

半線型高階放物型方程式の大域解について

早大 理工 星野 弘喜 (Hiroki Hoshino)

早大 理工 山田 義雄 (Yoshio Yamada)

§0. 序 Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし, 境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする.

$$L = L(x, D) = \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu(x) D^\mu$$

を Ω で定義された $2m$ 階楕円型作用素とし,

$$B_j = B_j(x, D) = \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j\mu}(x) D^\mu, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

を $\partial\Omega$ で定義された m_j 階微分作用素とする. 但し $m_j < 2m$.

次の半線型放物型初期値 - 境界値問題の大域解の存在を $L^p(\Omega)$ で考える:

$$(P) \quad \begin{cases} u_t + Lu = f(D^{\alpha_1}u, D^{\alpha_2}u, \dots, D^{\alpha_N}u), & x \in \Omega, t > 0 \\ B_j u = 0, & j = 1, 2, \dots, m, \quad x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(\cdot, 0) = \phi & x \in \Omega \end{cases}$$

作用素 A を

$$D(A) = \{u \in W^{2m,p}(\Omega) : B_j u = 0 \text{ on } \partial\Omega, j = 1, 2, \dots, m\}$$

$$Au = Lu \quad \text{for all } u \in D(A)$$

と定義する. (P) を次の様に書き直す:

$$(P') \quad \begin{cases} u_t + Au = f(u) & , \quad t > 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

但し (P) の右辺を $f(u)$ と略記し、以下もそのようにする。 e^{-tA} が解析的半群になる場合を考える。

$L^p(\Omega)$ における放物型初期-境界値問題の大域解の存在は Friedman [1], Henry [3], Ito [4], Kielhöfer [5], Rothe [8] 等で研究されている。Rothe [8] は 2 階で $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ の場合に限り議論している。ここで $\operatorname{Re} \sigma(A)$ は A のスペクトルの実部を意味する。Henry [3], Ito [4], Kielhöfer [5] は $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ に制限しないで“安定多様体”を構成している。すなわち (P') の定常解の安定性を論じている。

$\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ のとき $\phi \in D(A^\theta)$ とし (但し, $\theta \geq 0$), f は $\nu > 1$, $0 \leq \alpha < 1$, $v, w \in D(A^\alpha)$ に対して

$$\|f(v) - f(w)\|_p \leq \operatorname{const.} (\|A^\alpha v\|_p + \|A^\alpha w\|_p)^{\nu-1} \|A^\alpha v - A^\alpha w\|_p$$

$$f(0) = 0$$

を満たすとする。Henry [3], Kielhöfer [5] 等は $\alpha \leq \theta$ の場合の一般論を確立している。ここでは $0 \leq \theta \leq \alpha$ の場合の (P') の大域解の存在, 自明解の安定性について考察する。我々は Kielhöfer [5] と比較して α のとり得る範囲を広げることができ, α のとり方に対しての ν の依存性を明らかにすることができた。詳しくは §1 で述べる。Ito [4] は $\alpha = 0$ であるが $\operatorname{Re} \sigma(A) \geq 0$ の場

合も含めて安定性を論じている。我々は解の L^p -ノルムの exponential decay を出す為に $\operatorname{Re} \sigma(A) \neq 0$ とする。

§1 では仮定と結果 — $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ のときの局所解, 大域解の存在, $\operatorname{Re} \sigma(A) \neq 0$ のときの安定多様体の構成 — を述べる。

§2 ではいくつかの補題を準備する。§3 では $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ の場合の定理の証明を行う。§4 では $\operatorname{Re} \sigma(A) \neq 0$ の場合の定理の証明を行う。安定多様体の正の不変性も得られるが, Hashimoto - Niikura - Yamada [2] で使われた方法を参考にした。我々は, 自明解の安定性を調べているが, u^* を

$$v_t + A v = g(v), \quad t > 0, \quad v(0) = \phi$$

の定常解とし, $u \equiv v - u^*$, $f(u) \equiv g(v) - g(u^*) = g(u + u^*) - g(u^*)$ において仮定を満たすとき, u^* の安定性もいえる。

なお, Weissler [10] の局所解の存在の一部の結果を含んでいることに注意しておく ($\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$, $\theta = 0$)。

§1. 仮定, 結果

仮定 1.1 (L, B_j について)

(i) $|\mu| = 2m$ のとき a_μ は $\bar{\Omega}$ で有界, 一様連続, $|\mu| < 2m$ のとき a_μ は Ω で有界可測。

(ii) $|\mu| \leq m_j$ なる μ に対し $b_{j\mu} \in C^{2m-m_j}(\partial\Omega)$, $|\gamma| \leq 2m - m_j$ なる任意の γ に対し $D^\gamma b_{j\mu}$ は $\partial\Omega$ 上で有界, 一様連続。

(iii) L は Ω で一様楕円型, 適正楕円型, $\overline{\Omega}$ 上で強楕円型.

(iv) 任意の $x \in \Omega$ に対し $L(x, D)$, $\{B_j(x, D)\}_{j=1, 2, \dots, m}$ は補完条件を満足する.

(v) $\mathcal{L}(x, D_x, D_t) \equiv L(x, D_x) - (-1)^m e^{i\theta} D_t^{2m}$ としたとき
 任意の $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ に対し $\mathcal{L}(x, D_x, D_t)$, $\{B_j(x, D)\}_{j=1, 2, \dots, m}$
 は補完条件を満足する.

