

K_ETpic の利用と教材発掘 — 線形代数と微分方程式を中心に —

木更津工業高等専門学校・基礎学系 金子 真隆 (Masataka Kaneko)

Fuculty of Fundamental Research,

Kisarazu National College of Technology

東邦大学・薬学部 高遠 節夫 (Setsuo Takato)

Fucluty of Pharmaceutical Science,

Toho University

1 はじめに

近年のヨーロッパでは、数式処理システム (CAS) や Web ベースの教材利用に代表されるテクノロジーが数学教育に及ぼす効果や、それらを用いた教材開発の可能性に関して盛んに研究されている。中でも、GeoGebra を中心とする Dynamic Geometry Software (DGS) の利用については、CAS に近い機能が装備されつつあることに伴って、本来その利用が想定されていた初等幾何にとどまらず、幅広い分野における利用が模索されつつある。これは双対的に、DGS の機能を充実させつつある Mathematica などの CAS にも当てはまる。筆者は、これまで参加した数学教育に関する国際会議等の場で、そのいくつかの実例を目にし、テクノロジーの教育利用が進展するスピードの速さを肌で感じてきた。一方で、使用デバイスの優位性を強調しようとするあまり、必ずしもニーズが大きいとは思われないトピックの探求ばかりが深化してしまったり、必ずしも効果的とは思われない教材提示の仕方に固執されてしまったりという危惧が小さくないことも痛感した。それぞれのデバイスがその特性に応じていかなる効果を発揮しうるか、慎重に整理されねばならない時期に入りつつあると考えられるのである。

本稿は、われわれが開発してきている K_ETpic がもたらす教育効果や教材開発の可能性について検討することを目的としている。K_ETpic は CAS に付属するマクロパッケージであって、CAS の計算機能・プログラム機能を生かしつつ、TeX 文書中に正確で表現力豊かな図を手軽に挿入するためのものである。過去の本講究録にも多く紹介されているので (7) – (12)), 詳細な説明はそれらに譲るが、白黒の線画を基本とし、大量印刷媒体上にコピーしても図の正確さや見易さが維持されることから、コスト的な制約の多い教科書や印刷配布教材への挿図ツールとして、他では得がたい魅力を持っているといえる。中でも、空間図形の描画については、他のデバイスとは大きく異なる特質を持っている (7)). 昨年からの 1 年間に限っても、統計科学への利用を主用途とする無償ウェア R への移植がほぼ完成し (6)), K_ETpic を数学教育において活用するための基盤がさらに整備されつつある。CAS ごとの K_ETpic のパッケージや関連するサンプルは

<http://ketpic.com>

より無料でダウンロード可能である。

我々開発グループのメンバーは、KEPic を用いて作成された教材を実際の授業で使用してきているが、それらの教材が持つ教育効果については、断片的に調べられてきただけである(2),12)). KETpic は CAS の活用を背景としているので、探求的・実験的な使い方が可能なのではないかとすることは、開発当初から想定されてきた(1))。これは DGS の教育利用にも通じる発想である。しかし、次節に触れるアンケート調査や教科書調査を積み重ねるうちに、もっとオーソドックスなテーマの中に、KETpic が高い教育効果を発揮できる余地が数多く残されているのではないかとすることが、次第に開発グループの中で意識されるようになってきた。2) や 12) で扱われた多変数の解析や、10) で扱われた線形代数は、そのような意識の中で選ばれてきた分野でもある。本稿では、こうした見方を一歩進め、印刷配布教材や教科書で図を用いることの困難さから、これまで暗黙のうちに避けられてきたトピックを、KETpic を用いることにより積極的に取り上げうる可能性について示してみたい。

2 教科書・印刷配布教材中での図利用の実態

KEPic に限らず、図作成ツールを数学教育で有効に利用する方法を追求するには、教科書や印刷配布教材の中で図が用いられている現状、およびニーズについて把握しておく必要がある。このため、我々KETpic 開発グループは、全国の大学・高専の教員を対象としたアンケート調査、および大学初年級向けの教科書に関する実態調査を実施した。その結果についてはすでにまとめて報告したが(13))、ここでは本稿の論旨に直接関係する部分に限定して、その結果を紹介する。

アンケートでは、まず印刷配布教材で図を用いる頻度について尋ねたが、「よく使う」「比較的使う」とした肯定的な回答は少数派にとどまった。ただし、担当科目によってその程度に差異があり、「線形代数」や「微分方程式」では「基礎数学」や「解析学」に比べて図の利用が手控えられている実態が明らかになった(図 1)。

