

On the Kodaira dimension of a Hilbert modular variety

露 峰 茂 明

K で、 $n (> 1)$ 次の総実代数体を表わし、 $\mathcal{O}_K$ をその整数環とする。 $\Gamma = SL_2(\mathcal{O}_K)$ とおく。 Γ は、上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ の n 個の積 H^n に modular 変換

$$z = (z_1, \dots, z_n) \longmapsto Mz = \left(\frac{\alpha^{(1)}z_1 + \beta^{(1)}}{\gamma^{(1)}z_1 + \delta^{(1)}}, \dots, \frac{\alpha^{(n)}z_n + \beta^{(n)}}{\gamma^{(n)}z_n + \delta^{(n)}} \right)$$

により作用する、ここで $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ であり、 $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$ で (順番を決めた) α の共役を表わす。商空間 H^n/Γ は normal algebraic variety の構造を持ち、 n 次の abel 多様体でその endomorphism ring にある指定をしたものの coarse moduli 空間となっている (cf. Siegel [8])。

abel 多様体の moduli, また curve の moduli は有限個の例外を除いて general type となっていることが知られているが (Tai [9], Harris and Mumford [3])、ここでは

Hilbert modular variety がやはり、有限個の例外を除いて general type となっていることを、symmetric の場合も含めて示す。

以下の記号を用いる。 n, d_K, R は各々 K の次数, discriminant の絶対値、正の regulator とする。 $\mathfrak{f}$ は K の different を表わす、従ってその norm $N(\mathfrak{f})$ は d_K に等しい。 $\alpha \in K$ に対し、 $\alpha \gg 0$ は α が totally positive であることを表わす。 H^n の点 $z = (z_1, \dots, z_n)$ として $\gamma, \delta \in K$ に対し、

$$N(\gamma z + \delta) = \prod_{i=1}^n (\gamma^{(i)} z_i + \delta^{(i)})$$

$$\mathrm{tr}(\gamma z + \delta) = \sum_{i=1}^n (\gamma^{(i)} z_i + \delta^{(i)})$$

と定義する。 H^n 上の正則関数 f が

$$f(Mz) = N(\gamma z + \delta)^R f(z), \quad \forall M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$$

を満たす時、 f を weight R の Hilbert modular form という。 n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ は H^n に座標の置換

$$z = (z_1, \dots, z_n) \longrightarrow \sigma z = (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)})$$

として作用する。 $\mathbb{Q}$ 上の K の automorphism group $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ は次のように $\mathfrak{S}_n$ の部分群とみられる： $\sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ に対し、

$$(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}) \longmapsto ((\sigma\alpha)^{(1)}, \dots, (\sigma\alpha)^{(n)})$$

は置換に他存らない。今後 $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ の部分群 G を固定し、

Γ を、 Γ と G の H^n に作用する群としての composite とする。

H^n 上の正則関数 f が上記のものに加え、 $f(\sigma z) = f(z)$, $\forall \sigma \in G$

を満たす時、 $\mathcal{F}$ に対する Hilbert modular form という。

$X = H^n/\Gamma$, $\hat{X} = H^n/\hat{\Gamma}$ とおく。次が定理である。

定理. 1. 有限個の totally real number field K を除き,
 X は general type である。特に $\dim X > 6$ ならば, すべて
general type である。

定理. 2. 有限個の totally real number field K を除き,
 $\hat{X}$ は general type である。特に $\dim \hat{X} > 9$ ならば, すべて
general type である。

この方面の結果では次が知られていた。まず Kniölter [5] により, $n > 5$ で prime であれば X は general type である。
また Gai [10] により, $n \geq 5$ で, K が modular
embedding を持てば (定義は, Hammon [2] 参照) X は
general type である。

また, Huzarbruch-Zagier [4] により $n=2$ のとき X は,
 $d_K = 89$, 又は ≥ 97 , ただし $\neq 105, 120, 140, 165$ ならば
general type である。また論文 [13] の referee に教えられた
ことであるが, Bassendowski [1] により, $n=2$ であれば
 d_K が十分大きければ, $\hat{X}$ ($G = G_2$) は general type である

