

Witt 群 W_n の変形について

中央大 理工 関口 力 (Tsutomu Sekiguchi)

我々の目的は、Witt-Artin-Schreier の完全系列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n \longrightarrow W_n \longrightarrow W_n \longrightarrow 0$ から、Kummer type の完全系列 $1 \longrightarrow \mu_{p^n} \longrightarrow (\mathbb{G}_m)^n \longrightarrow (\mathbb{G}_m)^n \longrightarrow 1$ への変形を作ること
にあり、その為に Witt 群 W_n から torus $(\mathbb{G}_m)^n$ への変形
を統制する必要がある。ここでは、現在得られている W_n か
ら $(\mathbb{G}_m)^n$ への変形の作り方、また、それらの代表的と思われ
る例を構成する。以下、 $(A, \underline{M})$: DVR, $\lambda \in \underline{M}$, $S = \text{Spec } A$ とし、
S-group scheme $\underline{G}^{(\lambda)} = \text{Spec } A[x, 1/(\lambda x + 1)]$ を群構造 $x \cdot$
 $y = \lambda xy + x + y$ で定義する。明らかに、 $\lambda \neq 0$ のとき、 $\underline{G}^{(\lambda)}$
は $\mathbb{G}_a$ から $\mathbb{G}_m$ への変形を与え、また逆も成り立つ。

定理 I. $\underline{G} \longrightarrow S$: flat S-group scheme with $\underline{G}_0 \simeq \mathbb{G}_a$,
 $\underline{G}_\eta \simeq \mathbb{G}_m \implies \underline{G} \simeq \underline{G}^{(\lambda)}$.

この $\underline{G}^{(\lambda)}$ と [2] の変形の作り方は、次の定理で一般化さ
れる。

定理 II. $X \longrightarrow S$: smooth irreducible commutative S-

ring scheme, $\lambda \in \underline{X}(S)$ とし、 h_X の subfunctor $(h_X)^\times$, $(h_X)^{(\lambda)}$ を各々、 $Y \longmapsto h_X(Y)^\times$, $Y \longmapsto \{x \in h_X(Y) \mid \lambda x + 1 \in h_X(Y)^\times\}$ ($Y: S$ -schemes) で定義すれば、これらは X の open subschemes $X^\times$, $X^{(\lambda)}$ で表現される。

証明の概略 .

$$\pi: X \longrightarrow S \quad : \text{structure morphism}$$

$$m: X \times_S X \longrightarrow X \quad : \text{ring scheme } X \text{ の積法則}$$

$$0: S \longrightarrow X \quad : \text{ring scheme } X \text{ の } 0\text{-section}$$

$$e: S \longrightarrow X \quad : \text{ring scheme } X \text{ の } 1\text{-section}$$

とし、

$$\Psi: X \times_S X \longrightarrow X \times_S X$$

とおく。 Ψ は、 $X \times_S X$ を projection p_2 を通して、 X 上の additive group scheme として見た時の準同型写像となっており、 S の各 geometric point s 上の Ψ の fibre

$$\Psi_s: X_s \times X_s \longrightarrow X_s \times X_s$$

は $(0(s), e(s))$ で etale、かつ $\Psi|_{X \times (e)} = \text{id}$ より、 $\deg \Psi_s = 1$ 。従って、 $\Psi_s: \text{birational}$ 。ここで、Cartesian 積

$$\begin{array}{ccc} E = \text{Ker}(\Psi) & \xrightarrow{\psi} & X \\ \downarrow & & \downarrow 0_X := (0 \circ \pi, \text{id}) \\ X \times_S X & \xrightarrow{\Psi} & X \times_S X \end{array}$$

をとる。E は additive group scheme over X であるから、各 geometric point $x \in X$ に対し、 E_x の $0(x)$ における連結成分 E_x° は既約である。従って、写像

$$x \longmapsto \dim(E_x^\circ)$$

は upper semi-continuous on X となり、 X の部分集合

$$U := \{x \in X \mid \dim(E_x^\circ) = 0\}$$

は $e(S)$ を含む Zariski open をなす。更に、

$$\phi = \phi|_{E^\circ}: E^\circ = \phi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

