

志村多様体の Arithmetic Geometry と modular form への応用

東大理 藤原 一宏

§0. Introduction.

この報告では、志村多様体の Arithmetic Geometry を $\mathbb{Z}$ 上の arithmetic model の理論, compact 化理論に重点を置き解説を試みる.

複素数体上の理論の類似としての $\mathbb{Z}$ 上の toroidal compactification (arithmetic toroidal compactification) の必要性は 常々指摘され続けてきたことであるが、その満足すべき理論が与えられたのは Siegel modular variety に限っても比較的最近のことであり ([Chai], [Fa], [Chai-Fa]) 残っている問題も多い. (例えば 例外型の群に対応する case で arithmetic compactization が作れる case は 現在知られていないように思う.)

現在では筆者が修士論文において発展させた結果により、志村先生により最初に扱われた case の大部分が扱えるようになった ([Fu1], [Fu2]). そこで前半部では扱う多様体の基本性質及びその toroidal compactification の基本性質を述べる. 後半部ではその応用として得られる基本的な定理について述べる.

特に、整係数 Fourier 係数をもつ modular form に対する有限性は toroidal compact 化の存在を仮定すれば自明となることは特筆すべきであろう。

以上の理論構成は reduction の研究, Fourier 係数の合同性の研究のための基本的手法となっていくと思われる。

この報告中最も基本的である arithmetic toroidal compact 化の存在証明は [Fu2] に与えられているが、証明は複雑でありここでは述べきれない。ご容赦願いたい。

$$\text{記号: } \mathbb{Z}^\wedge = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \quad p\text{-adic のとき } \mathbb{Z}^p = \varprojlim_{(p,n)=1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell.$$

$$\mathbb{A}^f = \mathbb{Q} \text{ の有限 アーベル環 } = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

$$\mathbb{A}^{f,p}: \mathbb{A}^f \text{ の } p\text{-以外成分} \quad \mathbb{A}_p^f = \mathbb{Q}_p \quad \mathbb{A}^f = \mathbb{A}^{f,p} \mathbb{A}_p^f.$$

$$G/\mathbb{Q}: \text{連綿代数群のとき} \quad G^{\text{der}} = [G, G] \text{ 導来群} \quad G^{\text{ad}}, \text{ 商群}$$

$$K: G(\mathbb{A}^f) \text{ の compact 開部分群のとき} \quad K^p = G(\mathbb{A}^{f,p}) \cap K, \quad K_p = G(\mathbb{Q}_p) \cap K$$

$$K = K^p K_p. \quad A/S: \text{abelian scheme のとき}$$

$$A[n] = \ker(A \xrightarrow{n} A). \quad \text{Tate module } \mathbb{T}$$

$$\mathbb{T}^p(A/S) = \varprojlim_{(n,p)=1} A[n] \quad \mathbb{T}_p(A/S) = \varprojlim_n A[p^n] \quad \mathbb{T}(A/S) = \mathbb{T}^p \cdot \mathbb{T}_p.$$

目次

§0. Introduction, 記号.

§1. Arithmetic model of Shimura varieties

1.1 数体上の理論 = canonical model の理論

1.2 $\mathbb{Z}$ 上の model の理論

§2 boundary の構成 (準備) mixed Shimura variety

§3 Arithmetic toroidal compactification

3.1 ~ 3.3

§4. Applications.

4.1 modular form の定義及び性質

4.2 Fourier-Jacobi 展開

4.3 Deligne-Ribet の定理

§1. Arithmetic model of Shimura varieties

§1.1 数体上の理論 = canonical model の理論

以下我々おとり扱う志村多様体を定義する. (cf. [Sh], [De1])

L を $\mathbb{Q}$ 上の semi-simple algebra で, 正の対合 $*$ をもつもの.

V を L の faithful, $\mathbb{Q}$ 上有限次の表現空間で 条件

$$\phi(\ell x, y) = \phi(x, \ell^* y) \quad \forall x, y \in V, \forall \ell \in L$$

を満たす 非退化交代型式 $\phi: V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$ をもつものとし,

以下これを固定する.

簡約可能群 $G/\mathbb{Q}$ を

$$G = \text{the group of } L\text{-linear symplectic similitudes of } (V, \phi)$$

$$= \{ g \in GL_L(V) : \begin{array}{l} \phi(gx, gy) = \mu(g) \phi(x, y) \\ \exists \mu(g) \in \mathbb{Q}^\times \end{array} \}$$

と定義する. $\mathbb{R}$ -torus $S_{\mathbb{R}}$ を $S_{\mathbb{R}} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}, \mathbb{Q}}$ (Weil restriction) とし, X を

$X = \{ \mathbb{R}\text{-群準同型 } S_{\mathbb{R}} \xrightarrow{h} G_{\mathbb{R}} \text{ で } h \text{ が } V_{\mathbb{R}} \text{ に引きおこす } S_{\mathbb{R}} \text{ の表現 } \rho_h \text{ は } V_{\mathbb{R}} \text{ 上 type } \{(-1, 0), (0, +1)\} \text{ の Hodge 構造を定義し, さらに } \rho_h \text{ は Hodge 構造としての偏極を与える} \}$

と定義すると X には自然に複素構造が入り, 連結成分は有界対称領域になる.

($h_0 \in X$ を固定し. $K_\infty = h_0$ の $G(\mathbb{R})$ 内での centralizer とすると $K_\infty \cap G^{\text{der}}(\mathbb{R})$ は $G^{\text{der}}(\mathbb{R})$ の極大 compact 部分群

$$G(\mathbb{R})/K_\infty \supseteq X, \quad)$$

$$g \bmod K_\infty \mapsto g^{-1} h_0 g$$

この (G, X) の組は、以下のように (non-connected) 志村多様体を定義する:

$K \subset G(\mathbb{A}^f)$ を compact open subgroup とするとき

$$\begin{aligned} \text{Sh}_K(G, X)/\mathbb{C} \\ &= K \backslash G(\mathbb{A}^f) \times X / G(\mathbb{Q}) = K \times K_\infty \backslash G(\mathbb{A}) / G(\mathbb{Q}). \\ &= X \times (K \backslash G(\mathbb{A}^f)) / G(\mathbb{Q}). \end{aligned}$$

$$\text{Sh}(G, X)/\mathbb{C} = \varprojlim_K \text{Sh}_K(G, X)/\mathbb{C}.$$

各 $\text{Sh}_K(G, X)$ は $X/P_{\bar{g}}$ $\Gamma_{\bar{g}} = \bar{g}^{-1} K \bar{g} \cap G(\mathbb{Q})$ $\bar{g} \in K \backslash G(\mathbb{A}^f)$ の形の有界対称領域の算術的商の有限和であり、従って標準的に複素代数多様体の構造をもつ (K が neat なる非特異である).