ことが示された。我々は最後にあげたふたつの結果を援用することにして、定理は $n \geq 3$ の時示せば十分である。

$\omega = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ とおく。容易に見られるように

$$M \cdot \omega = N(\gamma z + \delta)^{-2} \cdot \omega \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(K)$$

である、従って、weight $2k$ の Hilbert modular form f に対し、 $f\omega^{\otimes k}$ は $\hat{\Gamma}$ -不変である、ただし G に $\text{sgn}(\omega) = -1$ なる σ がある時は k は偶数であるとする。 $f\omega^{\otimes k}$ は $\hat{X}$ の fixed pts でない点の image からなる開集合上では、pluri-canonical (holomorphic) differential form となっているが、これがいつ non-singular model にまで holomorphic に拡張されるかが問題となる。

まず、 $f\omega^{\otimes k}$ がいつ $\hat{X}$ の elliptic fixed points を超えて、holomorphic に拡張されるかを考える。次の η_{ai} による結果 (293) が基本的である。

η_{ai} criterion, D を $\mathbb{C}^n$ の domain とし、 S を D に作用する有限群とする。 $Y = D/S$ とおき、また $\tilde{Y} \rightarrow Y$ を desingularization とする。 $g \in S$ は Y の fixed point の tangent space に、 $\mathcal{O}(S_i)$, $i=1, \dots, n$ を拼けることにより作用して

いるものとする、ただし、 $\varrho(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$, $s_i \in \mathbb{Q}$,
 $0 \leq s_i < 1$ である。この時各 $y \neq 1$ とその fixed point に対し

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n s_i \geq 1$$

となっていれば、 D 上の S -invariant symplectic differential form は φ にまで (正則に) 拡張される。

Hilbert modular variety の elliptic fixed について (1) の不等式をみることは、(そう難しくない) 整数論によつて行うことができる。実際、次の命題を得る。詳しくは [13] 参照。

• 命題 1. $n > 2$ とする。

i) $\hat{\Gamma}$ の elliptic fixed point は以下に述べる場合 (2) を除いて (1) を満たす。

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2.1) \quad K \text{ は } \mathbb{Q}(\varrho(1/7)), \mathbb{Q}(\varrho(1/9)), \mathbb{Q}(\varrho(1/15)), \text{ 又は} \\ \mathbb{Q}(\varrho(1/20)) \text{ の最大実部分体} \\ (2.2) \quad n=4, \sqrt{3} \in K \end{array} \right.$$

ii) (2.2) の場合、(1) を満たさない elliptic fixed point の order (即ち stabilizer group の order) は常に 6 である。またそのような点の数は有限であり、任意の正の ε に対して $\mathcal{O}(d_K^\varepsilon)$ でおさえられる。

系 $n > 2$ とする。(2) でない場合, 勝手な weight $2k$ の Hilbert modular form f に対し, $f w^{\otimes k}$ は elliptic fixed point を超えて拡張される。

次に $f w^{\otimes k}$ がいつ, cusp singularity を超えて拡張されるかを考える。

$\hat{k}$ で $\hat{X}$ の cusp の数を表わすことにする。 X の cusp の数は k に等しいことが知られている。従って $\hat{k} \leq k$ となる。 $X^* = X \cup \{k \text{ point}\}$, $\hat{X}^* = \hat{X} \cup \{\hat{k} \text{ point}\}$ で各々の normal projective な compact 化を表わすことにする。

λ を cusp とする。($\lambda \neq \infty$ の時 λ は K の数で, 点 $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}) \in \bar{H}^n = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ に対応している。) λ は, $p, \sigma \in \mathcal{O}_K$ によって $\lambda = p/\sigma$ とかける ($\lambda = \infty$ の時は, $p=1, \sigma=0$ とする)。

$M_\lambda = \begin{pmatrix} p & * \\ \sigma & x \end{pmatrix} \in SL_2(K)$ は ∞ を λ に写す元である。