は quasi-finite となる。一方、 ϕ は明らかに equidimensional であるから、Chevalley の判定定理により ϕ は universally open となる。従って、写像

$$n: U \longrightarrow Z; z \longmapsto n(z) = \# \phi^{-1}(z)$$

は lower semi-continuous となる。従って U の部分集合

$$V := \{z \in U \mid n(z) = 1\}$$

は Zariski closed である。一方、 ψ_0 が birational であったから、 V は U の generic point を含んでおり、従って $U = V$ を得る。即ち、 U の各点 z に対し、 E_z° の base space は 1 点よりなることが分かる。ここで、 ϕ が flat となるような U の点全体 U_0 は $\phi^{-1}(z)$ が geometrically reduced となる U の点 z を含んでいることを注意する。特に、 $U_0 \supset e(S)$ である。今、 $\phi^{-1}(U_0)_{\text{red}} \simeq U_0$ に注意すれ

ば、 $\phi^{-1}(U_0) \longrightarrow U_0$ は proper なることが分かる。従って、 U_0 の部分集合

$$W := \{z \in U_0 \mid \phi^{-1}(z): \text{geometrically reduced}\}$$

は open をなす。更に、点 $z \in X$ に対し、

$$z \cdot 1_X: X \longrightarrow X : \text{automorphism}$$

$$\iff z \cdot 1_X: X \longrightarrow X : \text{monomorphism}$$

$$\iff E_z = \{0\} \iff z \in W.$$

従って、 $W = X^\times$ を得る。

更に、 $\lambda \in \underline{X}(S)$ に対し、morphism $\alpha: X \longrightarrow X$ を $x \longmapsto \lambda x + e$ で定義すれば、 $X^{(\lambda)} = X^\times \times_X (X, \alpha)$ となり、 $F^{(\lambda)} = h_X(\lambda)$ である。

この定理を用いて、次のような例が作られる。

例 1. A : 環、 $S = \text{Spec } A$, $X = W_{1,A} = \text{Spec } A[x]$ とおき、 X を普通の A 上の ring scheme とみる。この時、 $\lambda \in \underline{X}(S) = \text{Hom}_{A\text{-alg}}(A[x], A) = A$ に対し、

$$X^\times = G_{m,A}, \quad X^{(\lambda)} = \underline{G}^{(\lambda)}$$

となる。

例 2. A : 環、 $X = W_{n,A}$ を A 上の長さ n の Witt vector ring scheme とする。この時、 $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}) \in \underline{X}(A) = A^n$ に対し、

$$(W_{n,A})^\times = \text{Spec } A[x_0, \dots, x_{n-1}, 1/W_0(x), \dots, 1/W_{n-1}(x)],$$

$$W_{n,A}^{(\mu)} = \text{Spec } A[x_0, \dots, x_{n-1}, 1 / (W_0(\mu)W_0(x)+1), \dots, 1 / (W_{n-1}(\mu)W_{n-1}(x)+1)],$$

但し、 $W_i(x) = x^{p^i} + px^{p^{i-1}} + \dots + p^i x$: Witt 多項式とする。

この $W_{n,A}^{(\mu)}$ は [2] で与えた group scheme と同じものである。

例 3. A : DVR $\underline{M}$: 極大イデアル; $\underline{M} \ni \lambda_1, \dots, \lambda_r$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$); $\lambda := (0, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$; $H^{(\lambda)} := \text{Spec } A[x_0, \dots, x_r]$ とおく。ここで、 $x = (x_0, \dots, x_r) \in H^{(\lambda)}$ に対し、

$$x_0 + x_1 t + x_2 t(t - \lambda_1) + \dots + x_r t(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_{r-1}) \\ \in A[t] / t(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_r)$$

と考え、 $A[x] / t(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_r)$ の環構造で $H^{(\lambda)}$ に ring scheme の構造を導入する。明らかに、 $H^{(\lambda)}$ は、 A -代数の圏から環の圏への関手

$$B \longmapsto B[t] / t(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_{r-1})$$