以上は田辺 [9] による. 簡単の為に非線型項 f に対して次の仮定をおく:

仮定 1.2 (f について) $C_0 > 0$, $\nu > 1$ とする.

(i) $0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_N| = l < 2m$

(ii) $|f(v) - f(w)| \leq C_0 \sum_{k=1}^N (|D^{\alpha_k} v| + |D^{\alpha_k} w|)^{\nu-1} |D^{\alpha_k} v - D^{\alpha_k} w|$

(iii) $f(0) = 0$

[9] 及び仮定 1.1 により $-A$ は解析的半群 e^{-tA} を生成する.

(P') の代わりに積分方程式

$$(IE) \quad u(t) = e^{-tA} \phi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s)) ds, \quad t > 0$$

の局所解, 大域解の存在を考えていく.

$\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ のときは $\gamma > 0$ に対し作用素 A の分数巾 A^γ を定義することができる:

$$A^{-\gamma} \equiv \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-tA} dt$$

$$A^\gamma \equiv (A^{-\gamma})^{-1}, \quad D(A^\gamma) = R(A^{-\gamma})$$

$D(A^\gamma)$ は $L^p(\Omega)$ で稠密である.

$\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ のとき (IE) を解く空間を設ける為に A の分数中を用いる. p のとり方として次の様にする:

$$(1.1) \quad p \in (1, \infty) \text{ かつ } p > \frac{n(\nu-1)}{(2m-\ell)\nu}$$

§0 で出してきた $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$ については

$$(1.2) \quad \frac{n(\nu-1)}{2mp\nu} + \frac{\ell}{2m} < \alpha < 1$$

$$(1.3) \quad 0 \leq \theta \leq \alpha, \quad 1 - \alpha\nu + \theta(\nu-1) \geq 0, \quad (\alpha - \theta)\nu < 1$$

となるよう選ぶ.

(1.3) により, α, θ について

$$\alpha\nu > 1 \text{ のとき } \frac{\alpha\nu-1}{\nu-1} \leq \theta \leq \alpha$$

$$\alpha\nu = 1 \text{ のとき } 0 < \theta \leq \alpha$$

$$\alpha\nu < 1 \text{ のとき } 0 \leq \theta \leq \alpha$$

という関係を得る. 初期値 ϕ について $\phi \in D(A^\theta)$ とする.

p, α のとり方について注意しておく. (1.2) より

$$\ell - \frac{n}{p\nu} < 2m\alpha - \frac{n}{p}$$

であるから $D(A^\alpha) \subset W^{\ell, p\nu}(\Omega)$ が成立する ([3], [7]):

$$\|u\|_{W^{\ell, p\nu}} \leq C_1 \|A^\alpha u\|_p \quad \text{for any } u \in D(A^\alpha)$$

(1.2) を満たす α がとれる為の p の条件として

$$\frac{n(\nu-1)}{2mp\nu} + \frac{\ell}{2m} < 1, \quad \text{すなわち (1.1) を設ける.}$$

[5] では α のとり方は $\frac{n}{2mp} + \frac{\ell}{2m} < \alpha < 1$ であり, また $\phi \in D(A^\alpha)$

である. 我々は上で述べたことからわかるように α の範囲を広げることができ, 初期値のとれる範囲も広げることができ

たのが改良点である。

$t \in [0, \infty)$ に対し関数 $\varphi(t)$ を $\varphi(t) \equiv \min \{1, t\}$ と定義する。
これは [8] による。大域解の存在を示す為、定数を t に依存させない為を用いる。

定理 1 $\operatorname{Re} \sigma(A) > \lambda > 0$ とする。ある $T \in (0, \infty)$ に対し $[0, T]$ 上で (IE) の解 u が存在する。 $u \in C((0, T]; D(A^\alpha)) \cap C([0, T]; D(A^\beta))$ であり、任意の $\beta \in [0, 1)$ に対し

$$(1.4) \quad \|A^\beta u(t)\|_p \leq C_2(\beta) \varphi(t)^{-(\beta-\theta)} e^{-\lambda t}, \quad t \in (0, T]$$

系 (IE) の解は (P') の解、従って定理 1 が (P') について成立。

注意 然るべき条件の下で (P') の解は (P) を満たす、すなわち古典解にもなる。

定理 2 $\operatorname{Re} \sigma(A) > \lambda > 0$ とする。 $\|A^\theta \phi\|_p$ が十分小さいならば (IE) の解が $[0, \infty)$ 上で存在する。(1.4) が $t \in (0, \infty)$ について成立する。

定理 3 $\operatorname{Re} \sigma(A) \neq 0$ のときは安定多様体 M が存在する。 $\phi \in M$ ならば (IE) の大域解 u が存在し、 $t \rightarrow \infty$ とするとき $\|u(t)\|_p \rightarrow 0$ であり、任意の $t \geq 0$ に対し $u(t) \in M$ 。

以下、 C_0, C_1, C_2 を含め正定数 C_k は t, T には依存しない。

§ 2. 準備 ここでは $\operatorname{Re} \sigma(A) > \lambda > 0$ とする。証明は省略する。

補題 2.1 (i) $A^\gamma e^{-tA} = e^{-tA} A^\gamma$ on $D(A^\gamma)$

(ii) $\gamma \geq 0$, $v \in L^p(\Omega)$ とするとき

$$\|A^\gamma e^{-tA} v\|_p \leq C_3 t^{-\gamma} e^{-\lambda t} \|v\|_p \leq C_3 \varphi(t)^{-\gamma} e^{-\lambda t} \|v\|_p$$