射影極限 $\text{Sh}(G, X)/\mathbb{C}$ は有限型であるので必ずしも扱いはよくないが、finite adèle 化 $G(\mathbb{A}^f)$ の作用をもつという利点がある.

example 1.1.1 (Siegel modular case, degree g)

$L = \mathbb{Q}$, $V_{\mathbb{Z}}$: rank $2g$ の自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $\phi_{\mathbb{Z}}$: perfect skew-symmetric form: $\phi_{\mathbb{Z}}: V_{\mathbb{Z}} \times V_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}$.

$$(V, \phi) = (V_Z, \phi_Z) \otimes \mathbb{Q}$$

このとき $G = \mathrm{GSp}(2g)_{\mathbb{Q}}$

$$X = \text{double Siegel upper half plane}$$

$$\simeq \{ Z = X + Y\sqrt{-1}, {}^t Z = Z, Z \in M_{2g}(\mathbb{C}) = \{2g \times 2g \text{ 行列} \}$$

$$Y = \mathrm{Im} Z \text{ は定符号 } \}$$

$$= \mathfrak{H}_g^+ \sqcup \mathfrak{H}_g^-$$

特に $g=1$. $G = \mathrm{GL}_2_{\mathbb{Q}}$. $X = \mathcal{H}^+ \sqcup \mathcal{H}^- = \text{double Poincaré upper half plane}$. のときは古典的 $\mathfrak{elliptic modular case}$.

代数多様体 $\mathrm{Sh}(G, X)/\mathbb{C}$ は a priori には $\mathbb{C}$ 上の多様体であるが、実は reflex field と呼ばれる標準的に定まる代数体 $E = E(G, X)$ があり、 E 上の canonical model と呼ばれる $G(\mathbb{A}^f)$ 作用を持つ model $\mathrm{Sh}(G, X)/E$ が存在する. ([DMOS], [Mi])

この事実、志村先生により発見及び追求され、その後 Deligne の研究を経て Milne により最も一般の組 (G, X) について確立された。

E 上の model が canonical であるときには $G(\mathbb{A}^f)$ 作用を持つこと、他に special points と呼ばれる $\mathrm{Sh}(G, X)/\mathbb{C}$ の点は E 上代数的となり $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ の作用は完全に記述される. ([Sh], [De 1, 2], [Mi]) この意味で canonical model の理論は Hilbert の第 12 問題に対する部分的解答を与えるものである。

我々が扱う (G, X) に対しては canonical model は abel 多様体に

に対する適切な moduli problem の解 として構成され, special point は CM abel 多様体に相当する点となり Galois 群の作用は 志村-谷山の CM abel 多様体の理論により決定される. (1.2 参照)

この場合の reflex field E は $\mathbb{Q}$ を $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ の中の L -stable, totally maximal isotropic な $\mathbb{Q}$ -subspace とするとき $E = \mathbb{Q}(\text{tr}_{\mathbb{Q}} l, l \in L)$ で定められる.

§ 1.2 $\mathbb{Z}$ 上の model の理論

ここでは 1.1 に定義された (G, X) に対して $\mathbb{Z}$ 上の model を定義する. Zink, Langlands-Rapoport ([Z], [La-Ra]) を参照されたい. ただし, 我々の場合に限, ても全ての素数 p 上でのよい model がとれるかどうかわからず, (level structure の問題), 一般の (G, X) についての理論は知られている.

しかし, 志村多様体が $\mathbb{Z}$ 上の canonical model を持つことを期待するのは非常に自然であり, Grothendieck による motif の哲学とも match する.

1.2.1. 以下では (G, X) に対し以下の仮定をおく

*) $G_{\mathbb{R}}^{\text{der}}$ の $\mathbb{R}$ -simple factor は全て A 型及び C 型.

さらに素数 p は Zink [Z] の意味で $\hat{K}$ good であるとき good といわれる ($K \subset G(\mathbb{A}^f)$: a compact open). $\hat{K}$ に対し

難いといふと $k = (p \text{ 以外の成分}) \cdot (p \text{ 成分}) = k^p \cdot k_p$ としたときに
 k_p が $G(\mathbb{Q}_p)$ の maximal hyperspecial subgroup になる感じである。
 このとき $\mathfrak{f}$ を p 上の E の素 ideal として ($\mathbb{Q}_E$: E の整数環 $\mathbb{O}_{E,\mathfrak{f}}$:
 $\mathfrak{f}$ での付値環) $\mathbb{O}_{E,\mathfrak{f}}$ 上の moduli problem を

$\mathbb{O}_{E,\mathfrak{f}}$ -スキーム S に対し

$\mathcal{A}(S) = \{ S \text{ 上の abelian scheme } A/S \text{ up to prime to } p$
 $\text{isogeny } \mathcal{O}_L\text{-multiplication をもち}$

a) (Hodge filtration の rigidification)

$$\mathrm{Tr}(\ell, L|_{A/S}) = t(\ell) \quad \forall \ell \in L_2$$

$$t(\ell) = \mathrm{tr}(\ell: V_{\mathbb{Q}}/\mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$$

b) ($\ast$ -polarization に対する条件)

A/S の 同次偏極 p で, Rosati involution σ on L 上 $\ast$ を引きお
 こし, p と素な degree の非同次偏極を含むもの

c) (Tate module の rigidification)

$\bar{s}$ を S の geometric point とするとき $\pi_1(S, \bar{s})$ -加群 $T^p(A)_{\bar{s}}$

と $V \otimes \mathbb{A}^{f,p}$ との同型

$$k: T^p(A)_{\bar{s}} \xrightarrow{\sim} V \otimes \mathbb{A}^{f,p}$$

の mod k^p の類 $k \bmod k^p$. ($\pi_1(S, \bar{s})$ の $GL(T^p(A)_{\bar{s}}) \subset GL(V \otimes \mathbb{A}^{f,p})$

内の image $\subset k^p$ を要求).

という a) ~ c) の data との組 (A, p, k) のなす圏. }

として設定する. すると

定理 1.2.1 ([Zink], [La-Re]).

この moduli problem $\mathcal{X}/\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ は $\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ 上の smooth, 有限型の algebraic stack (k : 十分小さなスキーム) により表現可能である.

