

2次元複素トーラスの自己準同形環

筑波大大学院数学研究科

清水 敦

T, T' を、それぞれ n, n' 次元の複素トーラスとする。 T から T' への準同型全体 $\text{Hom}(T, T')$ は階数 $2nn'$ 以下の $\mathbb{Z}$ 自由加群である。

定理 1. もし、 $\text{Hom}(T, T')$ の階数が $2nn'$ に等しければ、 T, T' は、ある一次元複素トーラス T_0 のそれぞれ n, n' 回の直和に isogenous である。

とくに $T = T'$ のときを考えよう。そのとき $\text{Hom}(T, T')$ は自己準同型環 $\text{End}(T)$ になる。一般には $\text{End}(T) \simeq \mathbb{Z}$ である。では $\text{End}(T) \neq \mathbb{Z}$ のとき T はどんなものであろうか？

$\text{End}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ のことを $\text{End}^{\mathbb{Q}}(T)$ とかき、以下これを考察する。2次元トーラス T について、 $\text{End}^{\mathbb{Q}}(T)$ のおこりうるすべての形を考え、それに従って2次元トーラスを分類することを目標とする。次の定理がほぼ完全な回答を与える。

定理 2 T を自明でない自己準同型をもつ (すなわち $\text{End}(T)$

半 $\mathbb{Z}$ であるような) 2次元複素トーラスとする。その時、 T は次のいずれかの型の $\mathbb{C}$ トーラスに isogenous である。

A) 2つの一次元トーラス T' 、 T'' の直和 $T = T' \oplus T''$ 。

i) T' 、 T'' が isogenous のとき。 $\text{End}^{\mathbb{Q}}(T) \cong M_2(\text{End}^{\mathbb{Q}}(T'))$ (すなわち、斜体 $\text{End}^{\mathbb{Q}}(T)$ を係数とする2次の全行列環) であり、 T' が complex multiplication をもつかもたないかに従って、 $\text{End}(T)$ の階数は4か8になる。

ii) T' 、 T'' が isogenous でない時。 $\text{End}^{\mathbb{Q}}(T) \cong \text{End}^{\mathbb{Q}}(T') \oplus \text{End}^{\mathbb{Q}}(T'')$ であり、 T' 、 T'' が complex multiplication を、両方とも持つ一方だけがもつ、両方とも持たない、のそれぞれに従って、 $\text{End}(T)$ の階数はそれぞれ4、3、2となる。

B) 単純—すなわち部分トーラスを $\{0\}$ と自分自身以外にもたない場合。

$$i) \quad T_0(\zeta, \xi) = \mathbb{C}^2 / \begin{pmatrix} 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{pmatrix}$$

(ここで右辺の記号は $\mathbb{C}^2$ をその中の格子群

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z} + \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix} \mathbb{Z} + \begin{pmatrix} \zeta^2 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \mathbb{Z} + \begin{pmatrix} \zeta^3 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \mathbb{Z}$$

でわって得られる2次元複素トーラスを意味する。

以下出てくる同様の記号も同じように解釈する。

ただし、 ζ 、 ξ は $\mathbb{Q}$ 上4次の共役な代数的数で、 ζ 、

$\xi, \bar{\xi}, \zeta, \bar{\zeta}$ からのすべての共役を与える。 $F = \mathbb{Q}(\xi, \bar{\xi}, \zeta, \bar{\zeta})$ のガロア群を G とし、 $\xi, \bar{\xi}, \zeta, \bar{\zeta}$ をそれぞれ 1, 2, 3, 4 に対応させて $G \hookrightarrow S_4$ とみなすとき、 $G \neq V_4$ かつ、 $G \neq V_4 \cup \{1, 2\} V_4$ ($V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$) であるとする。

このとき、 $T_0(\xi, \bar{\xi})$ は単純で、 $\text{End}^{\mathbb{Q}}(T) \simeq \mathbb{Q}(\xi)$ 。

$$\text{ii)} \quad T_1(m; \ell, d) = \mathbb{C}^2 / \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m} & \ell & \ell\sqrt{m} \\ 1 & -\sqrt{m} & d & -d\sqrt{m} \end{pmatrix}$$