(iii) $v \in D(A^\gamma)$ ならば $\|(e^{-tA} - I)v\|_p \leq C_4 t^\gamma \|A^\gamma v\|_p$

補題 2.2 $v \in L^p(\Omega)$, $\gamma \geq 0$ とする. $t \rightarrow 0$ とするとき

$$\varphi(t)^\gamma e^{\lambda t} \|A^\gamma e^{-tA} v\|_p \rightarrow 0$$

補題 2.3 任意の $v, w \in D(A^\alpha)$ に対し

$$\|f(v) - f(w)\|_p \leq C_5 (\|A^\alpha v\|_p + \|A^\alpha w\|_p)^{\nu-1} \|A^\alpha v - A^\alpha w\|_p$$

補題 2.4 $a \in \mathbb{R}$, $b, c \in [0, 1)$, $\rho \in (0, \infty)$ とする. $t > 0$ に対し

$$G(t) \equiv \varphi(t)^a \int_0^t \varphi(t-s)^{-b} \varphi(s)^{-c} e^{-\rho s} ds$$

と定義すると $G(t) \leq C(b, c, \rho) \varphi(t)^{1+a-b-c}$

§3. $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ の場合: 定理 1, 2 の証明

(定理 1 の証明) 補題 2.1 (ii) に注意し, 任意の $\beta \in [\theta, 1)$ に対し $\mathbb{R}^2$ 次の空間を設定する:

$$\begin{aligned} E_{\beta, T} &\equiv \left\{ u \in C((0, T]; D(A^\beta)) : \sup_{0 < t \leq T} \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta u(t)\|_p < \infty \right\} \\ &= \left\{ u : \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} u(t) \in B((0, T]; D(A^\beta)) \right\} \end{aligned}$$

$E_{\beta, T}$ は $\|u\|_{\beta, T} \equiv \sup_{0 < t \leq T} \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta u(t)\|_p$ をノルムととして Banach 空間になる. 特に $E_{\alpha, T}$ の閉球

$$B_T \equiv \left\{ u \in E_{\alpha, T} : \|u\|_{\alpha, T} \leq C \right\}$$

を考える. C, T はあとで決定する.

$u \in B_T$ に対し写像 F を次の様に定義する:

$$(3.1) \quad Fu(t) \equiv e^{-tA} \phi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s)) ds, \quad t \in (0, T]$$

(i) $A^\beta Fu(t)$ は $t \in (0, T]$ について (Hölder-) 連続であることを示す. $0 < t < t+h \leq T$ とし, $\delta \in (0, 1-\beta)$ とする. (3.1) より,

補題 2.1, 2.3, 2.4 を用い, B_T の定義に注意して

$$\begin{aligned} & \|A^\beta Fu(t+h) - A^\beta Fu(t)\|_p \\ & \leq C_3 C_4 h^\delta g(t)^{-(\beta+\delta-\theta)} e^{-\lambda t} \|A^\theta \phi\|_p \\ & \quad + \frac{C_3 C_5 C^\nu}{1-\beta} h^{1-\beta} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda t} \\ & \quad + C_6 h^\delta g(t)^{-(\beta+\delta-\theta)} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

(ii) $F: B_T \rightarrow B_T$ であることを調べる. (3.1) より

$$\begin{aligned} & g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta Fu(t)\|_p \\ & \leq g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta e^{-tA} \phi\|_p \\ & \quad + C_3 C_5 g(t)^{\beta-\theta} \int_0^t g(t-s)^{-\beta} g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda(\nu-1)s} ds \cdot \|u\|_{\alpha, T}^\nu \\ & \leq g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta e^{-tA} \phi\|_p + C_7(\beta) g(t)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} \|u\|_{\alpha, T}^\nu \end{aligned}$$

$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1) \geq 0$ であるから

$$(3.2) \quad \|Fu\|_{\beta, T} \leq \sup_{0 < t \leq T} g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^\beta e^{-tA} \phi\|_p + C_7(\beta) g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} \|u\|_{\alpha, T}^\nu$$

特に $\beta = \alpha$ とおいて

$$\begin{aligned} \|Fu\|_{\alpha, T} & \leq \sup_{0 < t \leq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^\alpha e^{-tA} \phi\|_p \\ & \quad + C_8 g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} \|u\|_{\alpha, T}^\nu \end{aligned}$$

よって

$$(3.3) \quad \sup_{0 < t \leq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^{\alpha} e^{-tA} \phi\|_p + C_8 g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} C^{\nu} \leq C$$

ならば $F: B_T \rightarrow B_T$ である.

(iii) F は B_T 上の *strictly contraction* を示す. $v, w \in B_T$ とする.

