

Extended Systems for Numerical Computation of Double and Triple Turning Points

広島大学校教育 新谷 尚義 (Hisayoshi Shintani)

1. Introduction

X を Banach 空間, $g(\lambda, x) : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ とし, 方程式

$$(1) \quad g(\lambda, x) = 0$$

を考える。 $g(\lambda_0, x_0) = 0$ とし, $y_0 = (\lambda_0, x_0)$, $y = (\lambda, x)$ とおく。

$A_x(y_0)$ を A_x^0 , $A'(y_0)$ を A'_0 などと書く。 作用素 A の零空間
を $N(A)$, 値域を $R(A)$, A の Fréchet 微分を A' または DA , X の
共役空間を X' と表す。 Spence と Werner [2] は

$$1^0 \quad N(g_x^0) = \text{span}\{\zeta_0\}, \quad \zeta_0 \neq 0$$

$$2^0 \quad R(g_x^0) = \{x \in X : \psi_0 x = 0\}, \quad \psi_0 \in X', \quad \psi_0 \neq 0$$

$$3^0 \quad g_\lambda^0 \notin R(g_x^0)$$

であるとき, y_0 を g の λ についての turning point (以下 TP
と略す)と呼んでいる。

$$X = N(g_x^0) \oplus V, \quad V = \{x \in X, \ell x = 0\}, \quad \ell \in X'$$

と分解すると, 陰関数定理によって

$$\lambda = \lambda(s), \quad x = x(s), \quad |s - s_0| < \delta, \quad \lambda(s_0) = \lambda_0, \quad x(s_0) = x_0$$

$$x(s) = s \varphi_0 + v(s), \quad v \in V$$

と表され, $\lambda'(s_0) = 0$ となる。

$\lambda''(s_0) \neq 0$ のとき Y_0 は simple TP, $\lambda^{(j)}(s_0) = 0$ ($j=1, 2, \dots, m$)
 $\lambda^{(m+1)}(s_0) \neq 0$ のとき, Y_0 は重複度 m の TP という。

(1) の拡大系

$$(2) \quad G(y, \varphi) = \begin{pmatrix} g(y) \\ g_x(y)\varphi \\ \ell\varphi - 1 \end{pmatrix} = 0$$

を考えると, Y_0 が simple TP ならば $DG(y_0, \varphi_0)$ は nonsingular であることが知られている。

Spence と Werner は パラメータ μ, λ を含む方程式

$$(3) \quad f(\mu, \lambda, x) = 0$$

を考えている。 Y_0 が $g(\lambda, x) = f(\mu_0, \lambda, x)$ の TP であるとし,

拡大系

$$(4) \quad F(\mu, y, \varphi) = \begin{pmatrix} f(\mu, y) \\ f_x(\mu, y)\varphi \\ \ell\varphi - 1 \end{pmatrix} = 0$$

を作る。 $t = (\lambda, x, \varphi)$, $t_0 = (\lambda_0, x_0, \varphi_0)$ とするとき,

$F_\mu^0 \notin R(F_t^0)$ かつ Y_0 が g の λ についての double TP

ならば, (μ_0, t_0) は F の μ についての simple TP であること

を示した。

ここでは (1) と (2) の 2 重 および 3 重の TP を Newton 法で求めるために、その Fréchet 微分が TP で nonsingular になるような拡大系を構成することを考える。

2. One-parameter problem

X を Hilbert 空間, 内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す。 $g \in C^{m+1}$ ($m \geq 2$)

とする。 $Y = \mathbb{R} \times X$ とし, $Y_i = (\lambda_i, x_i)$ ($i=1, 2$) に対して 内積を

$\langle Y_1, Y_2 \rangle = \lambda_1 \lambda_2 + \langle x_1, x_2 \rangle$ で導入すると, Y は Hilbert 空間になる。 $X = N(g_x^0) \oplus V$, $Z = \mathbb{R} \times V$, $\phi_0 = (0, \phi_0)$ とすると,

g_0' の Z への制限 h は nonsingular であることを示せる。

$$u_0 = -h^{-1}g_0''\phi_0^2, \quad v_0 = -h^{-1}(g_0'''\phi_0^3 + 3g_0''\phi_0 u_0)$$

とおく。

$m = 2$ の場合

$$G(y, \phi, u) = \begin{pmatrix} g(y) \\ g'(y)\phi \\ g''(y)\phi^2 + g'(y)u \\ \langle \phi, \phi \rangle - 1 \\ \langle \phi, u \rangle \\ \langle (1, 0), u \rangle \end{pmatrix}$$

$c_0 = (y_0, \phi_0, u_0)$ とおくと, $G(c_0) = 0$ かつ $DG(c_0)$ は nonsingular となる。

$m = 3$ の場合

$$H(y, \phi, u, v) = \begin{pmatrix} g(y) \\ g'(y)\phi \\ g''(y)\phi^2 + g'(y)u \\ g'''(y)\phi^3 + 3g''(y)\phi u + g'(y)v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \langle \phi, \phi \rangle - 1 \\ \langle \phi, u \rangle \\ \langle \phi, v \rangle \\ \langle (1,0), v \rangle \end{pmatrix}$$