(この手の問題を扱うためには algebraic stack の概念を利用することは いよいよ本質的である.

つまり, 我々の " $\mathfrak{p}$ が k に対し good" という仮定からは bad reduction の case は現れない.

上の定理では model は $\mathfrak{p}$ での局所環 $\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ 上でしか定義されていないが, 大域化は容易で

Proposition 1.2.2 $k \subset G(\mathbb{A}^f)$: compact open

$n_k = \prod (\text{bad primes for } k)$ とすると $\mathcal{O}_E[\frac{1}{n_k}]$ 上の smooth model $\mathcal{X}/\mathcal{O}_E[\frac{1}{n_k}]$ があり, 各局所環上で上述の moduli interpretation をもつ

以下, $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ で universal な abelian scheme を表わすこととする.

特に, この $\mathcal{X}$ を E 上で考えれば $\mathcal{X}_E = \mathrm{Sh}_k(G, X)/E$ は 1.1 で述べた canonical model となる moduli 的解釈が可能ならば canonical model の構成は極めて見通しよいのである.

example 1.2.3 (Siegel modular case)

$G = \mathrm{GSp}(2g)_{\mathbb{Q}}$, $X = \text{double Siegel upper half plane}$.

$V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^{2g}$, $\phi_{\mathbb{Z}}$: standard pairing. reflex field = $\mathbb{Q}$

このとき $n \geq 1$ に対して $K_n \subset G(\mathbb{A}^f)$ を

$$K_n = \{ (g-1)V_{\mathbb{Z}} \subset n \cdot V_{\mathbb{Z}}, g \in G(\mathbb{A}^f) \}$$

と定義する. このとき $\mathrm{Sh}_{K_n}(G, X)/\mathbb{Q}$ の arithmetic model $/\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ は次のように定義される:

moduli problem $\mathcal{A}_{g,n}/\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ は $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ -scheme S に対し

$\mathcal{A}_{g,n}(S) = \{ \text{相対次元 } g \text{ の主偏極 abelian scheme } A/S \text{ with a level } n\text{-structure} \}$

ただし, level n -structure とは $A[n] = \mathrm{Ker}(A \xrightarrow{[n]} A)$ とするとき

同型 $\lambda: (A[n], \text{Weil pairing}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}, \text{standard pairing})$

のこととする. (この定義はとても naive なの. n が S 上可逆になるとまづいかる)

$\mathcal{A}_{g,n}/\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ は smooth, 相対次元 $\frac{g(g+1)}{2}$ の algebraic stack ($n \geq 3$ なら scheme) で, $\mathbb{Q}$ 上の連結成分は全て $\mathcal{O}_g/P(n)$ の形. 但し,

$P(n) = \{ g \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) : g \equiv 1 \pmod{n} \}$. 連結成分: $\varphi(n)$ 個.

$\mathcal{A}_{g,n} \rightarrow \mathcal{A}_{g,1}/\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ (level structure を忘れる写像) は群

$\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ による Galois covering であり. $\mathcal{A}_{g,n}/\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 内 $\mathcal{A}_{g,1}/\mathbb{Z}$ の

normalization をとれば $\mathcal{A}_{g,n}$ の $\mathbb{Z}$ 上の model $\mathcal{A}_{g,n}/\mathbb{Z}$ を得る. これは良い性質をもたすべきだと思われるが, 定義に normalization という

わかりづらい操作を含んでおり, moduli-interpretation もないため, あまりよくわからない. ただし $g=1$, elliptic modular case ではかなりのことが知られている ([Ka-Ma]).

$\mathcal{A}_{1,1}$ は elliptic curve に対しその j -invariant を対応させることで

$$\mathcal{A}_{1,1} \text{ に付随する coarse space } \Rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$$

$$E \longmapsto j(E)$$

をひきおこす. また, Drinfeld による良い level structure が知られており

$\mathcal{A}_{1,n}$ は regular scheme になることもわかっている.

この他にも, Hilbert-Blumenthal variety, $\mathbb{Q}$ 上の Shimura curve, Weil による虚二次体の整数環で虚数乗法をもつ abel 多様体の family などが例となる.

§2: boundary の構成. --- mixed Shimura variety

Toroidal compact 化の boundary 近くを分析するために reductive と限らない parabolic subgroup に対しても志村多様体の類似を考える. arithmetic な立場からは Brylinski [Bry1] により generalized Shimura variety の名で導入された. ここでは mixed Shimura variety と呼ぶことにする.

$W \subset V$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された L -stable, totally isotropic subspace とす

る (以下, rational boundary component と呼ぶ).

$P_W = \{ g \in G, gW \subset W \}$ とすると P_W は $\mathbb{Q}$ -rational, 真に極大の
放物部分群 とする.

$U_W \subseteq P_W$ の unipotent radical, $Z_W \subseteq U_W$ の center,

L を ある Levi factor とし, $G_W = \text{Ker} (L \rightarrow \text{Aut } Z_W)$
 $\downarrow$
 $g \mapsto \text{ad } g|_{Z_W}$

とすると Z_W は vector 群で

$$Z_W \cong N_W \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}a$$

$$N_W = \{ \text{対称形式 } \rho : W \times W \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$\rho(\ell x, y) = \rho(x, \ell^k y) \quad \forall \ell \in L, \forall x, y \in V \}$$

$$\text{Im} (L \rightarrow \text{Aut } Z_W) \cong GL(W) \quad (N_W \text{ への自然な作用から induced)}$$

$$\text{となり } L \cong G_W \times GL(W),$$

G_W は $(W^\perp/W, \rho|_{W^\perp/W})$ から §1.1 の方式で定
義される reductive 群.