$\mathfrak{o}_\lambda = (p, \sigma)$: an ideal of $\mathcal{O}_K$,

$$w = M_\lambda^{-1} z$$

とおく。weight $2k$ の Hilbert modular form f は,

$$N(-\sigma z + p)^{2k} f(z) = c_0 + \sum_{\substack{a, b \in \mathcal{O}_K \\ \sigma a^2 - N b^2 \neq 0}} c_{a,b} \mathcal{O}(a \cup w)$$

と Fourier 展開される。さらに係数 $c_{a,b}$ は, 等式

$$c_\nu = c_{\varepsilon^2 \nu}, \quad \forall \text{ unit } \varepsilon \text{ of } K$$

を満たす。

さて、ここで $\mathcal{O}_K$ の ideal $\mathfrak{f}$, 正の有理整数 l について次のような集合を定義する。

$$\theta(\mathfrak{f}, l) = \{ \nu \in \mathfrak{f} \mathfrak{f}^{-1} \mid \nu \neq 0, \text{tr}(\nu \beta) \leq l, \exists \beta \in \mathfrak{f}^{-1}, \beta \gg 0 \}.$$

これは無限集合である。 K の元 α, β に対し、同値関係 $\sim$ を

$$\alpha \sim \beta \iff \exists \text{ a unit } \varepsilon \text{ of } K, \text{ such that } \alpha = \varepsilon^2 \beta$$

により定義する。この時 $\theta(\mathfrak{f}, l) / \sim$ は有限集合である。

さて、正の有理整数 m に対し、vector space $S^{(m)}(\hat{\Gamma})$ を次のように定義する：

$$S^{(m)}(\hat{\Gamma}) = \{ f: \text{Hilbert modular form} \mid c_0 = 0, c_\nu = 0 \text{ for every } \nu \in \theta(\mathcal{O}_K^2, \frac{1}{2} \text{weight}(f) + m - 1) \text{ at each cusp} \}.$$

$S^{(m)}(\hat{\Gamma})_k$ は $S^{(m)}(\hat{\Gamma})$ の subspace で weight k のもののみからなるものを表わすことにする。

補題 1. $f \omega^k$ は、 $f \in S^{(0)}(\hat{\Gamma})_{2k}$ ならば、cusp singularity を超えて拡張される。

証明 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を $\mathcal{O}_K^2$ の $\mathbb{Z}$ -basis で totally positive

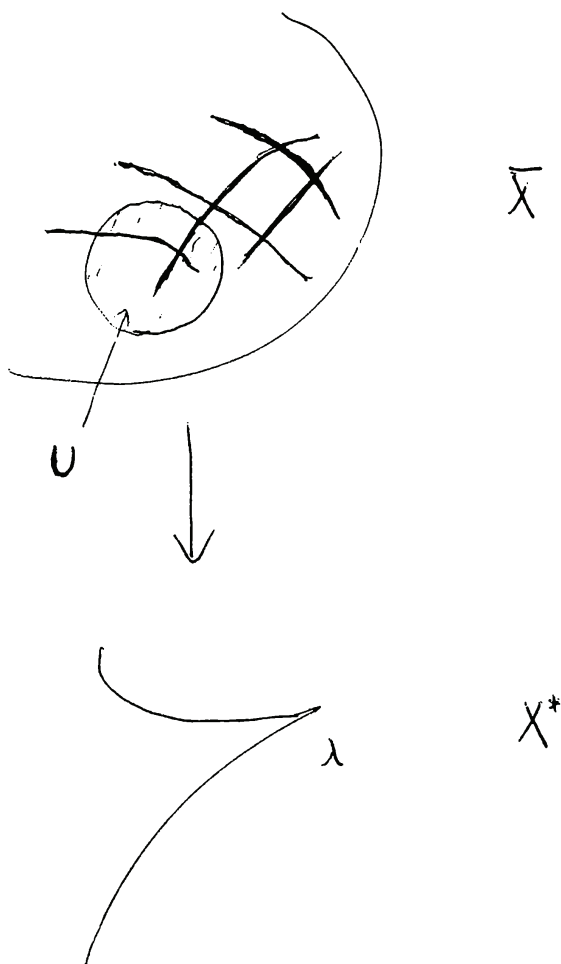
であるようなものとする。さらに $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathcal{H}_\lambda^2 \mathcal{F}^{-1}$ をその dual basis, 即ち $\langle \alpha_i, \beta_j \rangle = \delta_{ij}$ (Kronecker の δ) なるものとする。

$$\chi_j = \mathcal{O} \left(\sum_{i=1}^n \beta_j^{(i)} w_i \right), \quad j=1, \dots, n$$

