

PA のモデルの中で定義可能な非標準モデル

聖徳大学人文学部 池田一磨 (KAZUMA IKEDA)

筑波大学数理物質科学研究科 坪井明人 (AKITO TSUBOI)

概要

本稿では, $M \models \text{PA}$ のモデルで定義される $N \models \text{PA}$ の性質を研究する. 第2節では, Tennenbaum の定理の一般化として, N を M で $\Delta_1(M)$ -定義可能なモデルとすると, $N \cong M$ となることを示す. 第3節では, パラメータ無しに定義されるモデルについて研究する. 特に, N が M でパラメータ無しで定義されるモデルで, $N \cong M$ かつ $M \succ \omega$ となるとき, $N \cong M$ であることを示す. 第4節では, パラメータを用いて定義されるモデルについて研究する. ここでは, $N \equiv M$ かつ $N \not\equiv M$ となるモデル M と M で定義される N が存在することを示す. また, $N \equiv M$, $N \cong M$ かつ N と M が definably isomorphic ではないモデル M と M で定義可能なモデル N が存在することを示す.

1 準備

定義 1 $\mathcal{L}$ を言語, M を $\mathcal{L}$ -構造, A を M の部分集合とする. M^n の部分集合 D は, $D = \psi(\bar{x}, \bar{a})^M (= \{\bar{b} \in M^n : M \models \psi(\bar{b}, \bar{a})\})$ となる $\mathcal{L}$ -論理式 $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ とパラメータ $\bar{a} \in A$ が存在するとき, M で **A-定義可能** であるという. また, 元 $b \in M$ は, 集合 $\{b\}$ が M で A-定義可能であるとき, M で **A-定義可能** であるという. A-定義可能な元全体からなる集合を, M における A の **definable closure** といい, $\text{dcl}_M(A)$ で表す. M 上の関数 f は, そのグラフ $\{(\bar{a}, b) : f(\bar{a}) = b\}$ が M で A-定義可能であるとき, M で **A-定義可能** であるという. A を強調する必要が無いとき, A を省略する.

定義 2 M と N をペアノ算術 PA のモデルとする. $N = (D, 0^N, 1^N, +^N, \cdot^N, <^N)$ となる A-定義可能な $D \subset M$, A-定義可能な $0^N, 1^N \in D$, A-定義可能な関数 $+^N, \cdot^N$ および A-定義可能な $<^N \subset M^2$ が存在するとき, N は M で **A-定義可能** であるという.

以後, $\mathcal{L}_A$ で PA の言語を表し, $M, N, \dots$ で PA のモデルを表す. また, M の標準部分を ω で表す. 特に断らない限り, N は M の中で定義されたモデルとする.

定義 3 1. B を M^n の部分集合とする. M の任意の end extension M^* と任意の元 $\bar{a} \in M^n$ に対して,

$$\bar{a} \in B \Leftrightarrow M^* \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow M^* \models \psi(\bar{a})$$

となる Σ_1 -論理式 $\varphi(\bar{x})$ と Π_1 -論理式 $\psi(\bar{x})$ (ただし, M のパラメータを含んでも良い) が存在するとき, B は $\Delta_1(M)$ -**定義可能** であるという.

2. $f: M^n \rightarrow M$ を定義可能な関数とする. M の任意の end extension M^* に対して,

- (a) 任意の $\bar{a} \in M$ に対して, $M^* \models \exists! y \varphi(\bar{a}, y)$;
- (b) 任意の $\bar{a}, b \in M$ に対して, $f(\bar{a}) = b$ iff $M^* \models \varphi(\bar{a}, b)$;

となる Σ_1 -論理式 $\varphi(\bar{x}, y)$ (ただし, M のパラメータを含んでも良い) が存在するとき, f は $\Delta_1(M)$ -定義可能であるという.

注意 4 上の概念に関して次の事実が簡単に分かる.

1. f が $\Delta_1(M)$ -定義可能ならば, f はまた上の (a), (b) を満たす Π_1 -論理式によっても定義される.
2. ω 上の帰納的関数は $\Delta_1(\omega)$ -定義可能である.
3. M を PA のモデルとする. このとき, PA の provably recursive function は $\Delta_1(M)$ -定義可能である.
4. $\Delta_1(M)$ -定義可能な関数は, 代入に関して閉じている.