ここで、 m は 2 乗因子を含まない 1 でない整数。 $\ell, d \in \mathbb{C}$ は、 $\ell d = f \in \mathbb{Q} \setminus N_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{m}))$ かつ、0 でない $z \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ に対し、 $z\ell + z^{\sigma}d \notin \mathbb{Q}$ であるとする (ただし $z \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ に対し z^{σ} は $\mathbb{Q}$ 上での z の共役元、又、 $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}}(z) = zz^{\sigma}$)。さらに $m > 0$ なら $\ell, d \notin \mathbb{R}$ 、 $m < 0$ なら $\ell \neq \bar{d}$ とする。

このとき $T_1(m; \ell, d)$ は単純で、

$$\text{End}^{\mathbb{Q}}(T_1(m; \ell, d)) \simeq (m, f)_{\mathbb{Q}}$$

($(m, f)_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ 上単位元 1、および、 e_1, e_2, e_3 ではられる 4 元数環で、 $e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$ 、 $e_1^2 = m$ 、 $e_2^2 = f$ をみたすもの)

$$\text{iii)} \quad T_2(m; \ell, d) = \mathbb{C}^2 / \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m} & \ell & \sqrt{m}\ell \\ 1 & -\sqrt{m} & d & -\sqrt{m}d \end{pmatrix}$$

ただし、 m は 2 乗因子を含まず、1 でもない整数。又、 $2x\ell d + z\ell + z\sigma d + 2y = 0$ ($x, y \in \mathbb{Q}$, $z \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$) なら $x = y = z = 0$ とする。さらに、 $m > 0$ なら $\ell, d \notin \mathbb{R}$, $m < 0$ なら $\ell = \bar{d}$ とする。

この時、 $T_2(m; \ell, d)$ は単純で、

$$\text{End}^{\mathbb{Q}}(T_2(m; \ell, d)) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{m})$$

C) 単純でも、直和でもない時。

$$i) \quad T_3(m; w) = \mathbb{C}^2 / \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m} & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{m} \end{pmatrix}$$

m は 2 乗因子を含まず 1 でもない負の整数。 w は、 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ に入らない複素数。このとき、

$$\text{End}^{\mathbb{Q}}(T_3(m; w)) \simeq \langle m, 0 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$ii) \quad T_4(z, w) = \mathbb{C}^2 / \begin{pmatrix} 1 & z & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & z \end{pmatrix}$$

z は $\mathbb{Q}$ 上の 2 次体に入らず、かつ $w \notin \mathbb{Q} + \mathbb{Q}z + \mathbb{Q}z^2$ とする。このとき

$$\text{End}^{\mathbb{Q}}(T_4(z, w)) \simeq \mathbb{Q}[x] / (x^2)$$

上の分類は $\text{End}^{\mathbb{Q}}(T)$ による T の isogenous class の分類になっていることに注意しよう。実際、それぞれの型に現われる $\text{End}^{\mathbb{Q}}(T)$ はお互いに同型でない。従ってそれぞれの型に属することか、それぞれの型の $\text{End}^{\mathbb{Q}}(T)$ をもつための必要十分条

件になる。例えば、ある m に対し、 $\text{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}) \simeq (m, 0)_{\mathbb{Q}}$ なる 2次元複素トーラス $\mathbb{T}$ は C)-i) の型に属することがいえる。

さて、上にあげたうち A) に属するトーラスは射影的、すなわちアーベル多様体であり、C) はそうでない。B) については次の定理によって判定ができる。

定理3 単純2次元複素トーラス $\mathbb{T}$ は、自明でない自己準同型をもつとする。

$\mathbb{T}$ がアーベル多様体であるための必要十分条件は $\text{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T})$ が、実の2次体を含むことである。

参考文献

[1] 清水 敦 複素トーラスの自己準同型環について

筑波大学大学院中間報告 (1980)

[2] 小泉 正二 テータ函数 上智大学レクチャー

ノート (1978)

[3] H. Yoshihara The structure of complex tori with the automorphisms of maximal degree. Tsukuba J. Math. vol.4 No.2 December 1980