

有限群の作用するホモトピー-球面 のつくる群について

京大 数研 阿部 孝 順

§ 1 定義

G を有限群とし $\alpha: G \longrightarrow O(m)$ を G の表現とする.

$$\varphi: G \times \Sigma^m \longrightarrow \Sigma^m$$

を G のホモトピー-球面上の可微分な semi-free な作用とし
(φ, Σ^m) と書くことにする.

(φ, Σ^m) が次の条件をみたすとき α -球面ということにする.

(i) φ の固定点が又ホモトピー-球面 Σ^n ($n \geq 1$)

(ii) $\Sigma^n \ni x$ に対して

$$\varphi_x: G \longrightarrow O(T_x \Sigma^n) \quad ; \quad \varphi_x(g) = d\varphi(g)_x$$

が表現として α と同値である.

$D_m(\alpha)$: α -球面の G -微分同相な類全体の集合

$D_m(\alpha)$ には固定点の回りの連結和を用いて和が定義される.

定義の可能性等については [1] を参照されたい.

$(L, S^m) : (m+1)$ -次元表現 $(\alpha \oplus \text{trivial})$ を $\mathbb{R}^{m+1}$ の単位球面 S^m に制限して得られる線型な α 球面.

(L, S^m) は $D_m(\alpha)$ の零元になる.

$$\text{又} \quad \psi : G \times D^m \longrightarrow D^m$$

を m 次元円板 D^m 上の可微分な semi-free な作用としたとき、上の α 球面の定義での固定点集合をホモトピー球面とした代わり、 n 次元円板 D^n として同様の条件を満たすものを α -円板ということにする.

$E_m(\alpha) : \alpha$ -円板の G 微分同値な類全体のつくる集合.

$E_m(\alpha)$ も境界連結和により半群をなす.

M. Sebastiani は [2] において固定点の次元が零次元の場合に $D_m(\alpha)$ が群をなしこの様子を調べている. ここでは、固定点の次元が正の場合に考えてみる.

§2 $E_m(\alpha)$ の補造

(ψ, D^m) を α -円板とする. 以下では $m-n > 2$ を仮定する.

$\text{int } D^n \ni x$, $B_{2\varepsilon}^m$ を x の回りの G 不変な 2ε -円板

$T_\varepsilon^m : (D^n - \text{int } B_{2\varepsilon}^m)$ の $(D^m - \text{int } B_{2\varepsilon}^m)$ における ε -管状近傍 (G -不変なもの)

$$W^m \equiv D^m - \text{int } (B_{2\varepsilon}^m \cup T_\varepsilon^m)$$

$$W_0^{m-1} \equiv \partial B_{2\varepsilon}^m - \text{int } (\partial B_{2\varepsilon}^m \cap T_\varepsilon^m)$$

$$W_1^{m-1} \equiv \partial D^m - \text{int } (\partial D^m \cap T_\varepsilon^m)$$

} free な作用をもつ G -多様体

$$\bar{W}^m \equiv W^m / G, \quad \bar{W}_0^{m-1} \equiv W_0^{m-1} / G, \quad \bar{W}_1^{m-1} \equiv W_1^{m-1} / G$$

$$\partial W^m = W_0^{m-1} \cup W_1^{m-1} \cup V^{m-1} \quad (V^{m-1} \text{ は } T^m \text{ の 同 伴 球 面 バ ン ド ル})$$

$$V^{m-1} \cong \partial W_0^{m-1} \times [0, 1] \quad : G\text{-微分同相}$$

なることより $(\bar{W}^m; \bar{W}_0^{m-1}, \bar{W}_1^{m-1})$ は h コホモロジー空間となり

$$\tau(\psi) \equiv \tau(\bar{W}^m, \bar{W}_0^{m-1}) \in Wh(G)$$

が定義され、 ψ だけに依っていることが分かる

補助定理

$m \geq 6$, $m-n > 2$ なら $E_m(\alpha)$ は $Wh(G)$ の元と 1 対 1 に
対応している。

証明 (ψ, D^m) , (ψ', D^m) を α の α 円板として (ψ, D^m) に対
して $W^m, W_0^{m-1}, W_1^{m-1}, V^{m-1}$ を上記と同じ記法にし (ψ', D^m) には
ダッシュをつけて表わすことにする。

