

## 接ホモトピー同値について

金沢大理 石本浩康 (Hiroyasu Ishimoto)

$M_1, M_2$  を単連結  $m$  次元  $C^\infty$ -多様体 ( $m \geq 5$ ),  $\tau M_i$  ( $i=1, 2$ ) をそれぞれの接バンドルとする。ホモトピー同値写像  $f: M_1 \rightarrow M_2$  が存在して,  $\tau M_1 \oplus \varepsilon \cong f^*(\tau M_2) \oplus \varepsilon$  となるとき,  $M_1$  と  $M_2$  は接ホモトピー同値 (tangentially homotopy equivalent) であるという。次の命題を考える。

命題.  $M_1$  と  $M_2$  が接ホモトピー同値ならば,  $M_1$  と  $M_2$  は同相である。

勿論, 一般にはこの命題には反例が存在する。例えば, [8] p.481 には, 17-連結 49 次元  $\pi$ -多様体で, その様な反例を幾つでも作り得ることが示されている。また, 命題の逆も一般には成立しないことは, Pontrjagin 類が位相不変量とは限らない例からも明らかである。しかし, 以下の色々な例で見るように, 実際に成立する場合も沢山ある。そこで,

問題. 上の命題がどんな範囲ならば成立するか見極めること, つまり, 具体的には命題が成立するなるべく広い範囲を見つけ出すこと。

が当然問題となる。

今までに, 次の結果が知られている:

- (1)  $M_1, M_2$  が 5次元単連結多様体ならば, 命題は成立し,  $M_1$  と  $M_2$  は微分同相である。(Barden [1]).
- (2)  $M_1, M_2$  が 6次元単連結多様体で 2次元ホモロジー群が torsion free ならば, 命題は成立し,  $M_1$  と  $M_2$  は微分同相である。(Jupp [6]).
- (3)  $M_1, M_2$  が 2-連結 7次元多様体で 3次元ホモロジー群が 2-torsion を持たなければ, 命題は成立し,  $M_1$  と  $M_2$  は  $\theta_7$  を法として微分同相である (i.e.  $\exists \Sigma \in \theta_7, M_1 = M_2 \# \Sigma$ ). (Wilkins [9]).
- (4)  $M_1, M_2$  が  $(n-1)$ -連結  $2n$ 次元多様体 ( $n \geq 3$ ) ならば, 命題は成立し,  $M_1$  と  $M_2$  は  $\theta_{2n}$  を法として微分同相である。(Lashof [7]).
- (5)  $M_1, M_2$  が  $(n-1)$ -連結  $(2n+1)$ 次元多様体 ( $n \geq 3$ ) で,  $n = 2^l - 2$  のときには  $n$ 次元ホモロジー群に  $\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/4$  直和成分を持たないとする。このとき, 命題は成立する。(Madsen-

-Taylor-Williams [8]).

(6)  $|\theta(M)|$  を  $M^m$  と接ホモトピー同値な  $m$ -多様体の homeo-types の数とする。(従って,  $|\theta(M)|=1 \Leftrightarrow$  命題が成立)。

$M$  が  $C$ -連結,  $C \geq (m+1)/3$  ( $m \geq 5$ ) ならば,

$$|\theta(M)| \leq \sum_{i \geq 1} |H^{2i-2}(\dot{M}; \mathbb{Z}/2)|$$

ここに,  $\dot{M} = M - (\text{open } m\text{-disk})$  である。(Madsen-Taylor-Williams [8])。

(6)の連結性は少しきついが, もう少し弱い条件で命題が成立する場合もある。例えば,

(7)  $M_1, M_2$  が 3-連結 10次元  $\pi$ -多様体で, 4次元ホモロジー群は torsion free とする。このとき, 命題は成立し,  $M_1$  と  $M_2$  は  $\Theta_{10}$  を法として微分同相である。(石本[4])。

