

一次元トーラス上のある関数空間の作用関数について

山形大理 佐藤圓治 (Enji Sato)

1. 序 $\mathbb{T}$ を一次元トーラス (unit circle), $C(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上の連続関数のなすバナッハ代数, $A(\mathbb{T})$ を絶対収束するフーリエ係数をもつ $C(\mathbb{T})$ の元全体とする。よく知られているように $A(\mathbb{T})$ は $\mathbb{Z}$ 上の絶対収束する数列空間と同型なバナッハ代数になる。 $\mathbb{T}$ 又は局所コンパクトアーベル群上の種々のバナッハ代数の作用関数の研究 ([2], [10], [11], [12] 等) は $A(\mathbb{T})$ の Y. Katznelson による作用関数の研究 [5] から盛んになったように思われる。ここで扱う関数空間は、1962年、Y. Katznelson [7] が導入した *strongly homogeneous Banach algebra* である。これの作用関数については、Y. Katznelson, P. Malliavin, M. Zafraan 等の研究があったが、1979年、G. Pisier [9] が、ある意味で *Best* と思われる研究を発表した。ここでは、大まかに、Y. Katznelson, M. Zafraan の結果をふりかえた後で、G. Pisier の結果を紹介する。

2. Y. Katznelson, M. Zafraan の結果.

定理 1 (N. Wiener 1932)

$$f \in A(\mathbb{T}), f(t) \neq 0 (\forall t \in \mathbb{T}) \Rightarrow \frac{1}{f} \in A(\mathbb{T})$$

定理 2 (N. Wiener - P. Lévy 1934)

$$f \in A(\mathbb{T}), F: f \text{ の range 上 analytic} \Rightarrow F \circ f \in A(\mathbb{T})$$

定義 $C(\mathbb{T}) \supset B_1, B_2$ Banach space, F の domain $\subset \mathbb{R}$.

F が B_1 から B_2 に作用する

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} f \in B_1, f \text{ の range } \subset F \text{ の domain} \Rightarrow F \circ f \in B_2$$

もし $B_1 = B_2$ のときは、単に F は B_1 に作用するという。

● Y. Katznelson は、定理 2 の逆として次を得た。

定理 3 ([5])

(1) $B(\subset C(\mathbb{T}))$ を self-adjoint, regular, Banach algebra with unit, B の極大イデアル空間を $\mathbb{T}$ とする。このとき、

$F(t) = \sqrt{t}$ ($0 \leq t \leq 1$) が B に作用すれば、 $B = C(\mathbb{T})$ である。

(2) $F: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ とする。このとき、 F が $A(\mathbb{T})$ に作用すれば、 F は $[-1, 1]$ の近傍で analytic である。

特に、 F が $A(\mathbb{T})$ に作用する必要十分条件は、 $[-1, 1]$ の近傍で analytic であることである。

(注意) 定理 3 の (2) の証明のポイントは、

$$\sup \{ \|e^{if}\|_{A(\mathbb{T})} ; \|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq r, f \text{ real} \} = e^r$$

を示すことである。

その後、(1)は、次のように改良される。

定理4 ([6])

$B \subset C(\mathbb{T})$ を self-adjoint, regular, Banach algebra with unit. B の極大イデアル空間は $\mathbb{T}$ とする。 F も $[1, 1]$ 上の関数で、 $F(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \infty$ とする。もし F が、 B に作用すれば、 $B = C(\mathbb{T})$ となる。

● 定理3の(2)のその後として次の問題がある。([16; P154])

□ 問題. K を $\mathbb{T}$ の閉集合。 $A(K)$ を $A(\mathbb{T})$ の元を K に制限したバナッハ代数とする。このとき、 $C(K)$ を K 上の連続関数空間とすれば、 $A(K) = C(K)$ 又は、 $A(K)$ の作用関数は、 analytic になるか? 』 なお、 K が、正のルベーグ測度をもつ時、 $A(K)$ の作用関数は、 analytic となることが知られている。

