ と取れる。

ここで、半径 R の円周の N_p による像を考えれば、それはもとの円内に含まれるような閉曲線となるので、それらを境界とするアニュラス A_R を作ることができる。4.2 節で作った無限遠点でのアニュラス A_V で N_p のイテレーションによって $A_R \cap B(\alpha)$ の上に一価に写るようなものが存在するので、 A_R のセクターは A_V のセクターと同じでこれによって opening modulus を求めれば、 $\frac{\pi}{\log M'(\xi)}$ となる。定理 2 より A_R の最狭部分の幅の評価が決まる。

ここで、 $\log(A_R)$ を考えれば、下図のようになるので、



これによってトーラスを作り 4.2 節の議論を繰り返せば、直接鉢の幅として、

$$\frac{2(R-2)}{3d(1 + \sqrt{(M'(\xi))})}$$

を得る。

いま、 $R=3$, $d=3$, $M'(\xi)=3$ として、 $\frac{2}{9(1+\sqrt{3})}$ を得る。

∞ にのびるいくつかの水路のうちで最も幅の広い水路の幅をもって、その直接鉢の幅とすれば次の定理を得る。

定理 4 3 つの相異なる根を持つ centered な 3 次多項式を $P \in \mathcal{P}_d(1)$ とする。このと

き N_P の直接鉢 $B(\alpha)$ は中心 t , $|t| = 3$ 半径 $\frac{1}{9(1+\sqrt{3})}$ の円盤を含む。

参考文献

- [Bur79] R. Burckel. An introduction to classical complex analysis. 1979. Academic Press, New York.
- [Hea87] J. Head. *The combinatorics of Newton's method for cubic polynomials*. PhD thesis, Cornell Univ., Ithaca, U.S.A., 1987.
- [Lei] TAN Lei. Cubic newton's method of thurston's type. preprint.
- [Man86] A. Manning. How to be sure of solving a complex polynomial using newton's method. 1986. preprint, Math.Inst., Univ. Warwick.
- [Mil] J. Milnor. Dynamics in one complex variables: introductory lectures. Preprint # 1990/5, SUNY Stony Brook, 1990.
- [Prz89] F. Przytycki. Remarks on the simple connectedness of basins of sinks for iterations of rational maps. *Dynamical Systems and Ergodic theory, PWN-Polish Scientific Pub.*, 229–235, 1989.
- [Sut90] S. Sutherland. Finding roots of complex polynomials with newton's method. 1990. Preprint # 1990/7, SUNY Stony Brook.