(3.1), 補題 2.1, 2.3, 2.4 より

$$(3.4) \quad \|Fv - Fw\|_{\alpha, T} \leq C_8 g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} (2C)^{\nu-1} \|v - w\|_{\alpha, T}$$

となるので

$$(3.5) \quad C_8 g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} (2C)^{\nu-1} < 1$$

となるように C, T をとれば (3.4) より示される. $\phi \in D(A^{\theta})$

だから補題 2.1 により

$$g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \|A^{\beta} e^{-tA} \phi\|_p \leq C_3 \|A^{\theta} \phi\|_p$$

$1 - \alpha\nu + \theta(\nu - 1) > 0$ の場合, (3.3) の代わりにより弱い条件

$$(3.3') \quad C_3 \|A^{\theta} \phi\|_p + C_8 g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} C^{\nu} \leq C$$

を扱う. $C > C_3 \|A^{\theta} \phi\|_p$ (例えば $C = 2C_3 \|A^{\theta} \phi\|_p$) と C をとる

と, T を小さくとることにより (3.3'), (3.5) は成り立つ.

$1 - \alpha\nu + \theta(\nu - 1) = 0$ の場合, (3.3), (3.5) は

$$\sup_{0 < t \leq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^{\alpha-\theta} e^{-tA} (A^{\theta} \phi)\|_p + C_8 C^{\nu} \leq C$$

$$C_8 (2C)^{\nu-1} < 1$$

となる. $C > 0$ を $C_8 (2C)^{\nu-1} < 1$ となるようにとり, 補題 2.2

より T を十分小さくして

$$\sup_{0 < t \leq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^{\alpha-\theta} e^{-tA} (A^{\theta} \phi)\|_p \leq C - C_8 C^{\nu}$$

を満足するようにとる.

どちらの場合でも (3.4) によつて F は B_T 上の *strictly contraction* になるから, F は B_T 内に一意の不動点 u をもち,
 $t \in (0, T]$ について (IE) を満たす. $\varphi(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} u(t) \in B((0, T]; D(A^\gamma))$.

(iv) $t=0$ における連続性を調べる. $1-\alpha\gamma+\theta(\gamma-1)>0$ の場合
 (IE), 補題 2.1, 2.3, 2.4 及び B_T の定義により

$$\begin{aligned} & \|A^\theta u(t) - A^\theta \phi\|_p \\ & \leq \|A^\theta e^{-tA} \phi - A^\theta \phi\|_p + \int_0^t \|A^\theta e^{-(t-s)A} f(u(s))\|_p ds \\ & \leq \|e^{-tA} A^\theta \phi - A^\theta \phi\|_p + C_9 \varphi(t)^{1-\alpha\gamma+\theta(\gamma-1)} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

故に任意の $\gamma \in [0, \theta]$ に対し $u \in C([0, T]; D(A^\gamma))$.

$1-\alpha\gamma+\theta(\gamma-1)=0$ の場合, $T_0 \in (0, T]$ に対し (3.2) に注意して

$$\|u\|_{\alpha, T_0} \leq \sup_{0 < t \leq T_0} \varphi(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^\alpha e^{-tA} \phi\|_p + C_8 C^{\gamma-1} \|u\|_{\alpha, T_0}$$

$C_8 C^{\gamma-1} < 1$ だから $C_{10} > 0$ が存在して

$$\|u\|_{\alpha, T_0} \leq C_{10} \sup_{0 < t \leq T_0} \varphi(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^\alpha e^{-tA} \phi\|_p$$

が成り立つ. よつて $T_0 \rightarrow 0$ のとき補題 2.2 を用いて

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|A^\theta e^{-(t-s)A} f(u(s))\|_p ds \\ & \leq C_3 C_5 C^{\gamma-1} \int_0^t \varphi(t-s)^{-\theta} \varphi(s)^{-(\alpha-\theta)\gamma} e^{-\lambda(\gamma-1)s} ds \cdot \|u\|_{\alpha, T_0} \\ & \leq C_{11} C_{10} \sup_{0 < t \leq T_0} \varphi(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^{\alpha-\theta} e^{-tA} (A^\theta \phi)\|_p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

従つて任意の $\gamma \in [0, \theta]$ に対し $u \in C([0, T]; D(A^\gamma))$.

(v) $u(t)$ の評価を求める. (3.2) に注意して

$$\|u\|_{\beta, T} \leq C_3 \|A^\theta \phi\|_p + C_7(\beta) C^\gamma$$

であるから (1.4) が成立する. 特に

$$\|A^\alpha u(t)\|_p \leq C \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)} e^{-\lambda t} \quad \text{for } t \in (0, T]$$

命題 3.1 $f(u(t))$ は $t \in (0, T]$ について Hölder 連続.

(証明) 定理 1 の証明の (i) と同様に $\beta = \alpha$ とし, $\delta \in (0, 1-\alpha)$, $0 < t < t+h \leq T$ とする.

$$\begin{aligned} & \|A^\alpha u(t+h) - A^\alpha u(t)\|_p \\ & \leq C_{12} h^\delta \varphi(t)^{-(\alpha+\delta-\theta)} e^{-\lambda t} + C_{13} h^{1-\alpha} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

従って仮定 1.2 より

$$\begin{aligned} (3.6) \quad & \|f(u(t+h)) - f(u(t))\|_p \\ & \leq C_{14} h^\delta \varphi(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} e^{-\lambda \nu t} + C_{15} h^{1-\alpha} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\lambda \nu t} \end{aligned}$$

注意 Pazy [6] により命題 3.1 から (IE) は $t \in (0, T]$ について微分可能, すなわち (P') について定理 1 が成立する.