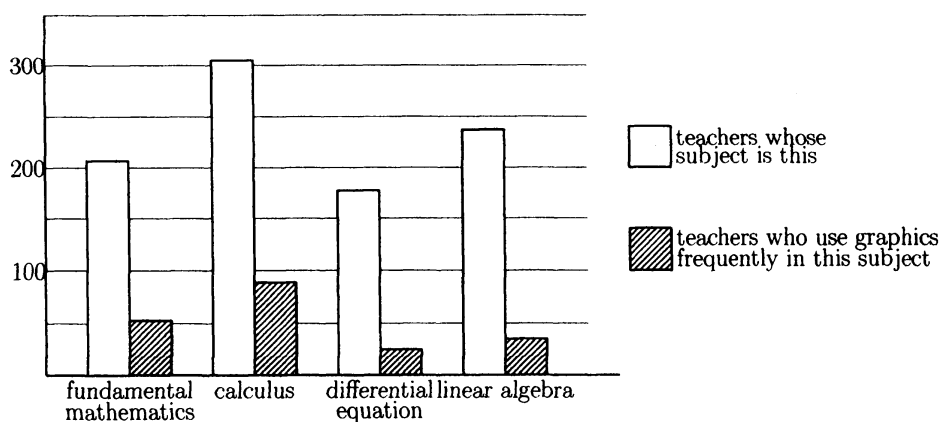


図 1 担当科目による図の利用頻度の違い

ただし、一口に「手控え」と言っても、その理由は分野によって異なる可能性があり得ることは念頭に置いておかななくてはならない。アンケートの中では、自由記述形式で「図を用いると効果的だと考えられる授業場面」を挙げてもらっている。その結果から判断すると、微分方程式などの解析系の科目については「正確な」図の挿入の難しさがネックとなっているのに対し、線形代数については図の利用が必要となるようなテーマを取り上げる「必要」が感じられないことが大きな理由となっているようである。実際、同一シリーズにおさめられる解析と線形代数の教科書をサンプルとして図の利用状況を調査したところ、図2に示す通り、いずれのケースでも「線形代数」における使用頻度が「解析」に比べて極めて低いという共通の傾向があることが明らかになった。

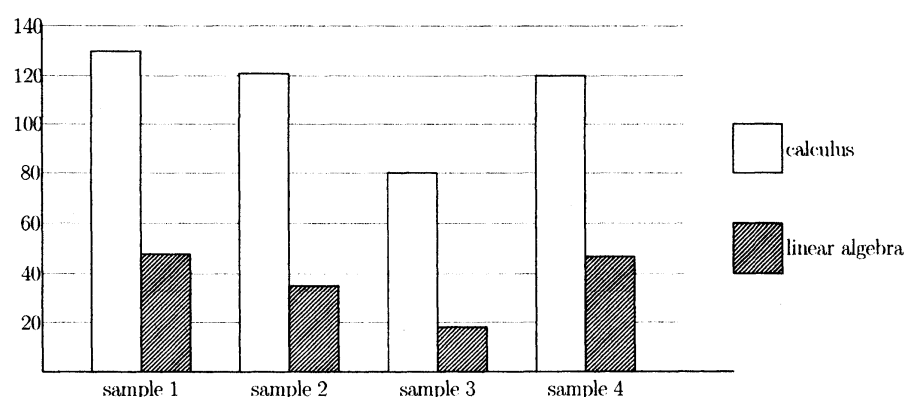


図2 同一シリーズの教科書における図の利用状況の比較

印刷配布教材の場合と違い教科書では、執筆者が仮に必要なと感じれば図を用意する余裕はあるはずなので、そもそもそのような必要を感じなかったとみるのが妥当であろう。

さらに、昨年度の線形代数に続き(10))微分積分についても、複数の日本語教科書をサンプルとして、分野別の図の利用状況について調べた(表1)。ここで、括弧内の数字は、3D-グラフィックスを用いている数で、内数である。

	sample 1	sample 2	sample 3	sample 4	sample 5	sample 6
高校数学	39			9		6
極限・連続性		23	8	14	17	6
微分	14	16	28	14に含む	16	15
積分	9	17	41	24	21	4
偏微分	16(16)	18(9)	14(5)	12(3)	13(6)	17(3)
重積分	39(10)	33(10)	28(16)	18(6)	32(9)	15(6)
級数		0	0	0	3	3
微分方程式		0	1			
ベクトル解析				17(8)	32に含む	22(13)
合計	117	107	120	94	102	88