この他にも,  $(n-2)$ -連結  $2n$ 次元多様体 ( $n \geq 4$ ), 或いは  $(n-3)$ -連結  $(2n-1)$ 次元多様体 ( $n \geq 6$ ) に関して, 適当な条件の下に 命題 が 成立する場合が 石本[2],[3]に散見される。

命題が成立する可能性の高いものとして, 次を考える:

問題.  $M$  を単連結  $m$ 次元  $C^\infty$ -多様体,

$$H_i(M) = 0 \quad (i \neq 0, p, q = m-p, m)$$

$2p > q > 1$  (metastable),  $p < q-1$  とする。

$M$  のような 2 つの多様体  $M_1, M_2$  に対して, 命題は成立するか.

もし,  $\pi M$  が  $M$  の  $p$ -切片上で自明ならば,  $M$  は  $\Theta_m$  を法として適当なハンドル体  $W \in \mathcal{H}(m+1, r, q)$  ( $r = \text{rank } H_p(M)$ ) の境界  $\partial W$  と見なせるから, その時には,  $M$  は  $S^q$  上の  $S^p$ -バンドルの連結和に比較的近い存在である.  $M_1, M_2$  が cross-section をもつ  $S^q$  上の  $S^p$ -バンドルの連結和の場合に, 上の問題を検証して見ると, 次の (i) ~ (V) に対して特殊な場合を除いて命題が成立し,  $M_1$  と  $M_2$  は  $\Theta_m$  を法として微分同相になる. (石本・三吉 [5]). 特殊な場合とは, (iii), (iv), (v)

| $(p, q)$                          | 連結性         | $M_1, M_2$ の次元 |
|-----------------------------------|-------------|----------------|
| (i) $(n-1, n+1)$ ( $n \geq 4$ )   | $(n-2)$ -連結 | $2n$ -次元       |
| (ii) $(n-2, n+1)$ ( $n \geq 6$ )  | $(n-3)$ - " | $(2n-1)$ - "   |
| (iii) $(n-3, n+1)$ ( $n \geq 8$ ) | $(n-4)$ - " | $(2n-2)$ - "   |
| (iv) $(n-4, n+1)$ ( $n \geq 10$ ) | $(n-5)$ - " | $(2n-3)$ - "   |
| (v) $(n-5, n+1)$ ( $n \geq 12$ )  | $(n-6)$ - " | $(2n-4)$ - "   |

において,  $n = 2^l - 1$  ( $l \geq 4$ ) のときには,  $M_1$  と  $M_2$  が  $\Theta_m$  を法として微分同相にならない例が存在する. しかし, これは同相になる為の反例ではない.

## 参 考 文 献

- [1] Barden, D., Simply connected five-manifolds, *Ann. of Math.*, **82**(1965), 365-385.
- [2] Ishimoto, H., On the classification of  $(n-2)$ -connected  $2n$ -manifolds with torsion free homology groups, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, **9**(1973), 211-260.
- [3] ———, On the classification of some  $(n-3)$ -connected  $(2n-1)$ -manifolds, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, **11**(1976), 723-747.
- [4] ———, On 3-connected 10-dimensional manifolds, *Proc. Japan Acad.*, **66A** (1990), 165-168.
- [5] ——— and K. Miyoshi, On certain manifolds which are tangentially homotopy equivalent, *Sci. Rep. Kanazawa Univ.*, **30**(1985), 1-13.
- [6] Jupp, P., Classification of certain 6-manifolds, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **73**(1973), 293-300.
- [7] Lashof, R. K., Some theorems of Browder and Novikov on homotopy equivalent manifolds with an application, Notes prepared by Rudolfo de Sapio, Chicago.
- [8] Madsen I., L. R. Taylor, and B. Williams, Tangential homotopy equivalences, *Comment. Math. Helvetici*, **55**(1980), 445-484.
- [9] Wilkens, D.L., Closed  $(s-1)$ -connected  $(2s+1)$ -manifolds,  $s=3,7$ , *Bull. London Math. Soc.*, **4**(1972), 27-31.