定義 5 M と N を PA のモデルとする. $N = (D, 0^N, 1^N, +^N, \cdot^N, <^N)$ となる $\Delta_1(M)$ -定義可能な $D \subset M$, $\Delta_1(M)$ -定義可能な $0^N, 1^N \in D$, $\Delta_1(M)$ -定義可能な関数 $+^N, \cdot^N$ および $\Delta_1(M)$ -定義可能な $<^N \subset M^2$ が存在するとき, N は M で $\Delta_1(M)$ -定義可能であるという.

記法 6 1. $p(x) = y$ は, x に対して x 番目の素数 y を対応させる原始帰納的関数を定義する $\mathcal{L}_A$ -論理式を表す.

2. $x \in y$ は, 標準的な意味以外に, $p(x)$ が y を割り切るということを表現する $\mathcal{L}_A$ -論理式を表す.
3. $(z)_x = y$ は, x と z に対して, $p(x)^y \in z$ となるような最大の y を対応させる原始帰納的関数を定義する $\mathcal{L}_A$ -論理式を表す.
4. 任意の論理式 φ に対して, $\ulcorner \varphi \urcorner$ は φ の Gödel 数の numeral を示すために使う. また, $\ulcorner \delta(\dot{x}) \urcorner = y$ によって, n に $\ulcorner \delta(n) \urcorner$ を対応させる原始帰納的関数を表現を表す. (cf. [1, 4])
5. N を M で定義可能なモデル, φ を閉論理式とする. このとき, " $N \models \varphi$ " は, φ が N で成り立つ, ということを表現する $\mathcal{L}_A$ -閉論理式 (ただし, M のパラメータは含んでも良い) を表す.

6. I が M の initial segment であることを $I \subseteq_e M$ によって表す. (cf. [2])

定義 7 (cf. [2, 6]) $M \models \text{PA}$, $I \subseteq_e M$, $S \subset I$ とする. ある $a \in M$ に対して $S = \{n \in I : M \models n \in a\}$ となるときの, S は M における I のコードされた部分集合という.

$I = \omega$ のとき, S は M におけるコードされた部分集合という. M におけるコードされた部分集合全体からなる集合を $SSy(M)$ で表す.

補題 8 $M \models \text{PA}$, $I \subseteq_e M$, $I \subset K \subset M$ とする. また, $D = \{n \in K : M \models \varphi(n)\}$ とする. ここで, $\varphi(x)$ は $\mathcal{L}_A(M)$ -論理式である. このとき, $D \cap I$ は M における I のコードされた部分集合である.

証明. a についての帰納法により, $M \models \exists y \forall x < a (\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$ が証明できる. $I \subseteq_e M$ であるから, $I <^M a$ となる $a \in M$ が存在する. したがって, ある $d \in M$ が存在して, 任意の $b \in I$ に対して, $M \models \varphi(b) \leftrightarrow M \models b \in d$ となる. よって, $D \cap I = \{n \in I : M \models b \in d\}$ となる. $\square$

補題 9 A を M の部分集合, N を M で A -定義可能な集合とする. このとき, M で A -定義可能な埋め込み写像 $f: M \rightarrow N$ が唯一つ存在する. また, $f(M) \subseteq_e N$ である. この関数 f を M から N への標準埋め込み写像と呼ぶ.

証明. 関数 $f: M \rightarrow N$ を $f(0^M) = 0^N$, $f(n + {}^M 1^M) = f(n) + {}^N 1^N$ によって定義する. 明らかに f は $\text{dom} f = M$ となる, M で A -定義可能な関数である. この関数が, $+$ と $\cdot$ を保存するのは明らかである.

まず, f が唯一つの埋め込み写像であることを示す. g を M から N への A -定義可能な埋め込み写像とする. $f(n) \neq g(n)$ となる最小の n をとる. f と g は埋め込み写像であるから, $f(0^M) = 0^N = g(0^M)$ である. よって, $n \neq 0^M$. したがって, $n = m + {}^M 1^M$ とかける. 帰納法の仮定より, $f(m) = g(m)$ であるから,

$$f(n) = f(m + {}^M 1^M) = f(m) + {}^N 1^N = g(m) + {}^N 1^N = g(m + {}^M 1^M) = g(n)$$

となる. これは矛盾である. よって, f は唯一つの埋め込み写像である.