を明らかにす.

$$\text{そこで } \widetilde{X}_W = P_W(\mathbb{R}) \cdot Z_W(\mathbb{C}) / K_\infty \cap P_W(\mathbb{C})$$

とおくと (Z_W のところだけ複素化することに注意)

$$\widetilde{X}_W = X_W \times \text{Lie}(U_W/Z_W)\mathbb{R} \times (\text{Lie } Z_W)\mathbb{C}$$

(hermitian
sym. dom. of hermitian) $\times$ ($\mathbb{R}$ -vect. sp) $\times$ ($\mathbb{C}$ -vect. sp)

但し X_W, G_W に対応する対称領域

(X は自然に $\widetilde{X}_w$ に開埋入され, Piatetski-Shapiro による第3種 Siegel 領域としての実現になる)

そこで $(P_w, \widetilde{X}_w)$ に対する mixed Shimura variety $\mathcal{S}(\widetilde{K}_w \subset P_w(\mathbb{A}^f))$

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{\widetilde{K}_w}(P_w, \widetilde{X}_w) = (\widetilde{X}_w \times (\widetilde{K}_w \backslash P_w(\mathbb{A}^f)))/P_w(\mathbb{Q})$$

$$\mathcal{S}(P_w, \widetilde{X}_w) = \varprojlim_{\widetilde{K}_w} \widetilde{\mathcal{S}}_{\widetilde{K}_w}(P_w, \widetilde{X}_w)/\mathbb{C}$$

と定義すると, これは次のような構造をもつ:

a) $\widetilde{\mathcal{S}}_{\widetilde{K}_w}(P_w, \widetilde{X}_w)/\mathbb{C}$ は ある多様体 Y_w 上の torus J_w を fiber とする torus bundle である. ただし, torus J_w は

$$J_w = \mathrm{Gm}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} (Z_w(\mathbb{Q}) \cap \widetilde{K}_w)$$

で定義される.

b) Y_w は (G_w, X_w) から作った志村多様体 $\mathcal{S}_{K_w}(G_w, X_w)$ 上の abelian scheme の構造をもつ. 但し $K_w = \widetilde{K}_w \cap G_w(\mathbb{A}^f)$ とし, fiber の abel 多様体の 1次元 homology 群は $(U_w/Z_w)(\mathbb{Q}) \cap \widetilde{K}_w$ と同型である.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{S}}_{\widetilde{K}_w}(P_w, \widetilde{X}_w) & & \\ \downarrow J_w\text{-torson} & & \\ Y_w & \xrightarrow{\text{abelian scheme}} & \mathcal{S}_{K_w}(G_w, X_w)/\mathbb{C} \end{array}$$

a), b) より mixed Shimura variety も標準的に複素代数多様体の

構造を持つ

我々の場合、この複素多様体は §1.2 におけるのと同様、moduli 的
 解釈をもち、従って arithmetic な model を得ることが出来る。ただし、
 abelian scheme だけでは不可能であり、より広い幾何学的対象として
 1-motive の概念の導入が必要である。 ([De 3], [By 1])

ここでは詳細は省略し ([Fu 2] を参照されたい) 特別な例を
 述べるだけにする。ただし、この場合も motif の視点から本質的である
 ことは強調しておきたい。 (Piatetski-Shapiro realization もこの視点か
 らは自明となる。)

example. degree g の Siegel modular $\mathbb{C}$. W on maximal totally
 isotropic のとき. $K = K_n$ (前 example の通) $K_W = P_W(A^F) \cap K$
 このとき $W \simeq \mathbb{C}^g$ で. $U_W = Z_W = G_a^{\frac{g(g+1)}{2}}$.

$$\widehat{X}_W \simeq \mathbb{C}^{\frac{g(g+1)}{2}} \supset \mathbb{A}_g^+ \quad X_W = \text{1 point.}$$

$\widehat{Sh}_{K_W}(P_W, \widehat{X}_W)$ の連結成分は

$$\frac{\mathbb{C}^{\frac{g(g+1)}{2}} / Z_W(\mathbb{Q}) \cap g K_W g^{-1}}{\hookrightarrow \mathbb{Z}^{\frac{g(g+1)}{2}}} \quad g \in P_W(A^F)$$

$$\Rightarrow (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{\frac{g(g+1)}{2}} \Rightarrow G_m^{\frac{g(g+1)}{2}} : \frac{g(g+1)}{2} - \dim \text{ torus (split).}$$

となる。この時の moduli 的解釈は

$\widehat{Sh}_{K_W}(P_W, \widehat{X}_W) = \{ M = [\mathbb{Z}^g \hookrightarrow G_m^g] \}$ の形の complex で level n -
 structure をもつものの moduli space.

ただし M は $\nu(e_i) = \begin{pmatrix} q_{ii} \\ \vdots \\ q_{ig} \end{pmatrix} \in G_m^g$, $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ と言いた

とき $q_{ij} = q_{ji}$ をみたすとする (主偏極に相当). level n 構造は
ここでは述べるい. $\{ \simeq \text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{n}][q_{ij}^{\frac{1}{n}}, 1 \leq i \leq j \leq g] \}$

この M が 1-motive と呼ばれるものの極めて特別な例である.

今の場合, mixed Shimura variety は自然に $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 上定義されているこ
とに注意されたい.

$g=1, n=1$ のときは単に

$$\text{moduli space} = G_m = \text{Spec } \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$$

この上にある universal object : $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{u} & G_m \\ 1 & \mapsto & q \end{array}$ とする.

§3. Arithmetic toroidal compactification.

3.1.

(G, X) を §1.2 の通りとし, $K \subset G(\mathbb{A}^f)$. 素数 p は K に関し good と
する. 簡単のため $\text{Spec } \mathbb{O}_E$ の $\mathfrak{p}$ での局所環上で考えることにする.

仮定より $\text{Sh}_K(G, X)$ の arithmetic model $\mathcal{X}$ が $\text{Spec } \mathbb{O}_{E, \mathfrak{p}}$ 上とある.

(§2 の注意より) rational boundary component W に対する mixed Shimura
variety $\widetilde{\text{Sh}}_W(G, X)$ の arithmetic model $\mathcal{X}_W$ が $\text{Spec } \mathbb{O}_{E, \mathfrak{p}}$ 上

とれる. $\mathcal{X}_W$ は 8.1 の base Y_W 上の J_W -principally homogeneous space の構造をもつのであった. (この構造も arithmetic に定義する)

$$(N_W)_{\mathbb{R}} = (J_W \text{ の 1-parameter subgroups }) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}. \quad \text{と},$$

$(N_W)_{\mathbb{R}}$ 内の self-adjoint cone $C(W)$ を

$$C(W) = \{ \varphi : \text{対称形式 } \varphi : W \times W \rightarrow \mathbb{R} \text{ で}$$

$$\varphi(Qx, y) = \varphi(x, Q^*y) \text{ をみたし, } \varphi \text{ 半正定値のもの} \}$$

と定義し, Σ_W を $C(W)$ 内の或る有理多面体錐の集合とする.

$\widetilde{J}_W = J_W(\Sigma_W)$ を Σ に対応する J_W の affine torus embedding とする. $\widetilde{J}_W$ は J_W -作用をもち, J_W を J_W 同変に含む ([KKMS]).