さて、1962年、Y. Katznelson [7] は、上の問題の類似を考え、strongly homogeneous の概念を導入したと思われる。

定義 $C(\mathbb{T}) \supseteq B \supseteq A(\mathbb{T})$

B : strongly homogeneous

$\iff_{\text{def}} \begin{aligned} (1) & f \in B \Rightarrow \bar{f} \in B \quad (\bar{f} \text{ は } f \text{ の complex conjugate}) \\ (2) & \forall a \in \mathbb{T}, B \ni f(x) \mapsto f(x+a) \in B \quad \text{isometry} \end{aligned}$

$$(3) \forall f \in B, \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|f(x+\alpha) - f(x)\|_B = 0$$

$$(4) k \in \mathbb{Z}, B \ni f(x) \mapsto f(kx) \in B \text{ isometry}$$

として、彼は、次の問題を提起した。

『問題. $A(\mathbb{T}) \subseteq B \subseteq C(\mathbb{T})$ なる strongly homogeneous なバナッハ代数の作用関数は、analytic か?』

定理 5 ([8])

以下の性質を満たす strongly homogeneous Banach algebra B が存在する。(a) $A(\mathbb{T}) \subseteq B \subseteq C(\mathbb{T})$, (b) $E[1]$ で定義された nonanalytic f_t が存在して、 $A(\mathbb{T})$ から B に作用する。

1978 年, Mizuhara は、上の問題に対して否定的な次の結果を得た。

定理 6 ([13])

次の性質を持つ strongly homogeneous Banach algebra B が存在する。(a) $A(\mathbb{T}) \subseteq B \subseteq C(\mathbb{T})$, (b) $E[1]$ で定義された nonanalytic f_t が存在して、 B に作用する。

(注意) 上の B の作り方は、大体次のようになる。 ρ を

$\mathbb{T}$ 上の三角多項式全体。 $\psi \in \rho$ に対して、 $\psi = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k$, $\|\psi_k\|_\infty \leq 1$, $\psi_k \in \rho$ の表現を考え、 $\|\psi\| = \inf_{\text{上の表現}} \sum_{k=1}^n |a_k| \log(\|\psi_k\|_{A(\mathbb{T})} + e^2)$

とあくと、 $\|\psi\|_\infty \leq \|\psi\| \leq 3\|\psi\|_{A(\mathbb{T})}$ となり B を ρ の $\|\cdot\|$ による完備化とする。このとき、

$\sup \{ \|e^{ir\psi}\|_B ; \|\psi\|_B \leq 1, \psi: \text{real} \} \leq 6 |r|^{\frac{3}{2}} e^{5|r|^{\frac{1}{2}}} (|r| \geq 1)$
 が成立する。

M. Zafraan は、補間空間の議論を使って 1979 年に上の結果を改良して次を得た。

定理 7 ([14])

次の性質をもつ strongly homogeneous Banach algebra B が存在する。 (a) $A(\mathbb{T}) \subsetneq B \subsetneq C(\mathbb{T})$, (b) $[1, 1]$ で定義された回連続微分可能な関数が存在して、 B に作用する。

(注意) 上の証明の中で、

$$\sup \{ \|e^{ir\psi}\|_B ; \|\psi\|_B \leq 1, \psi: \text{real} \} \leq C|r|^2 (|r| \geq 1)$$

を示している。

3. G. Pisier の結果。

M. Zafraan [14] のすぐ後に、G. Pisier [9] は、次の結果を発表した。

定理 8 次の性質をもつ strongly homogeneous Banach algebra B が存在する、 (a) $A(\mathbb{T}) \subsetneq B \subsetneq C(\mathbb{T})$, (b) $[1, 1]$ で定義された Lip 1 の関数が存在して、 B に作用する。