次に, $f(M) \subseteq_e N$ であることを示す. $n \in M$, $a \in N$ とする. このとき, $a <^N f(n)$ ならば $a \in f(M)$ であることを n に関する帰納法によって示す. $n = 0^M$ のときは明らかである. よって, $n = m + {}^M 1^M$ とする. $a <^N f(m + {}^M 1^M) = f(m) + {}^N 1^N$ だから, $a \leq^N f(m)$ である. $a = f(m)$ ならば明らかに $a \in f(M)$. $a <^N f(m)$ ならば帰納法の仮定より $a \in f(M)$ である. よって, $f(M) \subseteq_e N$ である. $\square$

2 Tennenbaum の定理の一般化

命題 10 N を $\Delta_1(M)$ -定義可能なモデル, f を M から N への標準埋め込み写像とする. このとき, f は $\Delta_1(M)$ -定義可能である.

証明. M^* を M の end extension とする. また, 論理式 $\varphi(x, y)$ を次の様に定義する.

$$\varphi(x, y) := \exists z[(z)_0 = 0^N \wedge (z)_x = y \wedge \forall i < x((z)_{i+1} = (z)_i +^N 1^N)]$$

$+^N$ は Σ_1 -論理式によって定義されるので, この論理式も Σ_1 -論理式である. 明らかに, $f(m) = n \Leftrightarrow M^* \models \varphi(m, n)$ である. 次に, 任意の $a \in M$ に対して, $M^* \models \exists! y \varphi(a, y)$ となることを示す. 明らかに, $M^* \models \varphi(a, f(a))$ である. $b \neq f(a)$ となる $b \in M^*$ に対して, $M^* \models \varphi(a, b)$ となると仮定する. すると,

$$M^* \models (d_1)_0 = 0^N \wedge (d_1)_a = f(a) \wedge \forall i < x((d_1)_{i+1} = (d_1)_i +^N 1^N),$$

$$M^* \models (d_2)_0 = 0^N \wedge (d_2)_a = b \wedge \forall i < x((d_2)_{i+1} = (d_2)_i +^N 1^N).$$

となる d_1, d_2 を選べる. M^* は PA のモデルであるから, $(d_1)_i = (d_2)_i$ となる最大の i を選べる. しかし, このとき d_1 と d_2 の選び方から, $(d_1)_{i+1} = (d_2)_{i+1}$ となり, i の選び方に反する. $\square$

定理 11 N を M の $\Delta_1(M)$ -定義可能なモデルとする. このとき, N は M と *definably isomorphic* である.

証明. 標準埋め込み写像 $f: M \rightarrow N$ が全射でないと仮定する. $A = \{m \in f(M) : N \models \text{Tr}_{\Pi_1}(m)\}$ とおく. ただし, $\text{Tr}_{\Pi_1}(x)$ は Π_1 -論理式に関する partial truth definition である. $f(M) \subsetneq_e N$ であるから, 補題 8 より $A = \{n \in N : n \in a_0\}$ となる $a_0 \in N$ が取れる. このとき, 次の主張 A と B が証明できるが, これは矛盾である.

主張 A $f^{-1}(A)$ は $\Delta_1(M)$ -定義可能である.

$\varphi(x)$ によって論理式 “ $N \models \exists z(p(f(x)) \cdot z = a_0)$ ” を表す. また, $\psi(x)$ によって論理式 “ $N \models \exists z \exists w(0 < w < p(f(x)) \wedge (p(f(x)) \cdot z + w = a_0))$ ” を表す. N が $\Delta_1(M)$ -定義可能であるから, 命題 10 より, f は $\Delta_1(M)$ -定義可能である. よって, N も f も $\Delta_1(M)$ -定義可能であるから, $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ は Σ_1 -論理式である. $b \in M$ に対して, 以下の同値式が成り立つ.

$$\begin{aligned} b \in f^{-1}(A) &\iff f(b) \in A \iff N \models f(b) \in a_0 \\ &\iff N \models p(f(b)) \text{ divides } a_0 \\ &\iff N \models \exists z(p(f(b)) \cdot z = a_0) \\ &\iff M \models \varphi(b) \end{aligned}$$

また, $M \setminus f^{-1}(A)$ は $\psi(x)$ によって定義可能であることはすぐに分かる. すなわち, $f^{-1}(M)$ は $\neg\psi(x)$ によって定義可能である. よって, $f^{-1}(M)$ は $\Delta_1(M)$ -定義可能である.