そこで $\mathcal{X}_W$ の J_W -bundle 構造を $\widetilde{J}_W$ で "ねじって"

$$\widehat{\mathcal{X}}_W = \mathcal{X}_W(\Sigma_W) = \mathcal{X}_W \times_{J_W} \widetilde{J}_W \quad : \quad \widehat{J}_W\text{-fibration } / Y_W.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_W & \hookrightarrow & \widehat{\mathcal{X}}_W \\ J_W \searrow & & \swarrow \widetilde{J}_W \\ & Y_W & \end{array}$$

という $\widehat{J}_W$ -fibration を作り, $\mathcal{X}_W$ の (Σ_W による) partial compactification と呼ぶ. さらに $\widehat{\mathcal{X}}_W^\wedge$ を $\widehat{\mathcal{X}}_W$ の closed J_W -orbit に関する完備化とする.

example 3.1.1

$\mathcal{X}_W = \text{Spec } \mathbb{Z}[g, g^{-1}] = J_W = \mathbb{G}_m$ であり, $M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m]$ が universal object であつた. このとき

$$\widehat{\mathcal{X}}_W = \text{Spec } \mathbb{Z}[g] = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 : \quad \mathbb{Z} \text{ 上のアフィン直線}$$

となり closed orbit は $\omega = \widehat{\mathcal{X}}_W \setminus \mathcal{X}_W = \{q=0 \text{ in } A_{\mathbb{Z}}^1\} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$

となる. 従って $\widehat{\mathcal{X}}_W^{\wedge} = \text{Spec } \mathbb{Z}[[q]] = \mathbb{Z}$ 上の一変数べき級数環.

この場合, $\widehat{\mathcal{X}}_W^{\wedge}$ は q 進位相に関し完備であるから, 解析的に

$A_W = "G_m / u(\mathbb{Z})" = "G_m / q\mathbb{Z}"$ という G_m の discrete 群 $q\mathbb{Z}$ による商を考えるとができる. これは $\widehat{\mathcal{X}}_W^{\wedge}[\frac{1}{q}]$ 上では elliptic curve となり, $q=0$ の上では G_m になる幾何学的対象を与える. これは semi-abelian scheme と呼ばれるものの一例である.

この elliptic curve の場合の構成は Tate によるもので, A_W は Tate curve と呼ばれるが, より一般の構成は Mumford により 1970 年代前半に行なわれた. (Mumford 構成と呼ばれる. [Mum], [Chai] [Fa] [Fu1]) それを我々の場合に適用すると

Proposition 3.1.2

$\widehat{\mathcal{X}}_W^{\wedge}$ 上の universal な 1-motive M_W から Mumford 構成により作られる semiabelian scheme $A_W / \widehat{\mathcal{X}}_W^{\wedge}$ は $\widehat{\mathcal{X}}_W^{\wedge}$ の開集合 $U = \pi^{-1}(\mathcal{X}_W)$ 上 abelian scheme となり $*$ -polarization, L_2 -multiplication, level-structure を持ち, 従って $\mathcal{X}$ への射を与える.

但し, $\pi: \widehat{\mathcal{X}}_W^{\wedge} \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_W$ は標準射.

を得る. ここで, 我々の主定理は

Main theorem.

$\Sigma = \langle \Sigma_w \mid w: \text{rational boundary component} \rangle$ という admissible cone decomposition を一つ固定する.

するとこの Σ に対する $\mathcal{X} = \mathrm{Sh}_K(G, X) / \mathcal{O}_{E, \mathfrak{f}}$ の arithmetic toroidal compactification $\widehat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}(\Sigma) / \mathcal{O}_{E, \mathfrak{f}}$ が存在する:

- a) $\widehat{\mathcal{X}}$ は $\mathcal{X}$ を開集合として含む $\mathcal{O}_{E, \mathfrak{f}}$ 上 固有, smooth な algebraic stack であり. (Kinoshita の algebraic space)
- b) universal な abelian scheme $A/\mathcal{X}$ は $\widehat{\mathcal{X}}$ 上の semi-abelian scheme $\widetilde{A}$ に一意的に拡張され.
- c) 前 proposition による射

$$p_w : \pi^{-1}(\mathcal{X}_w) \rightarrow \mathcal{X}, \quad \Sigma_w \in \Sigma$$

$$\text{は} \quad \widetilde{p}_w : \widehat{\mathcal{X}}_w^{\wedge} \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}$$

に一意的に拡張され, $\widetilde{p}_w$ は formally etale.

の a) ~ c) が成り立ち, $\widehat{\mathcal{X}}$ はこの条件で一意に決定される.

もちろん, 複素数体上考えたときには従来の toroidal compactification (AMRT) と一致する. $\widehat{\mathcal{X}}$ はスキームになるとは限らぬが, Σ が適当な条件をみたすときには射影スキームとなる. (Tate の定理の類似)

3.2. この定理は elliptic modular case では Deligne - Rapoport が確立し, Hilbert - Blumenthal のとき Rapoport が 70 年代末には.

そして Chai 及び Faltings が 1983 年に Siegel modular のとき証明したものである。

この三者の仕事は質的に異なっているが、とくに後2つの case では toroidal compact 化が moduli 的意味を持たないため、曲線の moduli の compact 化のときのような自然な構成が不可能である。

筆者の方法は Rapoport 及び Faltings の仕事を組み合わせて発展させたものだが、abel 多様体の退化の詳細な研究に依存している。motif の哲学からいえば、

「高次元空間上の motif の semi-stable な退化理論の存在か、arithmetic 的な toroidal compact 化の存在に等しい」
 のであり、特に はり合わせがうまくいくことは weight filtration の compatibility で保証されるのである。

3.3 最も簡単な elliptic modular curve を例にとり説明を試みる
 elliptic curve の moduli 空間 $\mathcal{M} = \mathcal{A}_{1,1}$ に ∞ を付け加えるのだが、 $(E/\mathcal{M}: \text{universal curve})$ ∞ での完備化が

$(\mathbb{A}_m/\mathbb{Z}, \text{Spec } \mathbb{Z}[[t]])$ になるような $\mathbb{Z}$ 上有限型のスキーム (A, S) をとる必要がある。これは Artin の近似定理を注意深く使うことで構成される。そこで $U \subset S$ を A が elliptic curve になる開集合とすると $D = S - U$ 上では A は $\mathbb{A}_m$ になり、 A の U への制限 A_U/U から定まる射 $\gamma: U \rightarrow \mathcal{M}$ が (適当に S を縮めると) も etale となるのは

