

円形乱流ジェットの実験と その数値シミュレーション

松田卓也、梅田吉邦、沢田恵介*、石井隆次、保田充彦

(Takuya Matsuda, Yoshikuni Umeda, Keisuke Sawada, Ryuji Ishii, Atsuhiko Yasuda)

京都大学・工学部・航空工学、*川崎重工業

空気を用いて円形の音速ジェットをつくり、そのシュリーレン写真をとった。発光時間が1マイクロ秒程度のフラッシュ光源をもちいて撮影した瞬間写真では、ジェットはきわめて乱れているが、もっと長い露出でとった写真には、衝撃波の整然としたセル構造がうつっている。この現象を数値シミュレーションで再現した。計算法は2次精度のOsher風上差分法である。粗い格子で計算した場合はセル構造がきれいにでるが、細かい格子で計算するとたくさんの渦輪が発生し、衝撃波が乱れる。計算結果の時間平均をとると、長い露出の写真と比較的良好に再現できた。

1. ジェットの構造

円形の穴から気体が高速で噴き出す現象、円形ジェットの問題は、ジェットエンジンやロケットエンジンの問題に関連して、実験的にも数值的にも多くの研究がある。ジェットの性質を特徴づけるパラメーターとしては、ジェット出口の静圧と外部気体の静圧の比（あるいは貯気槽と外部気体の圧力比）、ジェット出口の気体のマッハ数、噴き出し角、気体の比熱比、外部流のマッハ数などがある。

われわれの実験および計算では外部の気体は静止した空気、かつ噴き出す気体も空気とする。また噴き出し角が0度の音速ノズルの場合を取り扱うので、結局自由なパラメーターは圧力比のみになる。圧力比を変化させていくと図に示すような典型的な一連のパターンがえられる。図において一番外側の線はジェット境界を表わし、そこではジェットの圧力と外部の圧力が等しい。外部が静止気体の場合、ジェット境界における圧力は一定である。ジェット内部の点線は膨張波、実線は圧縮波、太い実線は衝撃波、最も太い実線はスリップ線である。

圧力比が1より大きい場合、ノズルからふきで

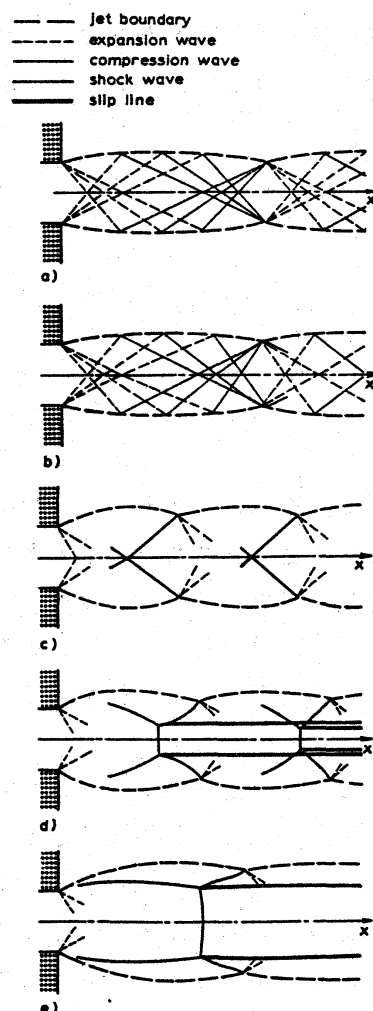


図1 静止大気中に放出されるジェット
圧力比はaからeに向かって増大。

る気体は膨張する。するとジェット半径が増加するため圧力が減少する。そこで内部の圧力と外部の圧力を等しくするようにジェットはすこし内側に曲がる。このためジェット境界では弱い圧縮波が形成される。その圧縮波の包絡線として衝撃波が形成される。これがバレル衝撃波である。圧力比がある一定値以上になると、流れに垂直の方向にマッハ円盤が形成される。マッハ円盤が形成されると、円盤の外縁部に衝撃波3重点ができ、そこから後方へスリップ線がのびる。スリップ線はジェット境界と同様に、接触不連続のひとつである。3重点で衝撃波のひとつは外にはねかえりジェット境界に達する。外部の気体が静止している場合は、そこから内側にむかって膨張波がでる。

図1 a-dに示したように、上に述べたことは繰り返す、理論的にはセル構造が繰り返すはずだが、現実には乱流混合などのため、最初の数サイクルの後ではセル構造は消滅する。