$c_0 = (y_0, \phi_0, u_0, v_0)$ とおくと, $H(c_0) = 0$ かつ $DH(c_0)$ は nonsingular である。

3. Two-parameter problem

$$f(\mu, \lambda, x) \in C^{m+1} \quad (m \geq 2)$$

$$F(\mu, Y, \zeta) = \begin{pmatrix} f(\mu, Y) \\ f_x(\mu, Y) \zeta \\ \langle \zeta, \zeta \rangle - 1 \end{pmatrix}$$

とし, y_0 は $f(\mu_0, Y)$ の重複度 m の λ についての TP,

$F_\mu^0 \notin R(F_t^0)$ とする。

$$\phi_0 = (0, \zeta_0), \quad u_0 = -h^{-1} f_{xx}^0 \zeta_0^2 = (0, u_1),$$

$$v_0 = -h^{-1} (f_{xxx}^0 \zeta_0^3 + 3f_{xx}^0 \zeta_0 u_1),$$

$$D(\mu, Y, \zeta, u) = f_{ff}(\mu, Y) \zeta^2 + f_Y(\mu, Y) u,$$

$$E(\mu, Y, \zeta, u, v) = f_{xxx}(\mu, Y) \zeta^3 + 3f_{xy}(\mu, Y) \zeta u + f_Y(\mu, Y) v$$

とおく。

$m = 2$ の場合

$$G(\mu, \lambda, x, \zeta, u) = \begin{pmatrix} F(\mu, Y, \zeta) \\ D(\mu, Y, \zeta, u) \\ \langle (0, \cdot), u \rangle \\ \langle (1, 0), u \rangle \end{pmatrix}, \quad c_0 = (\mu_0, t_0, u_0) \text{ とおくと,}$$

$G(c_0) = 0$, $DG(c_0)$ は nonsingular である。

$m = 3$ の場合

$$H(\mu, \lambda, x, \zeta, u, v) = \begin{pmatrix} F(\mu, y, \zeta) \\ D(\mu, y, \zeta, u) \\ E(\mu, y, \zeta, u, v) \\ \langle (0, \zeta), u \rangle \\ \langle (0, \zeta), v \rangle \\ \langle (1, 0), v \rangle \end{pmatrix}, \quad c_0 = (\mu_0, t_0, u_0, v_0)$$

とおくと, $H(c_0) = 0$, $DH(c_0)$ nonsingular となる。

4. Numerical Examples

Newton 法で拡大系を解き, 修正ベクトルの成分の絶対値の最大値が 10^{-4} より小さくなったとき反復を停止した。

例 1.

$$g(\lambda, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + 2x_2 - \lambda \\ x_2 - \lambda \end{pmatrix}, \quad (0, 0, 0): \text{double TP}$$

解 $\lambda = x_i = \phi_1 = \phi_3 = u_j = 0$, $\phi_2 = 1$ ($i=1, 2; j=1, 2, 3$),

初期値 $\lambda = x_i = \phi_j = u_j = 0.5$ ($i=1, 2; j=1, 2, 3$),

反復回数 6

例 2.

$$g(\lambda, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1^2 + x_1^2 x_2 \\ \lambda - x_2^2 \end{pmatrix}, \quad (0, 0, 0): \text{triple TP}$$

解 $\lambda = x_i = \phi_1 = \phi_3 = u_i = v_j = 0$ ($i=1, 2; j=1, 2, 3$), $\phi_2 = 1, u_3 = 2$,

初期値 $\lambda = x_i = \phi_1 = \phi_3 = u_i = v_j = 0.4$, $\phi_2 = 0.6$, $u_3 = 1.6$,

反復回数 7

例 3.

$$f(\mu, \lambda, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 - \lambda + \mu x_1 \\ x_2 - \lambda \end{pmatrix}, \quad (0, 0, 0, 0): \text{double TP}$$

解 $\mu = \lambda = x_i = \zeta_2 = u_j = 0 \ (i=1,2;j=1,2,3), \zeta_1 = 1,$

初期值 $\mu = \lambda = x_i = \zeta_i = u_j = 0.5 \ (i=1,2;j=1,2,3),$

反復回数 6

例 4.

$$f(\mu, \lambda, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\lambda + \mu x_1 + x_1^4 + 2x_2 \\ -\lambda - 2\mu x_1 + x_2 \end{pmatrix}, (0,0,0,0): \text{triple TP}$$

解 $\mu = \lambda = x_i = \zeta_2 = u_j = v_j = 0 \ (i=1,2;j=1,2,3), \zeta_1 = 1,$

初期值 $\mu = \lambda = x_i = \zeta_2 = u_j = v_j = 0.5, \zeta_1 = 0.6,$

反復回数 7

References

- [1] H.Shintani and M.Kanda, Extended systems for numerical computation of double and triple turning points, Bull. Fac.School Educ. Hiroshima Univ. Part II 12 (1969)37 - 45.
- [2] A. Spence and B. Werner, Non-simple turning points and cusps, IMA J. Numer. Anal.,2(1982), 413 - 427.