(A, S) は ∞ 近くでの望むべき étale 近傍であることかいう。

後のやり合わせはむしろ易しいので、問題は $\mathcal{Y}$ の étaleness の check であり、完備化して考えて $\mathcal{Y}^\wedge: \text{Spec } \mathbb{Z}[[t]] \left[\frac{1}{q} \right] \rightarrow \mathcal{M}$ が formally smooth であることを示さなくてはならない。(openness of versality)

Faltings の方法では、Tate curve からきまる family の小平 - Spence class を計算することで $\mathcal{Y}^\wedge$ が各点の接空間に同型を引き起こすことをいうのだが、空間が特異性をもちときの考慮は難しい。

筆者の方法では、 $\text{Spec } \mathbb{Z}[[t]] \left[\frac{1}{q} \right]$ の閉点 $x = \text{Spec } K$ (K : 完備離散付値体) で x での G_m/q^2 の fiber $A_x = G_m/q_x^2$ ($q_x \in K$) を K を剰余体とする Artin 環 R まで変形する。(elliptic curve として)。

すると Raynaud - Tate の理論から A_x の変形を考えることは

$$M_x = [\mathbb{Z} \rightarrow G_m] / K \text{ の変形を考えることと同値となり、もとより } 1 \mapsto q_x$$

$\text{Spec } \mathbb{Z}[[t]] \left[\frac{1}{q} \right]$ が M_x の変形に関して universal であつたことから (moduli 的意味参照) A_x の変形についても universal. 従つて $\mathcal{Y}^\wedge$ は x で formally smooth となり、 x を動かして $\mathcal{Y}^\wedge$ が formally smooth なことを得るのである。

この方法は単純であるだけに特異性にも強く、一般性にも富むが、 G^{den} の $\mathbb{Q}$ -rank が高いときには Abelian scheme の退化は複雑であり、本質的に難しくなる。詳細については [Fu1], [Fu2] を参照されたい。

Applications

§4. この § では toroidal compactification の存在から導かれる標準的定理について述べる ([De-Ra], [Ra], [Chal-Fa] 参照)
[Bry1].

4.1. (G, X) を §1 の通りとし, $K \subset G(\mathbb{A}^f)$, $n_K = \prod (\text{bad primes})$ とすると arithmetic model $\mathcal{X}$, universal abelian scheme $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ は全て $\mathcal{O}_E[\frac{1}{n_K}]$ 上定義された. cone 分割 Σ を固定するとき, 対応する arithmetic toroidal compactification $\tilde{\mathcal{X}}$, semi abelian scheme $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{X}}$ についても同様である.

そこで

$$\begin{aligned} (\mathrm{Lie} \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{X}})^{\vee} &= \tilde{\mathcal{X}} \text{ 上の不変微分形式のなる } \tilde{\mathcal{X}} \text{ 上の層} \\ &= e^* \Omega^1_{\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{X}}} \quad (e: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}} \text{ } 0\text{-section}) \end{aligned}$$

とかくとこれは $\tilde{\mathcal{X}}$ 上の vector 束であるので, その最高次外積

$$\begin{aligned} \omega &= \det(\mathrm{Lie} \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{X}})^{\vee} = \bigwedge^g (\mathrm{Lie} \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{X}})^{\vee} \\ g &= n_K (\mathrm{Lie} \tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{X}})^{\vee} \end{aligned}$$

を考えると, ω は $\tilde{\mathcal{X}}$ 上の直線束である.

Definition. R を $\mathcal{O}_E[\frac{1}{n_K}]$ -代数 とするとき, R 係数, weight k の modular form とは $\omega^{\otimes k}$ の $\tilde{\mathcal{X}}_R$ 上の global section のこと.
但し $\tilde{\mathcal{X}}_R = \tilde{\mathcal{X}} \times_{\mathcal{O}_E[\frac{1}{n_K}]} R$, $f: \tilde{\mathcal{X}}_R \rightarrow \mathrm{Spec} R$.

つまり $\mathcal{S}$ の全体の空間は $P(\mathcal{X}_R, \omega^{\otimes k}) = \Gamma(\mathcal{S}, \omega^{\otimes k})$ (sheaf として) となる.

この定義では vector 値の場合を扱っているが、その場合を扱うこともできる. また, a priori には toroidal compactification $\mathcal{X}$ のとりに依存するように見えるが、実際は選択に無関係に定まる.

スキーム論において基本的な定理の一つである "proper morphism による連接層の高次順像は連接である" (Grauert の定理の類似) を $f, \omega^{\otimes k}$ に適用すれば 直ちに

定理 4.1.1 (finitude).

R 係数, weight k の modular form の空間は有限生成 R 加群となる.

かゝる. これは compactification の存在を証明することは困難な定理だと思ふ. 実際にはさらに強く, ($R = \mathbb{Q}_\ell[\frac{1}{N_k}]$ とする) modular form のなす同次座標環 $\mathcal{R} = \bigoplus_k P(\mathcal{X}, \omega^{\otimes k})$ は R 上有限生成の同次環となる. (finite generation for log-canonical ring). これは Mumford 等による結果を強めた.

定理 4.1.2 (Mumford-Bailey)

S : 既約ネーター正規スキーム. $\mathcal{X}/S$: semiabelian scheme として, 生成ファイバーは固有. $\omega = \det(L_{\mathcal{X}/S})^\vee$ とするとき

W は S 上 semi-ample (つまり W は何乗かすると base point free.)

からただちに導かれる。(この定理は theta nullwerte を代数的に扱うことで得られる.)

特に $\overline{\mathcal{X}} = \text{Proj } \mathcal{O}_S / R$ ($\mathcal{O}_S$ に伴う射影スキーム) とすると $\overline{\mathcal{X}}$ は正規, 自然な射影 $\varphi: \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \overline{\mathcal{X}}$ をもつ.

さらに j を右図で定義すると

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{X}} \\ & \searrow & \downarrow \varphi \\ j & & \overline{\mathcal{X}} \end{array}$$

定理 4.1.3 (arithmetic な佐武 Baily-Borel compact 化の存在)

j は開埋入であり, $\mathbb{C}$ 上で $\overline{\mathcal{X}}$ は佐武 Baily-Borel compact 化を与える.

このように, arithmetic な佐武 compact 化も得られるのである.
($\overline{\mathcal{X}}$ を或る種の極小性で特徴づけることもできる.)