主張 B $f^{-1}(A)$ は $\Delta_1(M)$ -定義可能ではない.

そうでないと仮定する。したがって、 $\Delta_1(M)$ -定義可能の定義を満たすための Σ_1 -論理式 $\varphi(x, a)$ と Π_1 -論理式 $\psi(x, a)$ が存在する。ここで、 a はパラメータで、簡単のために a 以外のパラメータは含まないものとする。 $b = f(a)$ とおく。 self-reference lemma (cf. [1]) より、

$$\text{PA} \vdash \neg\varphi(\ulcorner \delta(y) \urcorner, y) \leftrightarrow \delta(y)$$

となる Π_1 -論理式 $\delta(y)$ が取れる。

このとき、 $N \models \delta(b)$ と仮定すると、下の式より矛盾する。

$$\begin{aligned} N \models \delta(b) &\implies N \models \neg\varphi(\ulcorner \delta(b) \urcorner, b) \quad (\because \delta \text{ の定義}) \\ &\implies f(M) \models \neg\varphi(\ulcorner \delta(b) \urcorner, b) \quad (\because \neg\varphi \in \Pi_1 \text{ かつ } f(M) \subseteq_e N) \\ &\implies M \models \neg\varphi(\ulcorner \delta(a) \urcorner, a) \quad (\because f \text{ は埋め込み写像}) \\ &\implies \ulcorner \delta(a) \urcorner \notin f^{-1}(A) \quad (\because \varphi \text{ の定義}) \\ &\implies f(\ulcorner \delta(a) \urcorner) \notin A \\ &\implies \ulcorner \delta(b) \urcorner \notin A \quad (\because f(\ulcorner \delta(a) \urcorner) = \ulcorner \delta(b) \urcorner) \\ &\implies N \models \neg\delta(b) \quad (\because A \text{ の定義}) \end{aligned}$$

また、 $N \models \neg\delta(b)$ と仮定しても、下の式より矛盾することが分かる。

$$\begin{aligned} N \models \neg\delta(b) &\implies f(\ulcorner \delta(a) \urcorner) = \ulcorner \delta(b) \urcorner \notin A \quad (\because A \text{ の定義}) \\ &\implies \ulcorner \delta(a) \urcorner \notin f^{-1}(A) \\ &\implies M \models \neg\psi(\ulcorner \delta(a) \urcorner, a) \quad (\because \psi \text{ の定義}) \\ &\implies f(M) \models \neg\psi(\ulcorner \delta(b) \urcorner, b) \\ &\implies N \models \neg\psi(\ulcorner \delta(b) \urcorner, b) \quad (\because \neg\psi \in \Sigma_1 \text{ かつ } f(M) \subseteq_e N) \\ &\implies N \models \neg\varphi(\ulcorner \delta(b) \urcorner, b) \quad (\because \varphi \text{ と } \psi \text{ の定義}) \\ &\implies N \models \delta(b) \quad (\because \delta \text{ の定義}) \end{aligned}$$

以上より、 $f^{-1}(A)$ は $\Delta_1(M)$ -定義可能ではない。 $\square$

3 M で $\emptyset$ -定義可能なモデル

定義 12 Ψ を M の定義可能な集合からなる集合とする。 $\Psi \subset \{\varphi(x, \bar{a})^M : \bar{a} \in M\}$ となる論理式 $\varphi(x, \bar{y})$ が存在するとき、 Ψ は一様に定義されるという。