とおく、ただし $w=(w_1, \dots, w_n)$ は $M_\lambda^{-1} \mathbb{Z}^n$ である。 f の λ における Fourier 展開は

$$N(-\sigma\mathbb{Z} + \rho)^{-2k} f(\mathbb{Z}) = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{Z}} C_{(r)} \chi_1^{r_1} \dots \chi_n^{r_n}$$

と書き直すことができる。 $\bar{X}$ を X の toroidal compactification とする。



$\bar{X}$ から $X^* \wedge$ の自然な写像がある。図のような $\bar{X}$ 上の開集合 U を十分小さく取れば、 $\chi_1, \dots, \chi_n$ はそれ上の局所座標になる。

この時

$$\begin{aligned} f\omega^{\otimes k} &= \text{const.} \cdot \left(\sum_{\substack{\alpha_i \in \mathbb{Z} \\ \sum \alpha_i = -k}} c_{\alpha} \otimes (h(\alpha(w))) (dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n)^{\otimes k} \right. \\ &= \text{const.} \cdot \underbrace{\left(\sum_{r_1, \dots, r_n \geq k} c_{w_i} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} \right) (x_1 \cdots x_n)^{-k} (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)^{\otimes k}}_{\text{holomorphic}} \end{aligned}$$

である。従って $f\omega^{\otimes k}$ は $\bar{X}$ においては $\bar{X}-X$ なる divisor を超えて拡張される。Toroidal compact 化は $\{\alpha_i\}$ の totally positive numbers の lattice λ の polyhedral decomposition により決定されるが、それをうまくとることにより、 G の X への作用が自然に $\bar{X}$ へ拡張され、商 $\bar{X}/G$ は $\hat{X}$ の toroidal compact 化 $\bar{\hat{X}}$ になる。

$$\begin{array}{ccc} \hat{X}/G = \bar{\hat{X}} & \longleftarrow & \bar{X} \\ & \downarrow G & \downarrow \\ X^*/G = \hat{X}^* & \longleftarrow & X^* \end{array}$$

上記の $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ に対して G は本質的には置換として作用するが、 $n > 2$ に注意すればこの時 $\bar{X}-X$ 内の G の fixed point に対して (1) が成立しているのを見るのは容易である。これにより $f\omega^{\otimes k}$ が cusp singularity を超えて拡張されることが示された。 //

命題 2. $n > 2$ で、(2) 以外の場合を考える。 $S^{(1)}(\hat{P}) \neq \{0\}$ ならば $\hat{X}$ は general type である。

証明) $S^{(1)}(\hat{P}) \neq \{0\}$ ならば、 $S^{(m)}(\hat{P}) \neq \{0\}$, $\forall m$ である。
 実際 $(S^{(1)}(\hat{P})_R)^{\otimes m} \subset S^{(m)}(\hat{P})_{Rm}$ である。 $A(\hat{P})_{2k}$ で weight $2k$ の Hilbert modular form の vector space を表わすことにすると、 k が十分大きくすれば $A(\hat{P})_{2k}$ は X^* を射影空間に埋め込むに十分の元を持つ。我々の仮定は、正の有理整数 N が存在し、 $S^{(m)}(\hat{P})_{2N-2k} \neq \{0\}$, $A(\hat{P})_{2k} \cdot S^{(m)}(\hat{P})_{2N-2k} \subset S^{(1)}(\hat{P})_{2N}$ なることを意味する。

$$S^{(1)}(\hat{P})_{2N} \xrightarrow{\cdot \omega^{\otimes N}} \Gamma(\hat{X}, \mathcal{Q}^{\otimes N}) \quad (\mathcal{Q}: \text{sheaf of rel. diff.})$$