命題 3.2 $t \in (0, T]$ に対し

$$(3.7) \quad \|A u(t)\|_p \leq C_{16} [\varphi(t)^{-(1-\theta)} + \varphi(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}] e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \|u_t(t)\|_p & \leq C_{16} [\varphi(t)^{-(1-\theta)} + \varphi(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}] e^{-\lambda t} \\ & \quad + C_5 C^\nu \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda \nu t} \end{aligned}$$

$$(証明) \quad \varphi(t)^{1-\theta} e^{\lambda t} \|A e^{-tA} \phi\|_p \leq C_3 \|A^\theta \phi\|_p$$

である. 続いて次の様に分けて考える:

$$\begin{aligned} & A \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s)) ds \\ & = \int_0^{t/2} A e^{-(t-s)A} f(u(s)) ds + \int_{t/2}^t A e^{-(t-s)A} \{f(u(s)) - f(u(t))\} ds \\ & \quad + (I - e^{-\frac{t}{2}A}) f(u(t)) \end{aligned}$$

$$\varphi(t)^{1-\theta} e^{\lambda t} \|(I - e^{-\frac{t}{2}A}) f(u(t))\|_p \leq C_{17}$$

$$\varphi(t)^{1-\theta} e^{\lambda t} \int_0^{t/2} \|A e^{-(t-s)A} f(u(s))\|_p ds \leq C_{18}$$

がわかる。(3.6)より

$$\begin{aligned} & \int_{t/2}^t \|A e^{-(t-s)A} \{f(u(s)) - f(u(t))\}\|_p ds \\ & \leq C_3 C_{13} \varphi\left(\frac{t}{2}\right)^{-(\alpha-\theta)\nu+\delta} e^{-\lambda t} \int_{t/2}^t (t-s)^{-1+\delta} e^{-\lambda(\nu-1)s} ds \\ & \quad + C_3 C_{14} \varphi\left(\frac{t}{2}\right)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\lambda t} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\lambda(\nu-1)s} ds \\ & \leq C_{19} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)\nu+\delta} e^{-\lambda t} + C_{20} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

であるから(3.7)が成立する。(3.8)は(P'), 補題2.3よりいえる。

(定理2の証明) $1 - \alpha\nu + \theta(\nu-1) > 0$ のとき: C を

$$C_8 (2C)^{\nu-1} < 1$$

を満たすようにとり, 次に ϕ を

$$C_3 \|A^\theta \phi\|_p \leq C - C_8 C^\nu$$

が成立するようにすると $\varphi(T) = 1$ として(3.3'), (3.5)が成立立つ。従って $T = \infty$ ととることができる。

$1 - \alpha\nu + \theta(\nu-1) = 0$ のとき: 上と同様に C をとり

$$\sup_{0 < t \leq T} \varphi(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \|A^\alpha e^{-tA} \phi\|_p \leq C_3 \|A^\theta \phi\|_p$$

だから

$$C_3 \|A^\theta \phi\|_p \leq C - C_8 C^\nu$$

と ϕ をとれば, T の大きさを絞る必要はない。

§4. $\operatorname{Re} \sigma(A) \neq 0$ の場合 $\sigma_1 = \sigma(A) \cap \{z: \operatorname{Re} z < 0\}$,

$\sigma_2 = \sigma(A) \cap \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ とおく. σ_1 は有限集合である.

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z - A)^{-1} dz, \quad P_2 = I - P_1$$

と定義する. 但し Γ は σ_1 を内部に含み $\sigma(A) \setminus \sigma_1$ を外部におく単純閉曲線である. $k = 1, 2$ に対して P_k は $X = L^p(\Omega)$ 上の射影作用素となる. $X_k = P_k L^p(\Omega)$ とし,

$$A_k \equiv A|_{X_k}, \quad \sigma(A_k) = \sigma_k, \quad k = 1, 2$$

として $A = A_1 + A_2$ と分解できる. X_1 は有限次元であるから, $-A_1$ は有界作用素で群 e^{-tA_1} ($t \in \mathbb{R}$) を生成し, $-A_2$ は解析的半群 e^{-tA_2} ($t \geq 0$) を生成する. (P') は

$$\begin{cases} (u_k)_t + A_k u_k = P_k f(u), & t > 0 \\ u_k(0) = \phi_k \end{cases}$$

と分解される ($k = 1, 2$). ここで $u_k = P_k u$, $\phi_k = P_k \phi$. よって (IE) は $k = 1, 2$ に対し

$$u_k(t) = e^{-tA_k} \phi_k + \int_0^t e^{-(t-s)A_k} P_k f(u(s)) ds, \quad t > 0$$

となる.

$C_{21} > 0$ を適当にとり $\tilde{A} \equiv A + C_{21} I$ と定義し, $\operatorname{Re} \sigma(\tilde{A}) > 0$ となるようにする.

次のことに注意しておく. $C_{22} > 0$, $\omega > 0$ が存在して任意の $v \in L^p(\Omega)$, $\gamma \geq 0$ に対して

$$(4.1) \quad \left. \begin{aligned} & \| \tilde{A}^\gamma e^{-t\tilde{A}} v \|_p \\ & \| \tilde{A}^\gamma e^{-tA_2} v \|_p \end{aligned} \right\} \leq C_{22} t^{-\gamma} e^{-\omega t} \|v\|_p \leq C_{22} g(t) e^{-\gamma - \omega t} \|v\|_p, \quad t > 0$$

$$\| \tilde{A}^\gamma e^{-tA_1} v \|_p \leq C_{22} e^{\omega t}, \quad t < 0$$

定理3をより詳しく述べそれを定理4.1とする. この節は定理4.1を証明する.