(注意) この結果は、定理 4 と比較すると作用関数が Lip になるものではなく、Best のものになっている。

以下このBについてのべる。

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ を確率空間とし以下は、その上の確率変数も考える。

定義 $\tilde{g}$: complex Gaussian random variable

$\Leftrightarrow_{\text{def}}$ $\tilde{g} = g_1 + i g_2$ であって g_1, g_2 は real random variable で、共に平均 0、分散 $\frac{1}{2}$ の Gauss 分布に従う。

$\circ g_1, g_2$ は independent random variable である。

次に、 $\{\tilde{g}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を complex Gaussian random variable の列であって、 $\{\operatorname{Re} \tilde{g}_n, \operatorname{Im} \tilde{g}_n\}_n$ の全体が independent random variable とする。

定義

$C_{a.s.}(\mathbb{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L^2(\mathbb{T}); \text{ a.a. } \omega \in \Omega \text{ について}$

$\sum_n \tilde{g}_n(\omega) \tilde{f}(n) e^{i n t}$ は、ある連続関数の Fourier 級数である。}

(注意)

$f \in C_{a.s.}(\mathbb{T})$ なる必要十分条件は、a.a. $\omega \in \Omega$ について三角級数 $\sum_n \tilde{g}_n(\omega) \tilde{f}(n) e^{i n t}$ の $(C, 1)$ 平均が一様収束することである。従って [4; p.48, Prop. 1] より、 $f \in C_{a.s.}(\mathbb{T})$ なる必要十分条件は、a.a. $\omega \in \Omega$ について三角級数 $\sum_n \tilde{g}_n(\omega) \tilde{f}(n) e^{i n t}$ が $\mathbb{T}$ 上で一様収束することである。

さて $f \in C_{a.s.}(\mathbb{T})$ に対して

$Z_t(\omega) = \sum_n \operatorname{Re}(\hat{g}_n(\omega) \hat{f}(n) e^{int})$ とおくと、 $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は、平均 0 の Gaussian process となる。[3] より、 $E \sup_t |Z_t(\omega)| < +\infty$ であるから、 $E \|\sum_n \hat{g}_n(\omega) \hat{f}(n) e^{int}\|_\infty < +\infty$ となる。そこで $\|f\|_{\text{def}} E \|\sum \hat{g}_n(\omega) \hat{f}(n) e^{int}\|_\infty$ とおくと次のことがいえる。

補題 1

- (1) $C_{\text{is}}(\mathbb{T})$ は、norm $\|\cdot\|$ で Banach space になる。
- (2) $\forall a \in \mathbb{T}$, $C_{\text{is}}(\mathbb{T}) \ni f(x) \mapsto f(x+a) \in C_{\text{is}}(\mathbb{T})$ は、isometry。
- (3) $f \in C_{\text{is}}(\mathbb{T}) \Rightarrow \bar{f} \in C_{\text{is}}(\mathbb{T})$
- (4) $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) \mapsto f(kx)$ は、isometry。
- (5) $\lim_{a \rightarrow 0} \|f(x) - f(x+a)\| = 0$ 。

そこで、 $B = C(\mathbb{T}) \cap C_{\text{is}}(\mathbb{T})$ とおき、 $f \in B$ に対し、 $\|f\|_{\text{def}} 90\sqrt{2} \|f\|_\infty + \|f\|$ を定義すれば、 $(B, \|\cdot\|_{\text{def}})$ が定理 8 における求める B となる。(90 $\sqrt{2}$ は Pisier の論文とちがう定数で、筆者の計算による。)

補題 2

- (1) B は、norm $\|\cdot\|_{\text{def}}$ で Banach space になる。
- (2) B は、strongly homogeneous である。
- (3) $A(\mathbb{T}) \subsetneq B \subsetneq C(\mathbb{T})$ 。

証明。(1), (2) は補題 1 より。(3) を示す。

$f \in A(\mathbb{T})$ なら、

$$\begin{aligned} \|f\| &= E \left\| \sum \widehat{g}_n f(n) e^{int} \right\|_\infty \\ &\leq \sum E |\widehat{g}_n| |f(n)| \\ &\equiv \sum |f(n)| = \|f\|_{A(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