4.2. 4.1 で modular form を定義し, その基本的な性質を導いたが, 4.1 の定義と, 古典的な modular form の q 展開を用いた定義とが一致することはいわなければならない. 意味が矛盾するだろう. ここでは modular form の Fourier (Jacobi) 展開の代数的理論 (Siegel's $\mathbb{Q}$ -operator) をあげる ([Bryl] 参照).

記号は 3.1 と同じとし, A_W を $S = \widehat{\mathcal{X}}_W^\wedge$ 上の semiabelian scheme.

$U = \pi_1(\mathcal{X}_W)$, $\rho_W: U \rightarrow \mathcal{X}$ を A_W の決める射とする

ここで $\mathcal{X}_W$ を作る際に使った cone 分割 Σ_W を toroidal compactification $\mathcal{X}$ を定める cone 分割 $\Sigma = \cup \Sigma_W$ に入れているとすると, ρ_W は

$\tilde{\rho}_W: S \rightarrow \mathcal{X}$ に対応した, (Main theorem).

ここで f を weight k の modular form とすると (簡単のため係数環は $\mathbb{Q}_E[\frac{1}{n_k}]$ とする.) f の引き戻し $\tilde{\rho}_W^* f$ は S 上の $\omega^{\otimes k}$ の global section, つまり $\Gamma(S, \omega^{\otimes k})$ $\omega = \det(\mathrm{Lie} A_W/S)^\vee$ の元となる.

$\mathcal{X} = \mathcal{X}_g = \text{degree } g \text{ の Siegel modular (full level)}, W = \mathbb{Q}^g$ のときに計算してみる. (§2, example 参照)

universal な 1-motive は $M_W = [\mathbb{Z}^g \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^g] / U$.

$S = \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[[g_{ij}]]$, $U = S[[g_{ij}^{-1}]] = \mathrm{Spec} \mathbb{Z}[[g_{ij}]][[g_{ij}^{-1}]]$ ($1 \leq i \leq j \leq g$).

(直観的には $Z = (z_{ij}) \in \mathbb{G}_g$ とするとき

$$g_{ij} = \exp 2\pi i \mathrm{Tr} S_{ij} Z. \quad S_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i,i) \text{ だけ } 1$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (i,j) \text{ だけ } \frac{1}{2}, i \neq j.$$

このとき $A_W = " \mathbb{G}_m^g / u(\mathbb{Z}^g) "$,

$\omega = \det(\mathrm{Lie} A/S)^\vee$ は $\mathbb{Q}_S$ と同型. つまり $\rho_W^* f \in \mathbb{Q}_S$ と考え,

$$\rho_W^* f = \sum_S a_S \cdot \exp 2\pi i \mathrm{Tr} S Z \quad a_S \in \mathbb{Z}$$

$S: \text{half integral, positive symmetric}$

と書けることになる. これはまさに古典的な Fourier 展開である.

一般の W に対しては Fourier-Jacobi 展開を得ることになる.

係数環が一般の場合も同様である。次の定理は一見あたり前にみえて深いものである。

定理 4.2.1 (q -expansion principle)

R, R' を $\mathbb{O}_E[\frac{1}{n_k}]$ -代数とし, $R \subset R'$ とする。

f を R' 係数, weight k の modular form とし, ある W に関する Fourier-Jacobi 展開が R に 係数をもつとする。

このとき f は R 係数の modular form になる。

4.1 で定義された R 係数 という言葉が, この定理で正当化される。

(今の場合は $\mathfrak{m}$ は good reduction で, bad reduction の場合はより深い定理となる。) 2

この定理は, さらに $\mathfrak{m}$ という moduli problem の解として定義された arithmetic model $\mathfrak{m}$ $\mathbb{O}_E[\frac{1}{n_k}]$ に Fourier 係数をもつ $\mathbb{C}$ 上の modular form による同次座標環の Proj の開集合であることを示し ($R = \mathbb{O}_E[\frac{1}{n_k}]$, $R' = \mathbb{C}$ とせよ。) canonical な存在であることを保証する。(ただし, この同次座標環が有限生成であることを直接証明することは極めて困難である。)

他にも $\mathbb{C}$ 上成り立つ定理のほとんどは arithmetic にも成り立つ

定理 4.2.2 (Koecher principle)

X の連結成分である有界対称領域に 1 次元の因子があることを仮定する。すると

$$P(\mathcal{A}, W^k|_{\mathcal{A}}) = P(\mathcal{A}, W^k) \dots$$

つまり $\mathcal{A}$ 上 regular な meromorphic modular form は自動的に regular.

他にも L の cohomology の性質, reduction の基本性質, 合同関係式等の応用があるが、ここでは省かせていただく。

([Chai-Fu] 参照)

4.3. 最後に Deligne - Ribet の仕事と関連する話題について述べる、(cf. [De-Ri])

F を総実代数体 とするとき p 値 L 関数を定義するためには

L 関数の負の整数での特殊値 に対し或る種の合同性をいうことが必要となる。(例えば $F = \mathbb{Q}$, $\varepsilon: \text{mod } f$ で定義された Dirichlet 指標, p : 素数, $c: pf$ と素 とするとき

$$(1 - c^k \varepsilon(c)) L(1-k, \varepsilon) \in \mathbb{Z}_p \quad k \in \mathbb{Z}, k > 0 \dots)$$

望むべき合同式は Barsky, Cassou-Noguès により新谷の公式を使う方法で得られるが、これより以前に Deligne は Hilbert modular form の算術的理論を使う方法を構想し、(1970 年頃)。

Rapoport による Hilbert-Blumenthal modular variety の arithmetic な compact 化, Ribet による 寄与を経て 完全に確立された. (1976).

その idea は L -関数の特殊値を Eisenstein 級数の或る cusp での Fourier 展開の定数項として解釈し, 他の cusp での Fourier 係数を調べ, 次の Deligne principle にもちこむところにある.

(Deligne principle) R : flat $\mathbb{Z}_p$ -module.

F : p -adic Hilbert modular form. での 或る 1つの cusp での q -展開係数が定数項を除き R に入るものとする.

このとき, 勝手な 2つの cusp での q -展開の定数項の差は R に属する.

この原理は 4.2 に述べたものよりはるかに強い形の q -expansion principle より 従うが, (難にいうと, level N -structure があるときに N を割る素数 で q -expansion principle をいう必要がある.) この強い形を出すためには 次に述べる big monodromy theorem が必要とされる!