2. 実験

貯気槽に蓄えられた空気が、出口が口径1 cmの円であるしほりこみノズルを通して1気圧の外気に放出される。この場合、出口における流れのマッハ数 M_j は1である。貯気槽の空気の静圧 p_0 を変えることにより、図1に示したようなさまざまなパターンのジェットを実現することができる。ジェット出口における気体の静圧 p_j と p_0 の間には、ノズルを概1次元とすると次のような関係がある。

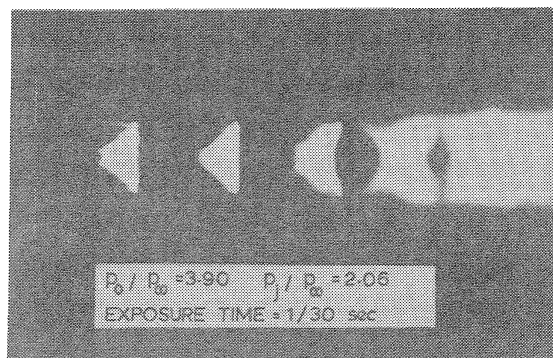
$$p_j = p_0 \left[1 + (\gamma - 1) M_j^2 / 2 \right]^{-\gamma / (\gamma - 1)}$$

我々の実験によれば貯気槽の静圧と外気圧 p の比が3.90（ジェットの出口圧力と外気圧の比では2.06）の場合、マッハ円盤ができるかできないかの境目であることが分かった。

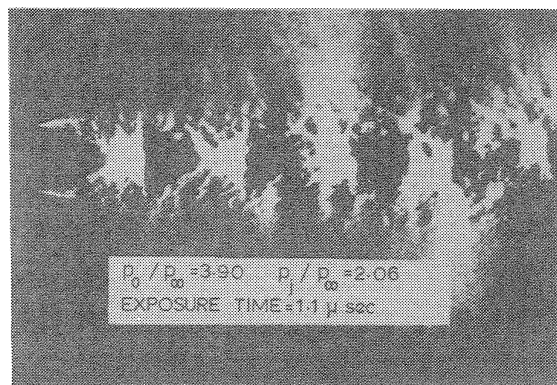
（図1 cの場合）われわれは以下の計算との比較では、この圧力比の場合を行なうがもちろん他の圧力比の場合でも本質はかわりない。

実験と計算を比較する場合、通常は比較的露光時間の長い写真と定常解を比較することがおい。しかしジェットの瞬間露光写真を見ると、それはきわめて乱れており、長時間露光の写真とはかなり様相が異なっていることが知られている¹⁾。写真1にわれわれの実験結果をしめす。

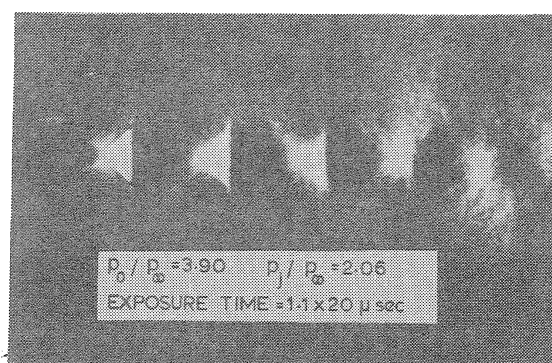
写真1 aは露出時間を1/30秒としたシュリーレン写真である。このシュリーレン写真では、水平方向に気体の圧縮がある場合白く写り、膨張する場合は黒く写る。出口から外に向かって白く伸びた線はジェット境界、3角状に黒くなっている部分は膨張波の領域である。膨張波の領域が終わるあたりからスカート状の白い部分が抜けているが、これは衝撃波である。衝撃波がジェット境界にぶつかるあたりから再び3角状の膨張波の領域が下流に向けて抜けている。このようなセル構造が下流にいくにつれて何度か繰り返している。しかし2、3回の繰り返しのあたりからきれいな構造はなくなり、ボケた蝶々のような模



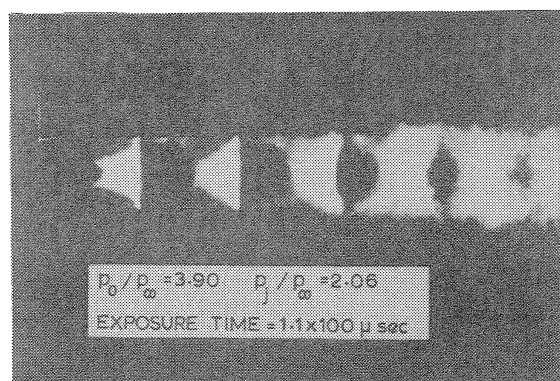
(a)