事実 13 M の $\emptyset$ -定義可能な集合全体からなる集合は一様には定義されない。

証明. $\emptyset$ -定義可能な集合全体からなる集合が、 $\varphi(x, \bar{y})$ によって一様に定義されると仮定する。このとき、 $\bar{y}$ は1変数と思つてよい。 $\neg\varphi(x, x)$ を $\psi(x)$ とおく。仮定から

$M \models \forall x(\psi(x) \leftrightarrow \varphi(x, a))$ となる $a \in M$ が存在する. すると, $M \models \psi(a) \leftrightarrow \varphi(a, a)$ を得るが, これは矛盾である. $\square$

補題 14 N は M で $\emptyset$ -定義可能で, M から N への標準埋め込み写像 f は elementary であるとする. このとき, f は同型写像である.

証明. f を elementary であるから, $f(M) \prec N$ である. $f(M) \not\prec N$ と仮定して, 矛盾を導く. $D \subset M$ を $\emptyset$ -定義可能な集合とし, D は論理式 $\varphi(x)$ によって定義されているものとする. f は埋め込み写像であるから, $f(D)$ は $\varphi(x)$ によって $f(M)$ で定義される. $f(M) \prec N$ であるから, $f(D) = \{y \in f(M) : N \models \varphi(y)\}$ である. 補題 8 より, $f(D) = \{y \in f(M) : N \models y \in a\}$ となる $a \in N$ が取れる. よって,

$$b \in D \Leftrightarrow f(b) \in f(D) \Leftrightarrow N \models f(b) \in a$$

となる. N は M で $\emptyset$ -定義可能であるから, $b \in D \Leftrightarrow M \models "N \models f(b) \in a"$ となる. よって, $\emptyset$ -定義可能な集合全体は一様に定義できることになるが, これは事実 13 に反する. $\square$

定理 15 N は M で $\emptyset$ -定義可能で, $N \equiv M$ かつ $M \succ \omega$ とする. このとき, N は M と *definably isomorphic* である.

証明. $f : M \rightarrow N$ を M から N への標準埋め込み写像とする. $N \equiv M$ だから, $f|_{\omega}$ は elementary である. f が elementary でないと仮定すると,

$$M \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ かつ } N \models \neg \varphi(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

となる $a_1, \dots, a_n \in M$ と論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ が存在する. N は M で $\emptyset$ -定義可能であるから,

$$M \models \exists x_1 \dots \exists x_n [\varphi(x_1, \dots, x_n) \wedge "N \models \neg \varphi(f(x_1), \dots, f(x_n))"]$$

となる. $M \succ \omega$ だから,

$$M \models \varphi(m_1, \dots, m_n) \wedge "N \models \neg \varphi(f(m_1), \dots, f(m_n))"$$

となる $m_1, \dots, m_n \in \omega$ が存在する. しかし, これは $f|_{\omega}$ が elementary であることと矛盾する. よって, f は elementary である. したがって, 補題 14 より f は同型写像である. $\square$

系 16 N は ω -定義可能で, $N \equiv \omega$ であるとする. このとき, N は ω と *definably isomorphic* である.

4 M で M -定義可能なモデル

補題 17 M を非標準モデルとし, N を M で定義可能なモデルとする. このとき, $SSy(M) = SSy(N)$ である.

証明. f を M から N への標準埋め込み写像とする. 明らかに, $SSy(M) \subset SSy(N)$ である. よって, $SSy(N) \subset SSy(M)$ を示す. $D \in SSy(N)$ とし, D は N において $a \in N$ によってコードされると仮定する. このとき, $a \in f(N)$ としてよい. なぜなら, $a \notin f(N)$ ならば, 次のようにして D をコードする $a_0 \in f(N)$ をとることができる. $f(M) \neq \omega$ であるから, $b \in f(M) \setminus \omega$ が取れる. このとき, 任意の $n \in \omega$ に対して, $N \models \exists y < b \forall x \leq n (x \in y \leftrightarrow x \in a)$ である. したがって, $N \models \forall x \leq n^* (x \in y \leftrightarrow x \in a)$ となる $n^* \in N \setminus \omega$ (overspill による) と $a_0 < b$ が取れる. $f(M)$ は N の initial segment であるから, $a_0 \in f(M)$ である. $f(M) \prec_{\Delta_0} N$ かつ $y \in x$ が PA において Δ_0 -論理式であることに注意すると, $a \in f(M)$ は $f(M)$ において D をコードする. f は M と $f(M)$ の間の同型写像であるので, D は M においてコードされる. $\square$

記法 18 1. T^G は集合 $\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \in T\}$ を表す.