定理4.1 以下を満足する安定多様体 M が存在する:

$$(i) \quad M = \{ w_1 + w_2 : w_2 \in P_2 D(\tilde{A}^\theta), w_1 = \Phi(w_2), \Phi \text{ は連続} \}$$

(ii) $\phi \in M$ ならば (IE) の大域解 u が存在し

$$\| \tilde{A}^\alpha u(t) \|_p \leq C_{23} g(t)^{-(\alpha-\theta)} e^{-\omega t} \quad \text{for all } t > 0$$

$$\| \tilde{A}^\theta u(t) \|_p \leq C_{24} e^{-\omega t} \quad \text{for all } t \geq 0$$

(iii) $\phi \in M$ ならば 任意の $t \geq 0$ に対し $u(t) \in M$.

(iv) u を (IE) の大域解で (ii) の評価をもつとする.

$$\| \tilde{A}^\theta P_2 \phi \|_p \leq C_{25} \quad \text{ならば } \phi \in M \text{ である.}$$

$\psi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta)$, $t > 0$ に対して積分方程式

$$(4.2) \quad v(t) = e^{-tA_2} \psi - \int_t^\infty e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s)) ds \\ + \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s)) ds$$

を考える.

補題4.2 $\| \tilde{A}^\theta \psi \|_p$ が十分小さいとき (4.2) の大域解 $v(t; \psi)$

が存在し, $v \in C((0, \infty); D(\tilde{A}^\alpha))$ で一意的. さらに任意の

$\beta \in [\theta, 1)$ に対して

$$\|\tilde{A}^\beta v(t; \varphi)\|_p \leq C_{26}(\beta) g(t)^{-(\beta-\theta)} e^{-\omega t}, \quad t > 0$$

(証明) 定理 1 と同じ様に任意の $\beta \in [\theta, 1)$ に対して次の空間を定義する:

$$E_\beta \equiv \{v \in C((0, \infty); D(\tilde{A}^\beta)) : \sup_{0 < t < \infty} g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \|\tilde{A}^\beta v(t)\|_p < \infty\}$$

$$= \{v : g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} v(t) \in B((0, \infty); D(\tilde{A}^\beta))\}$$

E_β は $\|v\|_\beta \equiv \sup_{0 < t < \infty} g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \|\tilde{A}^\beta v(t)\|_p$ をノルムとして Banach 空間になる. E_α の閉球

$$B \equiv \{v \in E_\alpha : \|v\|_\alpha \leq C\}$$

を考え, $v \in B$ に対して写像 F を

$$(4.3) \quad Fv(t) \equiv e^{-tA_2} \varphi - \int_t^\infty e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s)) ds$$

$$+ \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s)) ds, \quad t > 0$$

と定義する.

(i) $\tilde{A}^\beta Fv(t)$ は $t \in (0, \infty)$ について (Hölder-) 連続であることを示す. 次のことに注意する:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \tilde{A}^\gamma e^{-tA_k} = e^{-tA_k} \tilde{A}^\gamma \text{ on } D(\tilde{A}^\gamma), \quad k=1, 2 \\ \|(e^{tA_1} - I)v\|_p \leq C_{27}(1 - e^{-\omega t})\|v\|_p, \quad v \in P_1 L^p(\Omega), \quad t > 0 \\ \|(e^{-tA_2} - I)v\|_p \leq C_{28} t^\gamma \|\tilde{A}^\gamma v\|_p, \quad v \in D(\tilde{A}^\gamma), \quad t > 0 \end{cases}$$

$0 < t < t+h < \infty$, $\delta \in (0, 1-\beta)$ とする.

$$\|\tilde{A}^\beta Fv(t+h) - \tilde{A}^\beta Fv(t)\|_p$$

$$\leq \|(e^{-hA_2} - I)\tilde{A}^\beta e^{-tA_2} \varphi\|_p$$

$$+ \int_t^{t+h} \|\tilde{A}^\beta e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s))\|_p ds$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t+h}^{\infty} \| (e^{hA_1} - I) \tilde{A}^{\beta} e^{-(t+h-s)A_1} P_1 f(v(s)) \|_p ds \\
& + \int_t^{t+h} \| \tilde{A}^{\beta} e^{-(t+h-s)A_2} P_2 f(v(s)) \|_p ds \\
& + \int_0^t \| (e^{-tA_2} - I) \tilde{A}^{\beta} e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s)) \|_p ds \\
& \leq C_{29} h^{\delta} \varphi(t)^{-(\beta+\delta-\theta)} e^{-\omega t} + C_{30} h^{\delta} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega t} \\
& + C_{31} h^{1-\beta} \varphi(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega t}
\end{aligned}$$

(ii) $F: B \rightarrow B$ であることを調べる. (4.3) より $v \in B$ のとき

$$\begin{aligned}
& \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \| \tilde{A}^{\beta} F v(t) \|_p \\
& \leq C_{22} \| \tilde{A}^{\theta} \varphi \|_p \\
& + C_5 C_{22} \| P_1 \| C^{\nu} \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \int_t^{\infty} e^{\omega(t-s)} \varphi(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega \nu s} ds \\
& + C_5 C_{22} \| P_2 \| C^{\nu} \varphi(t)^{\beta-\theta} \int_0^t \varphi(t-s)^{-\beta} \varphi(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega(\nu-1)s} ds
\end{aligned}$$