を表現する ring scheme である。このとき、group scheme $L^{(\lambda)}$ を同型

$$(H^{(\lambda)})^\times \simeq G_m \times L^{(\lambda)}; f(t) \longmapsto (f(0), f(t)/f(0))$$

で定義するとき、これが A 上の特異代数曲線の generalized Jacobian の affine 部分として現れる基本的なものである。

このように、この定理 II によりかなりの Witt 群の変形の例が作れるが、しかし乍ら、残念なことに意味のある ring

scheme を作ることは group scheme を作る以上に簡単とはいえない。そこで考えられるもう一つの方法は、Witt group W_n が次の extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_a \longrightarrow W_n \longrightarrow W_{n-1} \longrightarrow 0$$

で与えられることを利用し、この extension の変形を考えることである。しかし、現在の所この考え方で、意味のある変形が得られているのは $n = 2$ の場合であるが、これを次ぎに説明する。

定理 III. $\mu \in \underline{M} \setminus \{0\}$ に対し、 $A_\mu = A/\mu$ とおくとき、 S 上の étale 位相に関する群層の完全系列 $0 \longrightarrow \underline{G}^{(\mu)} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,A} \xrightarrow{r} \mathbb{G}_{m,A_\mu} \longrightarrow 0$ (但し、 $\alpha: x \longmapsto \mu x+1$) が得られ、これから smooth affine S -group scheme L に対し、同型 $\text{Ext}^1(L, \underline{G}^{(\mu)}) \simeq \text{Hom}(L, \mathbb{G}_{m,A_\mu}) / r(\text{Hom}(L, \mathbb{G}_{m,A}))$ を得る。

実際、定理 III の完全系列より、完全系列

$$\begin{aligned} \text{Hom}(L, \mathbb{G}_{m,A}) &\xrightarrow{r} \text{Hom}(L, \mathbb{G}_{m,A_\mu}) \longrightarrow \\ &\text{Ext}^1(L, \underline{G}^{(\mu)}) \xrightarrow{\alpha} \text{Ext}^1(L, \mathbb{G}_{m,A}) \end{aligned}$$

を得るが、ここで群構造を無視することにより 1対1写像

$$\text{Ext}^1(L, \mathbb{G}_{m,A}) \longrightarrow H^1_{\text{et}}(L, \mathbb{G}_{m,A})$$

を得る。更に、Hilbert の定理 90 により、 $H^1_{\text{et}}(L, \mathbb{G}_{m,A}) \simeq \text{Pic}(L/A)$ となり、 L は affine かつ UFD であるから、

$$\text{Pic}(L/A) = \langle 0 \rangle$$

を得、定理 III の結果を得る。

この定理 III を用いて、上の例にない新しい W_2 の torus への変形を与えることが出来る。実際、 $\underline{M} \setminus \{0\} \ni \lambda_1, \lambda$ ($\lambda_1 \neq i\lambda$ ($i=1, \dots, p-1$)) に対し、

$$\mu = \lambda_1(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_1 - (p-1)\lambda),$$

$$\lambda_i = (1/i!) \lambda_1(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_1 - (i-1)\lambda) \quad (i=1, \dots, p-1),$$

$$\phi(x) = 1 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_{p-1} x^{p-1} = (1 + \lambda x)^{\lambda_1/\lambda} \pmod{\mu}$$

とおくとき、 ϕ は準同型

$$\phi: \underline{G} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,A}$$

を与え、次の定理を得る。

定理 IV. $\text{char}(A/\underline{M}) = p (>0)$ とし、

$$L^{(\lambda, \mu)} = \text{Spec } A[x_1, x_2, 1 / (\lambda x_1 + 1), 1 / (\phi(x_1) + \mu x_2)]$$

は W_2 から $(\mathbb{G}_m)^2$ への変形を与える。

[文献]

- [1] T. Sekiguchi & F. Oort, On the deformation of Artin-Schreier to Kummer. Utrecht Univ. Preprint Series Nr.369, 1985.
- [2] ———, On the deformations of Witt groups to tori. In Alg. & Top. theories, Kinikuniya Co. Ltd., 283-298 (1985).