$\tau(\psi) = \tau(\psi')$ とする。 $\bar{V}^{m-1} \cong \bar{V}'^{m-1}$ (微分同相) だから

S -cobordism theorem に依り (uniqueness)

$$\bar{W}^m \cong \bar{W}'^m \quad (\text{微分同相})。$$

$W^m \longrightarrow \bar{W}^m$, $W'^m \longrightarrow \bar{W}'^m$ は普遍被覆なことから

$$W^m \cong W'^m \quad (G\text{-微分同相})。$$

又この G -微分同相は適当にとると

$$D^m \cong D'^m \quad (G\text{-微分同相})$$

に拡張できる。

又 $\tau \in Wh(G)$ に対して S -cobordism の存在定理から $\tau(\eta) = \tau$ なる α 同極 (η, D^m) の存在が示される.

註: $\tau: E_m(\alpha) \longrightarrow Wh(G)$ は定義より準同型であり、従って補助定理により同型対応である.

§3. $D_m(\alpha)$ について.

$m-n > 2$ とする.

(φ, Σ^m) を α 球面とし α を固定点とする.

B_ε^m を α の周りの G 不変な ε 同極とする. $\varphi \in (\Sigma^m - \text{int } B_\varepsilon^m)$

に制限して α 同極 $(\eta, \Sigma^m - \text{int } B_\varepsilon^m)$ を得る. 但し $n \geq 5$

$$\tau(\varphi) = \tau(\eta) \in Wh(G)$$

とすると $\tau(\varphi)$ は φ だけに依り決まる.

定理 1:

$(\varphi, \Sigma^m), (\varphi', \Sigma^m)$: 二つの α 球面 $n \geq 5$

$\tau(\varphi) = \tau(\varphi')$ ならば φ と φ' は連続な作用として同値

証明 B_ε^m を上記と同じものとし (φ', Σ^m) に対しては B_ε^m と書くと可する. $\tau(\varphi) = \tau(\varphi')$ だから補助定理より

$$f: (\Sigma^m - \text{int } B_\varepsilon^m) \cong (\Sigma^m - \text{int } B_\varepsilon^m) \quad (G\text{-微分同相})$$

$$F: \Sigma^m \longrightarrow \Sigma^m$$

$$\begin{aligned} \Sigma & \quad F|_{\Sigma - \text{int} B_\varepsilon^m} = \text{ト} \\ F(t \cdot v) &= t \cdot f(v) \quad (0 \leq t \leq 1, v \in \partial B_\varepsilon^m) \end{aligned}$$

とすると F は同相写像で G の作用を保つ

註: $Wh(G) = 0$ ならば定理 1 より α 球面は連続的に線型な作用しかないことが分かる. G Bredon は S^1, S^2 作用に対して同様の事を示している ([1])

定理 2

$m - n > 2$, $n \geq 5$ ならば $D_m(\alpha)$ は群をなす.

証明: (φ, Σ^m) を仮定をみたす α 球面とする.

x を固定点として B_ε^m を x の周りの G -不変な円板とする.

$$W^{m+1} = (\Sigma^m - \text{int} B_\varepsilon^m) \times [0, 1]$$

とすると W^{m+1} には φ から自然に G 作用が入る. 又角を滑らかにしてこの作用が可微分になると α 円板 (ψ, W^{m+1}) ができる.

$\tau(\psi) = \tau(\varphi)$ なことに注意.

補助定理より $\tau(\psi) = -\tau(\psi)$ なる α 円板 (ψ, D^{m+1}) が存在する.

$\tau(\psi \# \psi) = \tau(\psi) + \tau(\psi) = 0$ だから $\psi \# \psi$ は線型な作用である.

$$\begin{aligned} \therefore L &\cong \partial(\psi \# \psi) \cong \partial\psi \# \partial\psi \cong \varphi \# (-\varphi) \# \partial\psi \\ &\quad (-\varphi \text{ は } \varphi \text{ と逆同変をもつ}) \end{aligned}$$

故に $(-\varphi) \# \partial\psi$ は求める φ の逆元

参考文献

- [1] G. Bredon : Introduction to compact transformation groups. Chapt VI.
; Acad Press. (1972)
- [2] M. Sebastiani : Sur les actions ad deux points de
groups finits sur les spheres .
; Comm Math Helv vol 45 (1970)