“ ”

$$\begin{aligned}
& \varphi(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \int_t^{\infty} e^{\omega(t-s)} \varphi(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega \nu s} ds \\
& \leq \int_0^1 s^{-(\alpha-\theta)\nu} ds + \int_1^{\infty} e^{-\omega(\nu-1)s} ds
\end{aligned}$$

また補題 2.4 より

$$\begin{aligned}
& \varphi(t)^{\beta-\theta} \int_0^t \varphi(t-s)^{-\beta} \varphi(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega(\nu-1)s} ds \\
& \leq C_{32}(\beta) \varphi(t)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} \leq C_{32}(\beta)
\end{aligned}$$

であるから

$$\| F v \|_{\beta} \leq C_{22} \| \tilde{A}^{\theta} \varphi \|_p + C_{33}(\beta) C^{\nu}$$

特に $\beta = \alpha$ とおいて

$$\| F v \|_{\alpha} \leq C_{22} \| \tilde{A}^{\theta} \varphi \|_p + C_{34} C^{\nu}$$

を得る. C のとり方として

$$(4.5) \quad C_{34} (2C)^{\nu-1} < 1$$

とし, φ を $C_{22} \|\tilde{A}^\theta \varphi\|_p \leq C - C_{34} C^\nu$ とすると $\|Fv\|_\alpha \leq C$ となわち $F: B \rightarrow B$ である.

(iii) F は B 上の *strictly contraction* であることを示す. $v, w \in B$ とする. (4.3) より

$$\|Fv - Fw\|_\alpha \leq C_{34} (2C)^{\nu-1} \|v - w\|_\alpha$$

(4.5) より示すことができた. F は B 内に一意の不動点 v をもち (4.2) を満足する. $g(t)^{\alpha-\theta} e^{wt} v(t) \in B((0, \infty); D(\tilde{A}^\alpha))$.

上の計算からわかるように

$$\|v\|_\beta \leq C_{22} \|\tilde{A}^\theta \varphi\|_p + C_{33}(\beta) C^\nu$$

特に $\beta = \alpha$ のとき $t > 0$ に対し

$$\|\tilde{A}^\alpha v(t)\|_p \leq C g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-wt}$$

また $\beta = \theta$ のとき $t \geq 0$ に対し

$$(4.6) \quad \|\tilde{A}^\theta v(t)\|_p \leq (C_{22} \|\tilde{A}^\theta \varphi\|_p + C_{35} C^\nu) e^{-wt}$$

補題 4.3 $v(t; \varphi)$ は

$$\begin{cases} u_t + Au = f(u) \\ u(0) = \varphi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s; \varphi)) ds \end{cases}$$

を満足する.

(証明) 積分方程式として考える. (4.2) を変形して

$$v(t) = e^{-tA_1} P_1 \left(\varphi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s)) ds \right)$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-tA_2} P_2 \left(\varphi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s)) ds \right) \\
& + \int_0^t e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s)) ds \\
& + \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s)) ds
\end{aligned}$$

多様体 M , $M(C)$ を

$$M = \left\{ \varphi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s; \varphi)) ds : \begin{array}{l} \varphi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta) \\ v : (4.2) \text{ の解} \\ \|v\|_\alpha : \text{有界} \end{array} \right\}$$

$$M(C) = \left\{ \varphi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s; \varphi)) ds : \begin{array}{l} \varphi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta) \\ C_{22} \|\tilde{A}^\theta \varphi\|_p \leq C - C_{24} C^\nu \\ v : (4.2) \text{ の解, } \|v\|_\alpha \leq C \end{array} \right\}$$

と定義する. 明らかに $0 \in M(C) \subset M$.

補題 4.4 $u(t; \phi)$ を (IE) $((P'))$ の大域解とする.

(i) $\phi \in M$ ならばすべての $t \geq 0$ に対し $u(t; \phi) \in M$.

(ii) $\phi \in M(C)$ ならば $T_1 \in [0, \infty)$ が存在してすべての $t \geq T_1$ に対し $u(t; \phi) \in M(C)$.

(証明) $\phi \in M$ とする. $\varphi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta)$ とし

$$\phi = \varphi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s; \varphi)) ds$$

と表される. (P') の解は B 一意である. 補題 4.3 より任意の

$t \geq 0$ に対し $u(t; \phi) = v(t; \varphi)$. $\tau > 0$ を任意にとり固定し

$t \geq 0$ に対し

$$w(t) \equiv v(t + \tau; \varphi)$$

と定義する.

$$\begin{aligned}
 w(t) &= e^{-(t+\tau)A_2} \varphi \\
 &\quad - \int_{t+\tau}^{\infty} e^{-(t+\tau-s)A_1} P_1 f(v(s; \varphi)) ds \\
 &\quad + \int_0^{t+\tau} e^{-(t+\tau-s)A_2} P_2 f(v(s; \varphi)) ds \\
 &= e^{-tA_2} \left\{ e^{-\tau A_2} \varphi + \int_0^{\tau} e^{-(\tau-s)A_2} P_2 f(v(s; \varphi)) ds \right\} \\
 &\quad - \int_{t+\tau}^{\infty} e^{-(t+\tau-s)A_1} P_1 f(v(s; \varphi)) ds \\
 &\quad + \int_{\tau}^{t+\tau} e^{-(t+\tau-s)A_2} P_2 f(v(s; \varphi)) ds \\
 &= e^{-tA_2} \left\{ e^{-\tau A_2} \varphi + \int_0^{\tau} e^{-(\tau-s)A_2} P_2 f(v(s; \varphi)) ds \right\} \\
 &\quad - \int_t^{\infty} e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s+\tau; \varphi)) ds \\
 &\quad + \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s+\tau; \varphi)) ds
 \end{aligned}$$