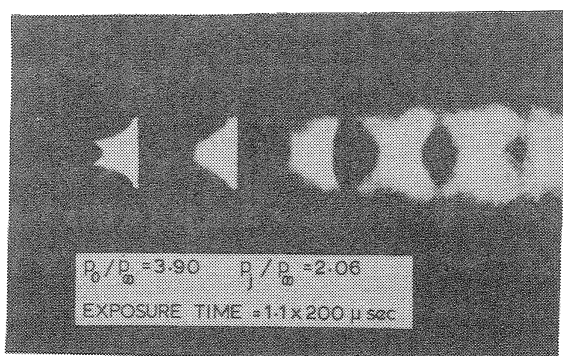
(b)



(c)



(d)



(e)

写真1 貯気槽と外気の圧力比が3.90
(ジェット出口の静圧と外気の圧力比
=2.06)の音速ジェットのシュリーレ
ン写真。気体は空気。a)露出時間=1/3
0秒:長時間露光写真 b)露出時間=1.
1マイクロ秒:瞬間写真 c) bの写真
を20枚重ねたもの d) 100枚重ねたも
の e) 200枚重ねたもの。

様にかわっていく。このことはもっと短いシャッター速度でとった写真は、もっと乱れていることを予期させる。1/30秒のこの写真を長時間露光写真とよぶことにしよう。

写真1 bは露出時間が1.1マイクロ秒でとった写真である。実際はフラッシュを発光させてとったものである。この写真を瞬間写真とよぶことにしよう。瞬間写真であることから、シャッターチャンスが異なれば異なった写真がえられるが、基本的な特徴はかわらない。その特徴としては、1周期目（あるいはせいぜい2周期）のセル構造を除いては、セルの形が乱れている、ジェット境界が波うっている、ジェットの外に音波がうつっていることなどがあげられよう。3周期目以降には非軸対称的な乱れも見受けられる。

露出時間を増加させていくと、写真1 aに近付くことが予想される。しかし露出時間を連続的に変化させることは困難であるので、瞬間写真を何枚も重ねることにした。実際はシャッターを解放したまま、フラッシュを何回か発光させることにより多重露光写真をとった。写真1 cは1.1マイクロ秒の写真を20枚重ねたものである。パターンの乱れが平均化されていることがわかる。写真1 dは同様に100枚、写真1 eは200枚の瞬間写真を重ねたものである。長時間露光写真の特徴のひとつである蝶々模様が再現されている。

ここでは各フラッシュはほぼ2秒の時間間隔で無作為的に発光させられており、したがって写真c, d, eは単に1.1マイクロ秒にフラッシュ回数をかけた時間に等しい1回の露光時間でとった写真に比べて、物理的により多くの意味を持つ。写真d, eを長時間露光写真aと比較すると、ジェットの構造（あるいは衝撃波のセル構造）の時間的変動が約100-200マイクロ秒でもとに回復しており、しかもそれが完全に周期的に起っていることをしめしている。

3. 数値計算

第2章でも触れたように数値計算と実験を比較する場合、長時間露光写真と比較することが多い。粗い数値格子のもとで行なった計算は、数値誤差が粘性として働き、解が滑らかになる。つまり比較的レイノルズ数の低い流れを解いていることになっている。それと長時間露光写真を比較すると一見よく合う結果が得られる。このことは、実際の流れのレイノルズ数は数十万から数百万と高いにもかかわらず、長時間露光写真つまり時間平均した流れの効果的レイノルズ数は、乱流粘性のため低いものになっていることを表わしているのであろう。

しかし数値計算においてある時間スライスの解と写真を比較しようと思えば、写真のほうも瞬間写真であるべきだろう。ところが上に見たように瞬間写真は大きくみだれておりそのような乱れを再現する数値計算例はすくない。われわれはここでは2次精度のOsher風上差分法をもちいてEuler方程式を陽的に解く。その際、数値格子を細かくとることにより、ジェット内部の乱れた流れを再現できるかどうかをしらべる。また数値境界の大きさを変えて、その影響を調べる。さらに解の時間平均をとり、それと長時間露光写真とを比較する。