2. $\text{Pr}_T(x)$ は, 論理式 x が T において証明できる, ということを表現する論理式である. $\text{Con}(T)$ は $\neg \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ のことである.
3. $\text{Rfn}(T)$ は $\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ という形をした論理式全体からなる集合を表す. ここで, φ は $\mathcal{L}_A$ -閉論理式である. $\text{Rfn}(T)$ は T に関する **Local Reflection Principle** と呼ばれる. (cf. [4])
4. $\text{Con}_y(\psi(y))$ は, 論理式 $\psi(y)$ によって表現された “理論” が無矛盾であることを表現する閉論理式である.

補題 19 M を $\text{PA} + \text{Rfn}(\text{PA})$ のモデルとし, $a \in M$ が M において $\text{Th}(M)^G$ をコードしているものとする. このとき, $M \models \text{Con}_y(y \in a \wedge y \leq n^*)$ となる $n^* \in M \setminus \omega$ が存在する.

証明. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ を $\text{Th}(M)$ の任意の元とする. $M \models \text{PA} + \text{Rfn}(\text{PA})$ であるから,

$$M \models \text{Pr}_{\text{PA}}(\ulcorner \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m) \urcorner) \rightarrow \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m)$$

となる. よって, $M \models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ であるから, $M \models \text{Con}(\text{PA} + \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\})$ である. $a \in M$ が M において $\text{Th}(M)^G$ をコードしていることに注意すれば, 任意の $n \in \omega$ に対して, $M \models \text{Con}_y(y \in a \wedge y \leq n)$ となることが分かる. したがって, overspill により $M \models \text{Con}_y(y \in a \wedge y \leq n^*)$ となる $n^* \in M \setminus \omega$ が存在する. $\square$

命題 20 M を $\text{PA} + \text{Rfn}(\text{PA})$ のモデルとする. このとき, 次は同値である.

1. M で定義可能で、かつ $N \equiv M$ となる帰納的に飽和なモデル N が存在する.
2. $\text{Th}(M)^G$ が M でコードされる.

証明. $(1 \Rightarrow 2)$ ここでは、 $M \models \text{PA}$ であるとする. M で定義可能で、かつ $N \equiv M$ となる帰納的に飽和なモデル N が存在すると仮定する. 次の帰納的な type $p(x)$ を考える.

$$p(x) = \{\ulcorner \varphi \urcorner \in x \leftrightarrow \varphi : \varphi \text{ は } \mathcal{L}_A\text{-閉論理式}\}$$

$p(x)$ は帰納的であるから、仮定によりこれを realize する $a \in N$ が存在する. このとき、 a は N において $\text{Th}(M)^G$ をコードする. 補題 17 によって、 $\text{Th}(M)^G$ は M でコードされる.

$(2 \Rightarrow 1)$ $\text{Th}(M)^G$ が M において $a \in M$ でコードされているとする. 補題 19 によって、 $M \models \text{Con}_y(y \in a \wedge y \leq n^*)$ となる $n^* \in M \setminus \omega$ が存在する.

このとき、Henkin の構成法を形式化することによって、 M の中にモデルを定義する. $\alpha(x)$ を、 α^M が M の cofinal な部分集合、となるような論理式とする. α^M は新しい定数記号の (コードの) 集合を表すことを意図している. $\beta(x)$ を、 x が “定数記号” としては $\mathcal{L}_A$ の定数記号の他に α^M に含まれる定数記号を含み、“変数記号” としては x_0 のみを含む論理式である、ということを表す論理式とする. $e(x)$ を、 β^M に含まれるすべての “論理式” を並べた $\emptyset$ -定義可能な関数とする. ただし、 $e(x)$ は $y \geq x$ となる “定数記号” $c(y)$ を含んでいないと仮定する. $\delta_0(x)$ を、 δ_0^M が $\exists x_0 \varphi(x_0) \rightarrow \varphi(m)$ という形をしている閉論理式全体からなる集合、となるような論理式とする. ただし、 m は $e(m) = \ulcorner \varphi(x_0) \urcorner$ となる数とする.