は単射である。よって $\Gamma(\hat{X}, \mathcal{Q}^{\otimes N})$ に global section $\omega_0, \dots, \omega_n$ が存在して、 $\omega_1/\omega_0, \dots, \omega_n/\omega_0$ は代数的独立になる。//

以下、 $\dim S^{(1)}(\hat{P})_R$ の評価を行なう。 $S(\hat{P})_R$ において weight k の cusp form の vector space を表わす。

補題 2.

$$\dim S^{(1)}(\hat{P})_R \geq \dim S(\hat{P})_R - \frac{2}{\lambda} \# \mathcal{O}(\nu_\lambda^2, \frac{1}{2}k)/2.$$

証明) f を weight k の cusp form とし、 $\mathcal{C}_\lambda$ をすでに述

べた, $\text{cusp } \lambda$ における f の Fourier 係数とする。 $C_\nu = C_{\varepsilon, \nu}$ が K の unit ε に対して成立するから, 商 vector space $S(\hat{\nu})_K / S^{(1)}(\hat{\nu})_K$ の元は C_ν (ν は $\theta(\mathfrak{a}_\lambda^2, \frac{1}{2}R)/\sim$ の代表元) によって決定される。これより補題は導かれる。 //

補題 3

$$\# \theta(\mathfrak{a}_\lambda^2, \frac{1}{2}R)/\sim \leq 2^{-1} n^{-n} d_K^{1/2} R \cdot R^n + O(R^{n-1})$$

証明) $\nu \in \theta(\mathfrak{a}_\lambda^2, \frac{1}{2}R)$ とすると, $\alpha \in \mathfrak{a}_\lambda^2, \alpha > 0$ が存在して $\nu(\alpha) \leq \frac{1}{2}R$ である。 $\nu\alpha$ は totally positive であるから, 相加平均は相乗平均より大きいことから, $N(\nu\alpha) \leq (\frac{1}{2}R/n)^n$ を得る。 $N(\alpha)$ の α を動かした時の最小値は $N(\mathfrak{a}_\lambda^2)^{-1}$ であるから, $N(\nu) \leq (\frac{1}{2}R/n)^n N(\mathfrak{a}_\lambda^2)$ を得る。我々は $\# \theta(\mathfrak{a}_\lambda^2, \frac{1}{2}R)/\sim$ のかわりに $\# \theta'(\mathfrak{a}_\lambda^2, (\frac{1}{2}R/n)^n N(\mathfrak{a}_\lambda^2))/\sim$ を評価することにする。ただし $\theta'(\mathfrak{a}_\lambda^2, t) = \{ \nu \in \mathfrak{a}_\lambda^2 \setminus 0 \mid \nu > 0, N(\nu) \leq t \}$ である。 $\# \theta'(\mathfrak{a}_\lambda^2, t)/\sim$ の評価は古典的に Dirichlet density theorem の名でよく知られている。例えば高木 [12] には $\# \theta'(\mathfrak{a}_\lambda^2, t)/\{\text{totally positive units}\}$ の評価が与えている。その方法をまねすれば,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\# \theta'(\mathfrak{a}_\lambda^2, t)}{t} = \frac{2^{n-1} d_K^{1/2} R}{N(\mathfrak{a}_\lambda^2)}$$

を得、これより補題の主張が導かれる。 //

cuspidal form の次元公式は清水 [7] により計算されている。 k を正の偶数とすれば

$$\dim S(\Gamma)_k = 2^{-2n+1} \pi^{-2n} d_k^{3/2} \zeta_k(2) k^n + O(k^{n-1})$$

となる。 Atiyah - Singer - Hodgebuch - Riemann - Roch 定理により

$$\dim S(\Gamma)_k = 2^{-2n+1} \pi^{-2n} d_k^{3/2} \zeta_k(2) |G|^{-1} k^n + O(k^{n-1})$$

を得る。補題 2.3 及び上の公式より、

$$\dim S(\hat{\Gamma})_k \geq \{ 2^{-2n+1} \pi^{-2n} d_k^{3/2} \zeta_k(2) |G|^{-1} \\ - 2^{-1} n^{-n} d_k^{1/2} \hat{h} R \} k^n + O(k^{n-1})$$