また、 $\{a_n = \frac{1}{\sqrt{n} (\log n)^{1+\varepsilon}}\}_{n=2}^\infty$ ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$) とおくと、Salem-Zygmund の条件 $\sum a_n^2 \log^{1+\varepsilon} n < +\infty$ を満たすから、適当な $\pm$ の選択により $f(t) = \sum_{n=1}^\infty \pm a_n \cos nt$ が $\mathbb{T}$ 上-様収束する ようにできる ([1; P.331]) ところが [4; P.93] より上の f について $\sum_n \widehat{g}_n(\omega) f(n) e^{int}$ は、a.a. ω について非有界関数の Fourier 級数となる。よって $f \notin B$, $f \in C(\mathbb{T})$ 。

一方、 $\{a_n = \frac{1}{n \log n}\}_{n=2}^\infty$ とおくと $f(t) = \sum a_n \sin nt$ は $\mathbb{T}$ 上-様収束する ([15; P.182]) しかるに、[4; P.84] と $C_{as}(\mathbb{T})$ の定義のあとの(注意)より $\sum \widehat{g}_n(\omega) f(n) e^{int}$ は、a.a. ω で-様収束する。よって $f \in A(\mathbb{T})$, $f \in B$.
g.e.d.

従って定理 8 を示すには、次の命題をいえばよい。

命題 3

- (1) B は、pointwise multiplication で Banach algebra である。
- (2) $\text{Lip } 1$ の関数が B に作用する。

定義 $f \in L^2(\mathbb{T})$, $f_t(x) = f(x+t)$

$$\widetilde{X}_t(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \widehat{g}_n(\omega) \widehat{f}(n) e^{int}$$

さらに、 $\{\widehat{g}_n\}$ を complex Gaussian random

variable の3"2". $\{\operatorname{Re} \tilde{g}_n, \operatorname{Im} \tilde{g}_n, \operatorname{Re} \tilde{g}'_n, \operatorname{Im} \tilde{g}'_n\}_n$ が independent random variable になるものとする。

$$\text{よして, } \tilde{X}'_t(\omega) = \sum \tilde{g}'_n(\omega) \hat{f}(n) e^{int},$$

$$X_t(\omega) = \operatorname{Re} \tilde{X}_t(\omega) + \operatorname{Im} \tilde{X}'_t(\omega) \text{ とおく。}$$

補題 4 (Slepian's lemma) ([3])

$f, h \in L^2(\mathbb{T})$, f と X_t , h と Y_t も上の定義のように対応させる。もし、 $\forall t, s \in \mathbb{T}$ に對し、

$$E|Y_t - Y_s|^2 \leq E|X_t - X_s|^2 \text{ ならば、}$$

$$E \sup_t Y_t \leq E \sup_t X_t$$

が、成立する。

補題 5 $f \in B$ とし、 f と X_t が、定義のように対応し211るとする。このとき、次が成立。

$$(1) E|X_t - X_s|^2 = \|f_t - f_s\|_2^2$$

$$(2) E \sup_t X_t \leq 2\{f\}$$

$$(3) \{f\} \leq 4 E \sup_t X_t + \|f\|_2$$

証明.

(1): $\{\tilde{g}_n, \tilde{g}'_n\}$ のとり方より、

$$E|X_t - X_s|^2 = E|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|^2 = \|f_t - f_s\|_2^2$$

$$\begin{aligned} (2): E \sup_t X_t &= E \sup_t (\operatorname{Re} \tilde{X}_t + \operatorname{Im} \tilde{X}'_t) \\ &\leq E \sup_t \operatorname{Re} \tilde{X}_t + E \sup_t \operatorname{Im} \tilde{X}'_t \end{aligned}$$

$$\leq 2 E \sup_t |\tilde{X}_t| = 2 \{f\}$$

$$(3): E \sup_t |\tilde{X}_t - \tilde{X}_0| \leq E \sup_t |\operatorname{Re}(\tilde{X}_t - \tilde{X}_0)| + E \sup_t |\operatorname{Im}(\tilde{X}_t - \tilde{X}_0)|$$