3. 1 差分法

われわれは比熱比が $\gamma = 1.4$ の気体の非粘性、軸対称流れの非定常解を求める。座標系は等間隔の円柱座標である。計算手法は空間、時間ともに2次精度のOsher風上差分法である²⁾。Osher法はGodnov法の簡易版といったもので、Riemann問題を逐次近似を用いて正確に解くかわりに、微小衝撃波を圧縮波の単波におきかえて解く。そのときRiemann不変量を利用する。Osher法をさらに単純化したものにRoe法がある。

これらの手法の特徴は人工粘性を陽的には導入しないにもかかわらず大変安定であることだ。とくに1次精度の風上差分法においては、衝撃波や接触不連続に不要な振動が存在しない。この特質を高次精度の手法にまで拡張しようというところがTVD法である。しかしわれわれはここではvan Albada, van Leer & Roberts³⁾による内挿関数の手法を用いて2次精度化を行なった。手法の詳細は別に述べてある⁴⁾。

風上差分法の欠点はそのアルゴリズムの複雑さのため計算時間を多くくうことである。2次精度の典型的な手法、たとえばLax-Wendroff法やMacCormac法に比べて4-7倍のCPU時間がかかる。しかし圧力比がある程度以上大きい場合は、実質的には風上差分法以外では解けないのも事実である。上に述べた3つの手法のなかではGodnov法がもっとも計算時間がかかる。しかし接触不連続をもっとも正確に捕えることができる。われわれは中をとってOsher法を採用した。風上差分法の仲間には、この他にFlux-Splitting法がある。この手法では計算時間はさらに短い、不連続を捕える能力は上の3者に比べると少し劣っている。

3. 2 境界条件

計算領域を囲む境界としては、ジェットノズルの出口、下流境界、上流境界、側面がある。ノズルの出口は物理的境界であるが、他は計算境界である。

ノズル出口のマッハ数は1とする。貯気槽での空気の圧力を指定する。その温度は外気と同じであるとする。ノズル出口の空気の密度、圧力などは概1次元近似を用いて貯気槽とつながるように解く。ノズルの断面で流れは一様と仮定する。この仮定は特に圧力比が1に近い場合は問題となるが、今のわれわれの圧力比ではあまり問題にならない。

計算境界においては、物理量が滑らかにつながるといような要請以外には、特別な要請はない。そこで計算領域のちょうど外の仮想格子における物理量を決めるために、計算領域のちょうど内側の値をそのまま用いるとか、1次で外挿するとかさまざまな手法がここらみられている。それで波の不要な反射などが生じなければよい。しかしジェットの問題においては、下流境界の境界条件が特に問題となる。上に述べたような手法では下流境界における波の反射が著しく、定常解が存在するはずの粗い格子の場合でもなかなか定常にならない⁵⁾。数値的な波が下流境界で反射し、マッハ円盤の下流部分に定在波を誘起するからだ。

われわれは沢田⁶⁾によって始められた境界条件を採用した。風上差分法で必要な境界条件とは、境界上の物理量自体ではなくその流束である。それを決定するために外部仮想格子の物理量を固定した一定状態とする。われわれの問題の場合は静止した1気圧の大気とする。そして内部の状態とこの外部の状態の間でRiemann問題をとき流束を決定する。風上差分法は、その時間の1段階ごとにRiemann問題を解いているのだから、上に述べた手続きはなにも特別の扱いを必要としない。外部仮想格子まで計算領域に含めるが、その物理量は変化させないというだけである。

上流境界と側面ではこの手法は納得がいくが、下流境界で流速0の一定状態を仮定するのは納得がいかないように思えるだろう。しかしRiemann問題を解いてみると分かるように、外部の流速が0でも境界上の流速は0にはならず、気体はながれだしていく。石井と梅田⁵⁾の数値実験によればこの沢田の境界条件が最もよい結果を与えることが示された。外部に超音速流が流れている場合、ジェット内で発生した衝撃波はジェット境界を横切って外に伝わる。このとき沢田の条件を側面に課すと、衝撃波の側面での反射が皆無となり極めてもっともらしい解がえられる。しかしこの無反射の性質は後で述べるように、計算領域のとりかたにたいするある要請を生む。

4. 計算結果

図2 a-c に450x75の格子の場合の解の密度分布の時間発展を示す。計算領域としては動径方向にはノズルの半径の3倍、下流方向には18倍にとった。図から分かるように、ある一定時間以後は1つめのセルに関してはほぼ定常になっている。2つめのセルも定常に近いが、それでもジェット境界にシア不安定が発生しそれが圧縮波を生じてスカート状の衝撃波がきれいにはできない。3つめ以降のセルに関してはまったく非定常でジェット境界に沿って渦輪が発生しそれが下流にながれていく。ジェット境界が狭まっている部分はラバル・ノズルの役割を果たしているようで、いくつかの衝撃波が発生し移動していく。