$\delta(y, a)$ を論理式 $(y \in a \wedge y \leq n^*) \vee \delta_0(y)$ とする. このとき、 $M \models \text{Con}_y(\delta(y, a))$ となる. $f(x)$ を、新しい “定数記号” を含むすべての “閉論理式” を並べた $\emptyset$ -定義可能な関数とする. 帰納法によって、次のような $\{a, n^*\}$ -定義可能な関数 $\mathcal{F} : M \rightarrow \beta^M$ を定義する.

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} f(x) & M \models \text{Con}_y(\delta(y, a) \vee \exists z < x (y = \mathcal{F}(z)) \vee y = f(x)) \text{ のとき} \\ \neg f(x) & \text{その他} \end{cases}$$

ここで、 $\neg f(x)$ は $f(x)$ によってコードされた論理式の否定のコードを表す.

$\mathcal{F}$ を使って、 M において $\{a, n^*\}$ -定義可能な構造 N を次のように定義する.

- N の universe $|N|$ を集合 $\alpha^M / \sim$ とする. ただし、 $c, d \in \alpha^M$ に対して、 $c \sim d \Leftrightarrow “c = d” \in \text{ran}(\mathcal{F})$ である. c の同値類を $[c]$ で表す.
- $0^N = [0]$, $1^N = [1]$ とする.
- $[a] +^N [b] = [a + b]$, $[a] \cdot^N [b] = [a \cdot b]$ とする.

このとき、標準的な方法で、任意の閉論理式 φ に対して、 $N \models \varphi \Leftrightarrow M \models \ulcorner \varphi \urcorner \in \text{ran}(\mathcal{F})$ 、となることが分かる. よって、 $N \models \text{Th}(M)$ である.

主張 A N は帰納的に飽和である.

$r(x, a)$ を N で帰納的な type とする. 定義より集合

$$A = \{\ulcorner \varphi(x, y) \urcorner : \varphi(x, a) \in r(x, a)\}$$

は帰納的である. A は recursively enumerable であるから, $\ulcorner \psi_n(x, y) \urcorner$ ($n \in \omega$) を A に含まれるすべての“論理式”を並べたものとする. このとき, $\{a\}$ -定義可能な帰納的関数 h を次のように定義する.

$$h(n, a) = \ulcorner \exists x [\psi_0(x, a) \wedge \psi_1(x, a) \wedge \cdots \wedge \psi_n(x, a)] \urcorner$$

$r(x, a)$ は帰納的な type であるから, 任意の $n \in \omega$ に対して, $N \models \exists x \bigwedge_{i=1}^n \psi_i(x, a)$ である. だから, 任意の $n \in \omega$ に対して $M \models h(n, a) \in \text{ran}(\mathcal{F})$ である. overspill より, $M \models h(n^*, a) \in \text{ran}(\mathcal{F})$ となる $n^* \in M$ が存在する. これより, ある $d \in N$ が存在して, 任意の $\varphi(x, a) \in r(x, a)$ に対して, $N \models \varphi(d, a)$ となることが分かる. すなわち, $r(x, a)$ は d で realize される. $\square$

定理 21 M を, $\text{Th}(M)^G \in \text{SSy}(M)$ となる $\text{PA} + \text{Rfn}(\text{PA})$ のモデルとする. このとき, $N_* \equiv M_*$ かつ $N_* \not\equiv M_*$ となるモデル $M_* \prec M$ と M で定義可能なモデル N_* が存在する.