定理 4.3.1

§1 と同じ記号で, V が $\mathbb{Q}$ 上定義された maximal totally isotropic, L -stable な部分空間 W をもつとする (G^{der} の $\mathbb{R}$ -rank =

Q-rank.) p を K に関し good とし, P : p 上の E の素点.

$\mathcal{X}_P = \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_E} \overline{k(P)}$, $k(P)$: P の剰余体. $\overline{k(P)}$: 代数閉包.

$\mathcal{X}_P^0 \subset \mathcal{X}_P$ を universal abelian scheme $\mathcal{A}/\mathcal{X}_P$ が ordinary となる点全体のなす subvariety とする. このとき

1) (Generic ordinarity)

$\mathcal{X}_P^0$ は $\mathcal{X}_P$ 内で dense open.

2) (Big monodromy)

σ を $\mathcal{A}$ の p 中 等分点に伴う p 重 étale 層とする.

これは $\mathcal{X}_P^0$ では p 重の局所系をなすので

$$\rho: \pi_1(\mathcal{X}_P^0) \rightarrow GL_{L_\Sigma}(W_\Sigma \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p) \quad W_\Sigma: W \text{ の 或る } \mathbb{Z}\text{-lattice}$$

という基本群の p 重表現と対応するが.

ρ は全射

が成り立つ.

1) は $\mathcal{X}_P$ の 既約成分の数の決定と, toroidal compactification の boundary 近くでは $\mathcal{A}$ は ordinary であることから導かれる.

2) は elliptic modular の時は 井草の定理と呼ばれ古くから知られていたものだが, Hilbert Blumenthal のときは Ribet による.

Big monodromy theorem は Siegel modular variety のとき Katz-Lang の問題として述べたもので, Ribet の方法は通用しないため困難と思わ

れていたが、Chai - Faltings の toroidal compact 化の応用として導いた。 ([Chai-Fa]).

証明の原理は実に簡単で、compact 化の境界に沿っての局所 monodromy が $SL_2(W_2 \otimes_{\mathbb{Z}_p})$ の部分を張ってしまうことがすぐいて、残りの部分は 井草の定理にうたえることにより処理される。

これは Ribet の定理に対する別証になっているが、井草の定理のものに別証を与えるものではない。

結果として、この場合の Deligne principle の拡張が示されることになる。

このように、合同性を論じるのにも compact 化を使うことは本質的に merit があると思う (最近の Taylor の仕事もその一例といえるだろう)。

さらに、Eisenstein series の整数性を Harris の方法で論じるなどの話題もあるが、別の機会にゆずらうと思う。

(志村多様体以外の modular variety に対し compact 化理論を拡張することも価値のある問題であることを注意しておくたい。)

Reference

[AMRT] A.Ash, D.Mumford, M.Rapoport, Y.Tai.- Smooth compactifications of locally symmetric varieties, Math.Sci.Press, 1975

[Art] M.Artin.- Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ.Math IHES no.36 (1969), pp.23-58

[Bryl] J.L.Brylinski.- 1-motifs et formes automorphes, in Journées automorphes 15, Publications Mathématique de l'université Paris VII, (1983)

[Chai] C.L.Chai.- Compactification of Siegel moduli schemes, Lecture Note Series 107, London Mathematical Society, Cambridge university press, 1985

[Chai-Fa] C.L.Chai and G.Faltings .- Semiabelian degeneration and compactification, prepublication.

[De 1] P.Deligne.- Travaux de Shimura, Séminaire Bourbaki, 1970/1971, Exposé 389, Lecture Notes in Math 244, Springer Verlag, 1971

[De 2] _____.- Variété de Shimura : interpretation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques, Proc.Symp.Pure.Math, A.M.S. 33 (1979) part 2, pp.247-290

[De 3] _____.- Theorie de Hodge III, Publ.Math IHES 44 (1974),

pp.5-77

[DM] P.Deligne, D.Mumford.- The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ.Math. IHES no.36 (1969) pp.75-109

[De-Ra] P.Deligne, M.Rapoport.- Les schémas de modulus de courbes elliptiques, Lecture Notes in Math, 349(1973), pp.143-316, Springer Verlag

[De-Ri] P.Deligne, K.Ribet.- Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, Inv. Math 59 (1980), pp.227-286

[DMOS] P.Deligne, J.S.Milne, A.Ogus, K.Shih.- Hodge Cycles, Motives, and Shimura varieties, Lecture Notes in Math 900, (1982), Springer Verlag

[Fa] G.Faltings.- Arithmetische kompaktifizierung des moduleraums de abelschen varietäten, Lecture Notes in Math.1111. Springer Verlag 1985, pp.321-383

[Fu 1] K.Fujiwara.- Theory of semiabelian schemes and associated 1-motives over complete base, preprint.

[Fu 2] _____.- Arithmetic compactifications of Shimura varieties (I), preprint.

- [I] J.-I. Igusa.- A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions, Math. Ann. 168(1967), pp.228-260. MR36 # 1439
- [Ka-Ma] N.Katz, B.Mazur.- Arithmetic moduli of elliptic curves, Annals of Math Studies, Princeton University Press 108 (1985)
- [KKMS] G.Kemph, F.Knudsen, D.Mumford, B.Saint-Donat.- Toroidal embeddings I, Lecture Notes in Math. 339.Springer Verlag 1972.
- [La-Ra] R.P.Langlands, M.Rapoport.- Shimuravarietäten und Gerben, J. reine angew. Math. 378 (1987), pp.113-220
- [Mi] J.S.Milne.- The action of an automorphism of $\mathbb{C}$ on a Shimura variety and its special points, in Arithmetic and Geometry vol 1, ed.by M.Artin and J.Tate, Progress in Math (1983) Birkhäuser.
- [M-B] L.Moret-Bailly.- Pinceaux de variété abélienne, Asterisque 129 1985
- [Mum] D.Mumford.- An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, Compositio Mathematica 24,(1972), pp.239-272
- [Na] Y.Namikawa.- A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties I. II. Math. Ann. 221, (1976), pp.97-141, 201-241

[Ra] M.Rapoport.- Compactifications de l'espace de modulus de Hilbert-Blumenthal, Compositio. Math, 36, (1978), pp.255-335

[Sh] G.Shimura.- On arithmetic automorphic functions, Actes. Congrès intern. Math, Nice (1970) tome 2, pp.343-348

[Zink] T.Zink.- Isogenieklassen von Punkten von Shimuramannigfaltigkeiten mit Werten in einem endlichen Körper, Math. Nacher. 112 (1983), pp.103-124