図3には上の計算例を時間平均した結果を示す。平均はジェットの先端が下流境界に辿り着いたころ、 $t=130$ から計算の終わり $t=180$ まで1ステップごとに密度を加えて平均をとった。(ここで無次元時間の単位はノズル半径を外気の音速でわったものである。)とうぜんながらジェット境界の外に音波によるゆらぎとか、ながれていく渦輪などは消しさられている。

これらの計算結果とシュリーレン写真を比較するために、数値的シュリーレン写真を合成した。そのためには密度の水平方向勾配をもとめ、ジェットの3次元的構造を考慮するため視線方向に積分した。図4 aは瞬間写真に対応する数値的シュリーレン写真、図4 bは長時間露光写真に対応する、時間平均をとった密度分布から求めた数値的シュリーレン写真である。長時間露光写真でみられた蝶々模様が3つめのセルに再現されている。実験

では4つめのセルあたりから蝶々模様がでており、3つめのセルは比較的安定にみえる。この不一致の理由はよく分からない。

つぎに境界条件の影響をしらべるため、計算領域を動径方向がジェット半径の2倍で打ち切った。下流の境界はジェット半径の20倍に伸ばした。計算格子の大きさは同じである。つまり領域を500x50に分割した。図5はその場合のある時刻における密度分布を表わす。下流における渦輪が計算領域のなかに閉じ込められている。図2では渦輪がもっと広い領域に広がっていた。また2つめのセルのジェット境界にシア不安定が見られない。その理由は下流の渦輪などにより発生した密度のゆらぎ（音波）が、側面の計算境界に達するとそこで吸収されて上流に伝播しないからだろう。逆にいえば、図2の2つめのセルのジェット境界でシア不安定が生じているのは下流で発生した音波が静止大気の内部を伝わってきたからだと考えられる。

図5の場合の時間平均をとった密度分布を図6に示す。興味あることは、図6と図3がよく似ていることである。ジェット境界の渦輪は平均化の操作で消えてしまうからであろう。しかし図6においては、3番目のセルまできれいにでて、蝶々模様は4番目のセルからでている。このほうが実験の写真とは近い。

つぎに数値格子の大きさの影響を見るために、図5の場合と同じ領域を250x25に分割した。つまり格子のサイズをそれぞれの方向に倍にした。そのある時刻における密度分布を図7に示す。瞬間写真に対応するものであるにもかかわらず、4つめのセルまで極めて安定に存在している。これは数値格子の粗さのため、数値粘性が大きくレイノルズ数の低い流れに対応しているからである。

5. 結論

ジェットの実験結果と数値シミュレーションの結果を比較した。粗い数値格子で計算した結果では安定した定常解がえられ、それと長時間露光写真は定性的によく一致する。しかし数値格子を細かくすると、ジェット境界にシア不安定による渦輪が発生し、それが下流にながれていく。下流部分で発生したゆらぎは音波として上流に伝播し、それがシア不安定性を誘起する。そのことは動径方向の計算領域をせばめると、音波が上流に伝わりにくく、シア不安定が押えられていることから分かる。また沢田の境界条件は側面で波をよく吸収することもある。

時間的に変動する流れの時間平均をとると、長時間露光写真の特徴を定性的によく再現する。つまり時間平均をとるということは、レイノルズ数を下げるという効果を持っていることが分かる。

実験の瞬間写真にときどき見られるような、後流における流れのねじれのような現象は3次元の数値計算を行わなくては追及することはできない。これは今後の課題である。

文献

- 1) Van Dyke, M. "An Album of Fluid Motion", The Parabolic Press, Stanford, 1982, p.170.
- 2) Osher, S. & Chakravarthy, S. "Upwind Schemes and Boundary Conditions with Applications to Euler Equations in General Geometries ", J.Comp.Phys., vol.50, 1983, pp.447-481.
- 3) van Albada, G.D., van Leer, B. & Roberts, W.W.Jr. "A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics", Astron. & Astrophys., vol.108, 1982, pp.76-84.
- 4) Sawada, K., Shima, E., Matsuda, T. & Inaguchi, T. "The Osher Upwind Scheme and its Application to Cosmic Gas Dynamics", Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ., vol.48, No.2, 1985, pp.240-264.
- 5) Ishii, R. & Umeda, Y. "Free-Jet Flows of Gas-Particle Mixtures", AIAA Paper, 86-1317.
- 6) Sawada, K. et al. "Calculation of Flowfields by Several Numerical Techniques", Proceedings of 16th JSASS Annual Conference (in Japanese), April, 1985.