$$\because X_t - X_0 = \operatorname{Re}(\tilde{X}_t - \tilde{X}_0) + i \operatorname{Im}(\tilde{X}_t - \tilde{X}_0) \text{ より}$$

$$E \sup_t |\tilde{X}_t - \tilde{X}_0| \leq 2 E \sup_t |X_t - X_0|$$

$$\leq 4 E \sup_t X_t$$

$$\therefore E \sup_t |\tilde{X}_t - \tilde{X}_0| \leq 4 E \sup_t X_t$$

$$\therefore \{f\} = E \sup_t |\tilde{X}_t| \leq 4 E \sup_t X_t + E |\tilde{X}_0|$$

$$\leq 4 E \sup_t X_t + \|f\|_2 \quad \text{g.e.d.}$$

補題 6 $f, h \in L^2(\mathbb{T})$, $\|h_t - h_s\|_2 \leq \|f_t - f_s\|_2$

とする。このとき、次が成立。

$$(i) f \in C_{a,s}(\mathbb{T}) \Rightarrow h \in C_{a,s}(\mathbb{T})$$

$$(ii) \{h\} \leq 8 \{f\} + \|h\|_2$$

証明。 f と X_t , h と Y_t を前のように対応させると、

$$X_t = \operatorname{Re} \tilde{X}_t + i \operatorname{Im} \tilde{X}_t, Y_t = \operatorname{Re} \tilde{Y}_t + i \operatorname{Im} \tilde{Y}_t \text{ である。}$$

このとき、 $E |Y_t - Y_s|^2 = \|h_t - h_s\|_2^2$, $E |X_t - X_s|^2 = \|f_t - f_s\|_2^2$ で、仮定より $E |Y_t - Y_s|^2 \leq E |X_t - X_s|^2$ であるから、補題 4 より $E \sup_t Y_t \leq E \sup_t X_t$ 。

よって 補題 5 から $f \in C_{a,s}(\mathbb{T})$ なら $h \in C_{a,s}(\mathbb{T})$ である。

$$\{h\} = E \sup_t |\tilde{Y}_t| \leq 4 E \sup_t Y_t + \|h\|_2$$

$$\leq 4 E \sup_t X_t + \|h\|_2$$

$$\leq 8\{f\} + \|h\|_2$$

f.e.d.

補題 17

(1) $f \in C_{a.s}(\mathbb{T})$, f に X_t が対応してゐるとする。

このとき, $\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\{f\}$ が成立。

(2) $f, h \in C_{a.s}(\mathbb{T})$, $|\hat{h}(n)| \leq |\hat{f}(n)|$ ($n \in \mathbb{Z}$) ならば,

$\{h\} \leq \{f\}$ である。

証明。

(1): X_t が平均 0, 分散 $\|f\|_2^2$ の分布に従うから。

(2): 仮定より $\|h_t - h_s\|_2 \leq \|f_t - f_s\|_2$

補題 6 より $\{h\} \leq 8\{f\} + \|h\|_2 \leq 8\{f\} + \sqrt{2\pi}\{f\} \leq 11\{f\}$
f.e.d.

命題 3 の証明

(1): $f, h \in B$, $t, s \in \mathbb{T}$ とする。

$$\|(fh)_t - (fh)_s\|_2$$

$$\leq \|f\|_\infty \|h_t - h_s\|_2 + \|h\|_\infty \|f_t - f_s\|_2$$

$$\leq 2^n, \quad \hat{k}(n) = (2\|f\|_\infty^2 |\hat{h}(n)|^2 + 2\|h\|_\infty^2 |\hat{f}(n)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$k \in L^2(\mathbb{T})$ とおくと,

$$\|f\|_\infty \|h_t - h_s\|_2 + \|h\|_\infty \|f_t - f_s\|_2 \leq \|k_t - k_s\|_2$$