よって w は (4.2) の φ の代わりに $P_2 v(t; \varphi)$ としたものを満足する. すべての $t \geq 0$ に対して

$$v(t+\tau; \varphi) = w(t) = v(t; P_2 v(\tau; \varphi))$$

従って

$$\begin{aligned}
 u(\tau; \phi) &= v(\tau; \varphi) = w(0) \\
 &= P_2 v(\tau; \varphi) - \int_0^{\infty} e^{sA_1} P_1 f(v(s; P_2 v(\tau; \varphi))) ds
 \end{aligned}$$

また $P_2 v(\tau; \varphi) \in P_2 D(\tilde{A}^{\theta})$ である. よって (i) が成立する.

$u(t; \phi) = v(t; \varphi)$ だから u も補題 4.2 の評価 (4.6) を満足する. よって $T_1 \in [0, \infty)$ が存在して

$$C_{22} \|\tilde{A}^{\theta} P_2 v(t; \varphi)\|_p \leq C - C_{34} C^{\nu}, \quad t \geq T_1$$

とすることができ, (ii) が成り立つ.

補題 4.5 u は (IE) (P') の大域解で, 補題 4.2 と同じ評価をもつとする. $C_{22} \|\tilde{A}^\theta P_2 \phi\|_p \leq C - C_{34} C^\nu$ ならば,
 $\phi \in M(C)$ である.

$$(\text{証明}) \quad P_1 u(t) = e^{-tA_1} P_1 \phi + \int_0^t e^{-(t-s)A_1} P_1 f(u(s)) ds$$

(4.1) 及 u $e^{sA_1} P_1 f(u(s))$ は $(0, \infty)$ 上で可積分であるから

$$e^{tA_1} P_1 u(t) = P_1 \phi + \int_0^t e^{sA_1} P_1 f(u(s)) ds \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

従って

$$P_1 \phi = - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(u(s)) ds$$

でなくともならない. $u(t; \phi) = v(t; \psi)$ から

$$\phi = v(0; \psi) = \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s; \psi)) ds$$

また $P_2 \phi = \psi$ より $\phi \in M(C)$ である.

なお $\psi_1, \psi_2 \in P_2 D(\tilde{A}^\theta)$ とし, $v_1(t; \psi_1), v_2(t; \psi_2)$ を
 (4.2) の大域解とすると

$$\|v_1 - v_2\|_\alpha \leq C_{36} \|\tilde{A}^\theta \psi_1 - \tilde{A}^\theta \psi_2\|_p$$

となり定理 4.1 (i) がいえる.

命題 4.6 $v \in B$ を (4.2) の大域解とし, $0 < t < t+h < \infty$,
 $\delta \in (0, 1-\alpha)$ とする.

$$(i) \quad \|\tilde{A}^\alpha v(t+h) - \tilde{A}^\alpha v(t)\|_p \\
\leq C_{37} h^\delta \left[g(t)^{-(\alpha+\delta-\theta)} + g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} \right] e^{-\omega t}$$

$$+ C_{38} h^{1-\alpha} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega t}$$

$$(ii) \quad \| f(v(t+h)) - f(v(t)) \|_p$$

$$\leq C_{39} h^\delta \left[g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} \right] e^{-\omega\nu t} \\ + C_{40} h^{1-\alpha} g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\omega\nu t}$$

$$(iii) \quad \| \tilde{A} v(t) \|_p$$

$$\leq C_{41} \left[g(t)^{-(1-\theta)} + g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} \right] e^{-\omega t}$$

以上の結果の証明などの詳細は Hoshino - Yamada [11] を参照していただきたい。

文 献

1. A. Friedman; Remarks on nonlinear parabolic equations, Proc. Symp. Appl. Math. 17 (1965), 3-23.
2. Y. Hashimoto, Y. Niikura and Y. Yamada; Stability and instability for semilinear parabolic equations with free boundary conditions, Nonlinear Analysis 8 (1984), 683-694.
3. D. Henry; Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
4. M. Ito; The conditional stability of stationary solutions for semilinear parabolic differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 25 (1978), 263-275.

5. H. Kielhöfer; On the Lyapunov-stability of stationary solutions for semilinear parabolic differential equations, J. Differential Equations 22 (1976), 193-208.
6. A. Pazy; A class of semi-linear equations of evolution, Israel J. Math. 20 (1975), 23-36.
7. A. Pazy; Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Appl. Math. Sci. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
8. F. Rothe; Global Solutions Of Reaction-Diffusion Systems, Lecture Notes in Math. 1072, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
9. 田辺広城 関数解析 上, 下 実教出版, 1978, 1981.
10. F. Weissler; Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p , Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), 79-102.
11. H. Hoshino and Y. Yamada; Global solutions for semilinear parabolic equations of higher order. (準備中)