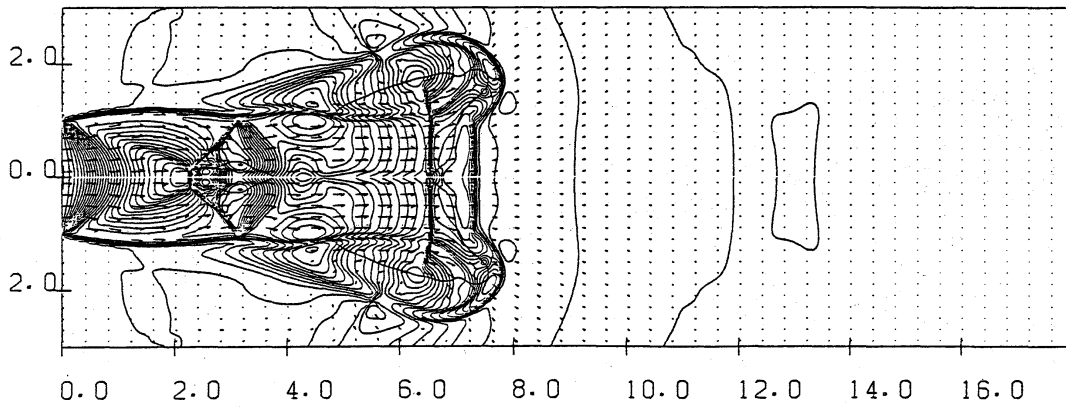
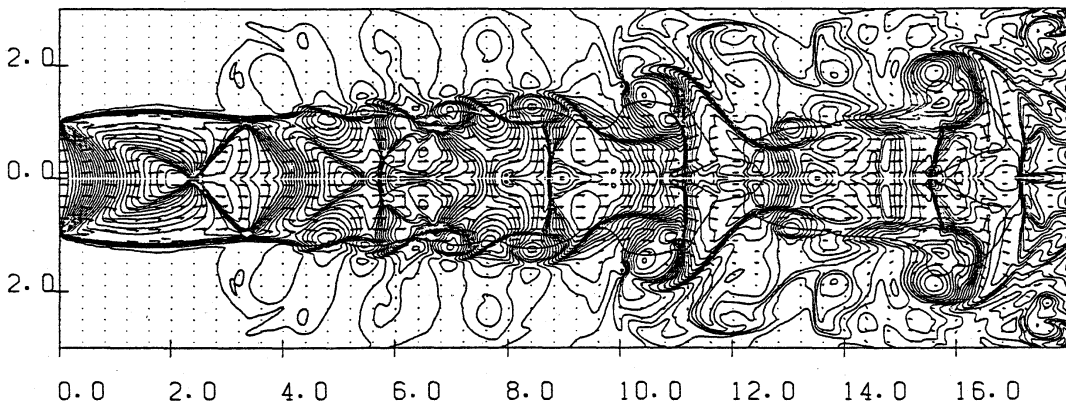
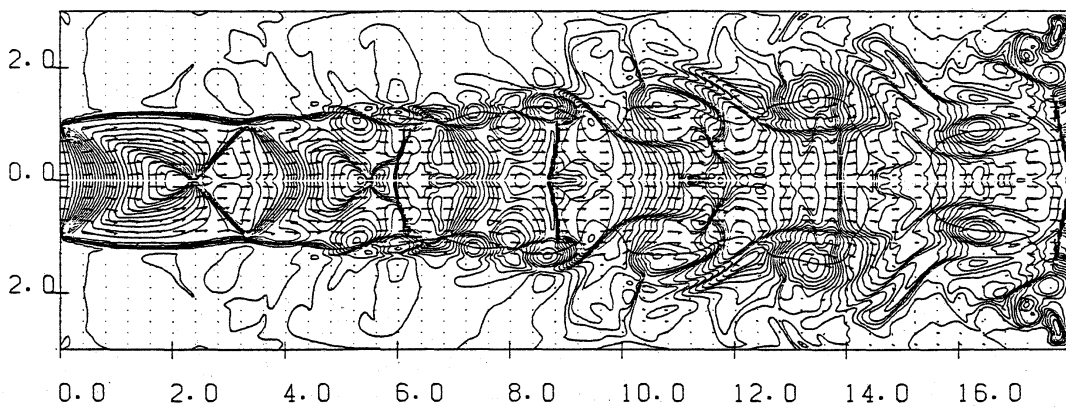
(a) $t=12.7$, $n=1000$ (b) $t=91.7$, $n=7000$ (c) $t=129.6$, $n=10000$