なる $\dim S(\hat{\Gamma})_k$ の評価を得る。 k^n の係数の 2 項の比を考えて次の定理を得る。

定理 $n > 2$ とし、(2) でないとする。この時

$$(3) \quad 2^{-2n+2} \pi^{-2n} n^n \frac{d_k \zeta_k(2)}{\hat{h} R |G|} > 1$$

ならば $\hat{\chi}$ は general type である。

$\hat{h} \leq k$ であり、また

$$\frac{d_k \zeta_k(2)}{\hat{h} R} \geq 2^{n-2} \pi^n$$

である (例えば Lang [6] p.261)。よって (3) の左辺は $(2^{-1} \varepsilon^{-1} n)^n |G|^{-1}$ より大きい。G が trivial な場合 (即ち $\hat{X} = X$ の時) は、 $n > 6$ ならばこれは 1 より大きく、 X は general type となる。 $|G| = n$ の場合は、 $n > 9$ ならばこれは 1 より大きく、 $\hat{X}$ はすべて general type となる。

また n を固定した時 $\zeta_K(2) \geq \zeta_{\mathbb{Q}}(2n) \geq \frac{1}{2n-1}$ より $\zeta_K(2)$ は下の有界である。また Brauer-Siegel 定理より、 $kR \sim d_K^{1/2}$ であるから (3) の左辺は $d_K \rightarrow \infty$ の時 限りなく大きくなる。従って (2) でない場合 有限個の K を除いて $\hat{X}$ はすべて general type となる。

定理 1, 2 を証明するためには (2.2) の場合が問題となる。それは次のように証明される。(1) を満たさないような点の数は あっても d_K に比べて 非常に小さいことは命題 1 に述べた通りである。他方

$$\dim S^{(1)}(\hat{r})_k = \{2^{-n} \varepsilon^{-8} d_K^{3/2} \zeta_K(2) |G|^{-1} - 2^{-9} d_K^{1/2} k R\} k^4 + O(k^3)$$

であり、 k^4 の係数は少なくとも $O(d_K^{3/2})$ で与える。これより (1) を満たさない点 すべてで非常に高い order で零となる $f \in S^{(1)}(\hat{r})_k$ が k が十分大きい時に存在する。このような f に対しては、 $f \omega^{\otimes k}$ は $\hat{X}$ は holomorphic に拡張される。このような f が十分たくさんあることになるので (d_K が十分大ならば)、 $\hat{X}$ は general type となる。

References

- [1] D. Bassendowski, Klassifikation Hilbertscher Modulflächen zur symmetrischen Hurwitz-Maass-Erweiterung, Dissertation, Bonn, 1984.
- [2] W. F. Hammond, The modular groups of Hilbert and Siegel, Amer. J. Math. 88 (1966) 497 – 516.
- [3] J. Harris and D. Mumford, On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, Invent. math. 67 (1982) 23 – 86.
- [4] F. Hirzebruch and D. Zagier, Classification of Hilbert modular surfaces, in the book Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami shoten, (1977) 43 – 77.
- [5] F. W. Knöller, Über die Plurigeschlechter Hilbertscher Modulmannigfaltigkeiten, Math. Ann. 264 (1983) 413 – 422.
- [6] S. Lang, Algebraic number theory, Addison-Wesley, 1970.
- [7] H. Shimizu, On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes, Ann. of Math., 77 (1963) 33 – 71.
- [8] C. L. Siegel, Lecture on advanced analytic number theory, Tata Institute, 1961.
- [9] Y. Tai, On the Kodaira dimension of the moduli space of abelian varieties, Invent. math., 71 (1983), 425 – 439.
- [10] ———, Pluri-canonical differentials of Hilbert modular varieties, in the book Automorphic forms of several complex variables, Progress in Math., 46, Birkhäuser, 1984.

- [12] 高木貞治, 代數的整數論, 第2版, 岩波書店, 1971.
- [13] S. Tsuyumine, On the Kodaira dimensions of Hilbert modular varieties, Invent. math., to appear.