証明. $a \in M$ が $\text{Th}(M)^G$ を M でコードしていると仮定する. M_* を M における a の definable closure $\text{dcl}_M(a) (\prec M)$ とする. 帰納的な type

$$\{\forall x \exists! y \varphi(x, y) \rightarrow \forall y [\varphi(a, y) \rightarrow y < z] : \varphi(x, y) \text{ は } \mathcal{L}_A\text{-論理式}\}$$

は $\text{dcl}_M(A)$ において realize されないので, M_* は帰納的に飽和ではない. また, $M_* = \text{dcl}_M(a) \prec M$ であるから, $\text{Th}(M)^G$ は M_* でコードされる. よって, 命題 20 より, $N_* \equiv M_*$ となる M_* で定義可能で, 帰納的に飽和なモデル N_* が存在する. $N_* \not\equiv M_*$ であるから, この M_* と N_* が求めるものである. $\square$

事実 22 (cf. [5]) M と N が帰納的に飽和な可算モデルとする. もし $M \equiv N$ かつ $\text{SSy}(M) = \text{SSy}(N)$ ならば, M と N は同型である.

注意 23 M を帰納的に飽和な可算モデルとする. このとき, $N \equiv M$ となる M で定義可能なモデル N は M と同型である. それは次のように示せる. N の帰納的な type $p_N(x)$ に対して, $p_M(x) = \{ \ulcorner N \models \varphi(x) \urcorner : \varphi(x) \in p_N(x) \}$ は M の帰納的な type である. 仮定から $p_M(x)$ は M で realize されるが, このことから $p_N(x)$ が N で realize されることが分かる. よって, N は帰納的に飽和である. 補題 17 より $\text{SSy}(M) = \text{SSy}(N)$ である. また, 仮定から $N \equiv M$ であるから, 事実 22 により, N と M は同型である.

定理 24 M を $PA + \text{Rfn}(PA)$ のモデルとする.

1. $\text{Th}^G(M) \in \text{SSy}(M)$ と仮定する. このとき, $N \equiv M$ であるが, M と *definably isomorphic* でない, M で定義可能なモデル N が存在する.
2. M を帰納的に飽和な可算モデルとする. このとき, 次の条件を満たす定義可能なモデル $N \equiv M$ が存在する.
 - (a) $N \cong M$
 - (b) N と M は *definably isomorphic* ではない

証明. (1) $a \in M$ が $\text{Th}(M)^G$ をコードすると仮定する. そして, $M_* = \text{dcl}_M(a)$ とおく. 定理 21 の証明と同様に, $N_* \equiv M_*$ かつ $N_* \not\equiv M_*$ となる定義可能なモデル N_* を取ることができる. 特に, N_* と M_* は *definably isomorphic* ではないことに注意する. $\varphi(x)$ を M_* で N_* を定義する $\mathcal{L}_A(M_*)$ -論理式とし, $N = \varphi(x)^M$ とおく. $M \succ M_*$ であるから, N は $\text{Th}(M)$ のモデルである. このとき, M と N が *definably isomorphic* でないことを示す. そうでないと仮定する. このとき, ある $\mathcal{L}_A$ -論理式 $\psi(x, y, z)$ とパラメータ $b \in M$ が存在して, 論理式 $\psi(x, y, b)$ が M から N への定義可能な同型写像 $\sigma(x) = y$ を定義する. $M \succ M_*$ であるから, ある $b^* \in M_*$ が存在して, $\psi(x, y, b^*)$ が M_* から N_* への定義可能な同型写像を定義する. しかし, これは $N_* \not\equiv M_*$ に反する.

(2) M は帰納的に飽和なモデルであるから, $\text{Th}(M)^G$ をコードする $a \in M$ が存在する. N を上の (1) で得られたモデルとする. このとき, N は M と *definably isomorphic* ではない. しかし, 注意 23 によれば, M と N は同型である. $\square$

参考文献

- [1] P. Hájek and P. Pudlák, *Metamathematics of first order arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [2] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [3] S. Shelah *Classification theory and the number of non-isomorphic models*, 2nd revised ed, North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [4] C. Smoryński, The incompleteness theorems, In: *Handbook of mathematical logic*, North-Holland, Amsterdam, 1977, 821–865.
- [5] ———, Recursively saturated nonstandard models of arithmetic, *The Journal of Symbolic Logic*, 46, 1981, 259–286.

- [6] S. Tennenbaum, Non-archimedean models for arithmetic, Notices of the American Mathematical Society, 1959, 270.
- [7] A. Tsuboi, On M -recursively saturated models of arithmetic, Tsukuba Journal of Mathematics, Vol. 6, No. 2, 1982, 305–318.