図2 圧力比=3.90のジェットの密度分布の時間発展。数値格子は450x75。時間の単位はノズル出口半径を外気の音速でわった値。

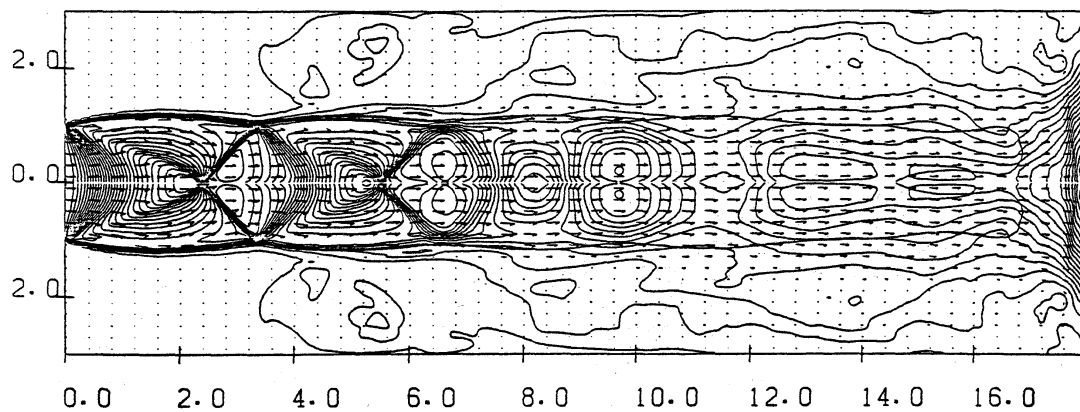


図3 図2に示した計算例の時間平均。平均は $t=130-180$ の範囲で行なった。

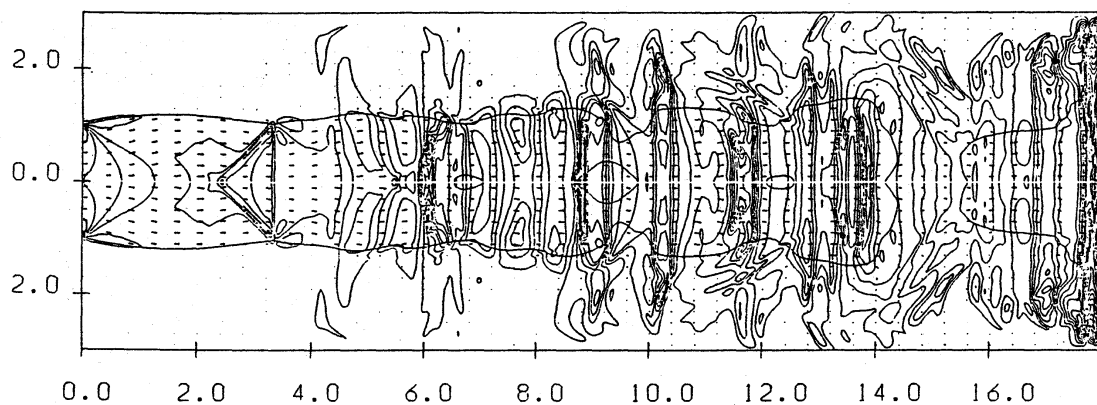


図4 a 瞬間写真に対応する密度分布から数値的に合成したシュリーレン写真。水平方向の密度勾配を視線方向に積分した。 $t=129.6$

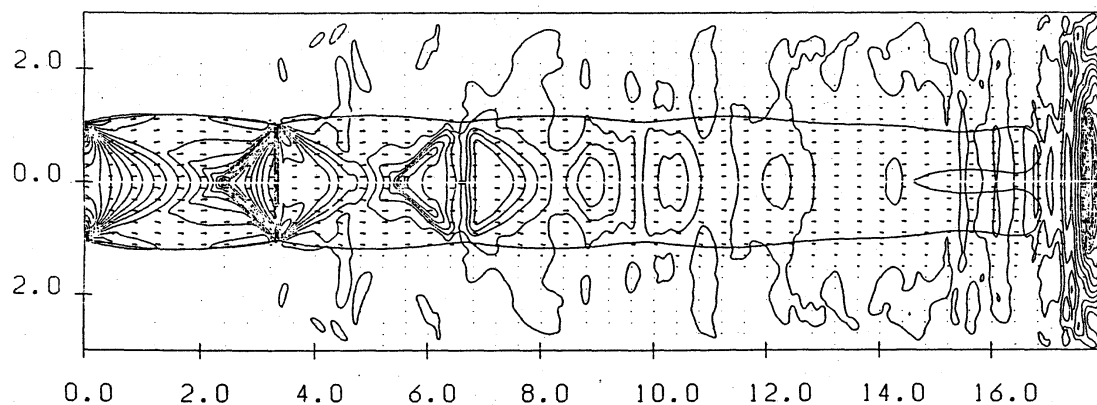


図4 b 連続写真に対応する数値的シュリーレン写真。