$$\therefore \|(fh)_t - (fh)_s\|_2 \leq \|k_t - k_s\|_2$$

こゝで k の定義より $f, h \in C_{a.s}$ に注意すれば

〃

$h \in C_{a.s}(\mathbb{T})$ となる。よって補題 6 より, $fh \in C_{a.s}(\mathbb{T})$
さらに、補題 7 より、

$$\|fh\| \leq \|\sqrt{2}\|f\|_{\infty}\|h\| + \|\sqrt{2}\|h\|_{\infty}\|f\| \quad \text{となる。}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|fh\| &\leq 88\sqrt{2}\|f\|_{\infty}\|h\| + 88\sqrt{2}\|h\|_{\infty}\|f\| + \sqrt{2}\pi\|h\|_{\infty}\|f\| \\ &\leq 90\sqrt{2}\|f\|_{\infty}\|h\| + 90\sqrt{2}\|h\|_{\infty}\|f\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \|fh\| &\leq 90\sqrt{2}\|f\|_{\infty}\|h\| + \|fh\| \\ &\leq \|f\| \|h\| \end{aligned}$$

(2): $f \in B$, f の range $\subset [-1, 1]$ とする。

F を $[-1, 1]$ 上で定義された関数で $|F(x) - F(y)| \leq |x - y|$ ($x, y \in [-1, 1]$) としよ。

今 $h = F \circ f$ とおくと、

$$\begin{aligned} \|h_t - h_s\|_2 &= \left(\int |F(f(x+t)) - F(f(x+s))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int |f(x+t) - f(x+s)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f_t - f_s\|_2 \end{aligned}$$

よって補題 6 を使えば、

$$F \circ f = h \in C_{a.s}(\mathbb{T})$$

g.e.d.

[追記]

[4] で G. Pisier の結果を扱っている。

REFERENCES

- [1] N.Bary, A Treatise on Trigonometric Series, Translated from the Russian by M.F.Mullins, Vol.1(1964).
- [2] S.Igari, Functions of L^p -multipliers, Tôhoku Math. J. 21(1969), 304 - 320.
- [3] N.Jain and M.Marcus, Continuity of sub-Gaussian process, Probability on Banach spaces, Advances in Probability and Related Topics 4(1978), 81 - 196.
- [4] J.P.Kahane, Some random series of functions, Second ed. Cambridge University Press, 1985.
- [5] Y.Katznelson, Sur le symbolique dans quelques algèbres de Banach, Ann.Sci.Ec.Norm.Sup. 76(1959), 83 - 123.
- [6] Y.Katznelson, A characterization of all continuous functions on a compact Hausdorff space, Bull.Amer.Math. Soc. 66(1960), 313 - 315.
- [7] Y.Katznelson, Calcul symbolique dans les algèbres homogènes, C.R.Acad.Sci. 234(1962), 2700 - 2702.
- [8] Y.Katznelson and P.Malliavin, Analyse harmonique dans quelques algèbres homogènes, Israel J. Math. 5(1967), 107 - 117.
- [9] G.Pisier, A remarkable homogeneous Banach algebra, Israel J. Math. 34(1979), 38 - 44.
- [10] W.Rudin, Fourier analysis on groups, 2nd ed. Interscience Publishers, New York, 1967.
- [11] N.Th.Varopoulos, The functions that operate on $B_0(\Gamma)$ of a discrete group, Bull.Soc.Math.France 93(1965), 301 - 321.

- [12] M.Zafran, The functions operating on multiplier algebras,
J.Functional Analysis 26(1977), 289 - 314.
- [13] M.Zafran, The dichotomy problem for homogeneous Banach
algebras, Ann.Math. 108(1978), 97 - 105.
- [14] M.Zafran, On the symbolic calculus in homogeneous Banach
algebras, Israel J.Math. 32(1979), 183 - 192.
- [15] A.Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge: The
University Press, 1959.
- [16] J.P.Kahane, Séries de Fourier Absolument Convergentes,
New York: Springer-Verlag 1970.