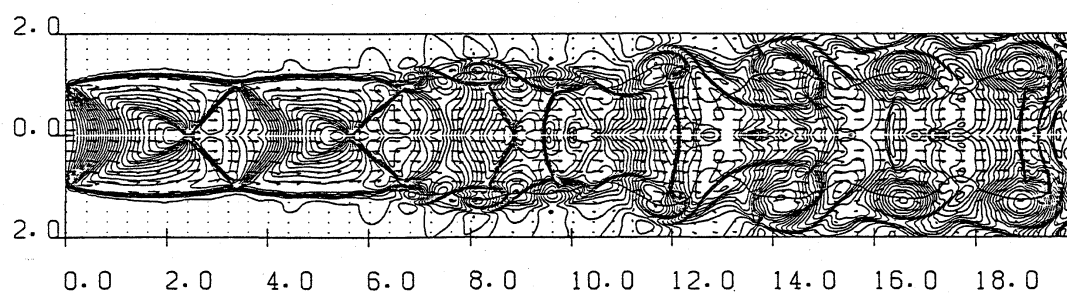


図5 計算領域をノズル半径の2倍に制限した場合のある時刻における密度分布。格子数は500x50。下流境界はノズル半径の20倍とした。 $t=112.8$ $n=8500$

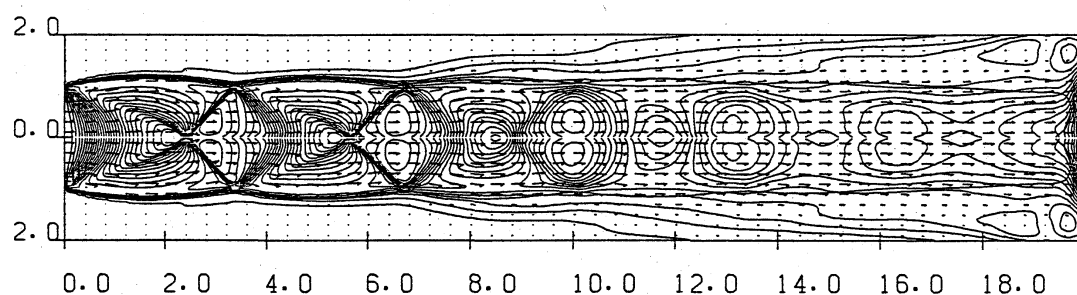


図6 図5の例を $t=73.1-138.7$, $n=5500-10500$ の間で時間平均をとった場合の密度分布

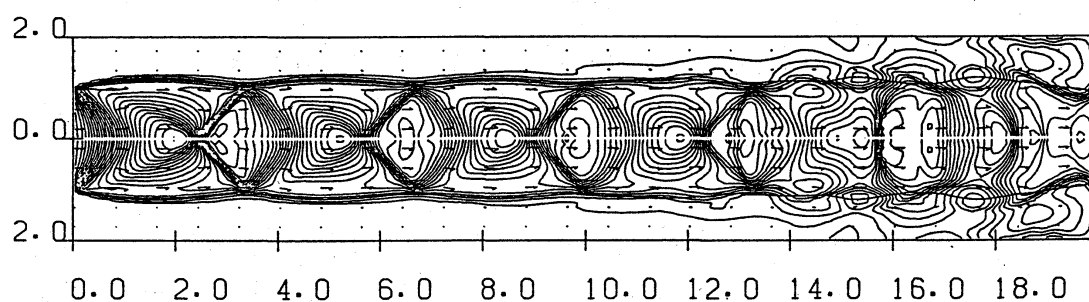


図7 図5の場合をさらに格子間隔を倍にした場合。格子数は250x25。 $t=83.3$ $n=3000$