表1 解析の教科書における図の利用状況

この結果を見ると、正確な図が要求される級数や微分方程式の分野で図の利用が進んでいないことがわかり、上述のアンケートの結果とも符合する。また、多変数の解析で、図の利用に対する強いニーズがあるものの、3D-グラフィックスの利用が十分に行えているか、若干の不安を抱かせる結果である。これまた、平面図形の場合と比べ、空間図形の描画の場合に $\text{T}_\text{E}_\text{X}$ による描画の利用率が下がるというアンケートの分析結果と一致する。

一方線形代数については、新たに複数の英語教科書をサンプルとして、分野別の図の利用状況について調べた。詳細は 13) に譲るが、2・3次元のベクトル幾何の概念説明で図を多用している教科書ですら、線形空間やその基底など、ユークリッド空間以外の空間に一般化される概念の説明に当たっては、ごく少数の図しか用いていないという顕著な傾向が明らかになった。これは、線形代数の配布教材や教科書において図の使用が少ない原因として 10) で指摘した

1. 線形代数では一般次元の話が多く扱うが、教材中に描画できるのは高々3次元までであり、図を用いてしまうとこうした一般性に対する理解を阻害するのではないかと考えられがちなこと。
2. 逆に概念図として、2次元の図では陳腐になりがちなので、最低でも3次元の図を用いたいというケースが少なくないが、見やすい図を描くのは必ずしも容易ではないこと。

という筆者の想定を強く支持する結果だと考えられる。

3 教材選択に関する教育的枠組み

序文に述べた通り、本稿ではテーマや教材選択の幅を広げる可能性を中心的な課題に据えている。特に、図の利用に不自由を感じるがために、教員が無意識のうちに選択の幅を狭めていないかという問題意識を持っている。たとえば、過去の先行研究 (14), (15)) により、線形代数における図 (または幾何的モデル) の利用が有効であり得ることが実証されているにもかかわらず、前節の結果は印刷配布教材と教科書の両者に通じて、利用が不十分である実態を示しているからである。このような問題を扱うためには、そもそも教員がどのような要因に従って教材を選択しているかという点について整理しておく必要がある。その上で

1. 図 (または幾何的モデル) の利用が不十分な理由は何か。
2. 前項の不十分さによって教育上のどのような問題が発生するか。

考察すべきであろう。

上述の整理をするために、本稿では G. Harel が提唱した 3 原理に基づくことにする。これは、数学的概念を学んだり教えたりする上での必要条件を didactical な原理としてまとめたもので (16))、以下に簡単に振り返っておくことにする。各原理の名前と要約説明については、あえて日本語に訳出せず、原文に掲載されているものをそのまま記すことにする。

A. Concreteness

For students to abstract a mathematical structure from a given model, the elements of that model must be conceptual entities in the students' eyes.

線形代数の場合にこの原理に従うとすると、たとえば第1段階で基本概念を提示する際に R^2 - R^3 モデルを利用することや、その次の段階でユークリッド空間以外で3次元以下であるようなベクトル空間を利用することが推奨されることになる。そうすることによって、学生たちは、得られている結果がベクトル空間の公理のみに依拠するものであって、個々の元の取り方によらないことが理解できるだろうからである。

B. Necessity

For students to learn, they must see a need for what they are to be taught. 'Need' means an intellectual need, as opposed to a social or economic need.

やはりこの原理に従うとすると、問題解決活動を伴った授業が推奨されることになる。そうすることによって、学生たちは、問題を解決するために既存の概念を適用すると同時に、問題解決のプロセスで困難が生じた場合に概念の把握自体を修正していくことができるからである。この原理の背後には、授業の中に、数学的概念を抽象化する活動と、その一方で概念に対する実体的なイメージがつねに把握できているような状況とが並存していなくてはならないという考え方がある。こうした経験を積ませることで、学生たちに、現在彼らの学んでいることが、問題や困難の解決に直結するのだという感覚を植えつけなくてはならないということである。

C. Generalizability

When instruction is concerned with a concrete model, the instructional activities within this model should allow and encourage the generalizability of concepts.

この原理は、それ以前の2つと相補的である。とりわけ、Necessity principle との整合性には注意が払われなければならない。さもないと、学生たちには、新たな概念を生み出す知的な必要性を実感させられないからである。

Concreteness principle を満たすために、教員は授業で用いる題材に具体性・現実性を持たせる必要があるが、そのための有力な手段の一つがグラフィックスの利用である。以上の3原理を踏まえると、前節に示したアンケート調査・教科書調査の結果は、特に線形代数における図の利用やテーマ選択について、以下の2つの問題を強く示唆しているものと考えられる。

1. Generalizability principle を満たすためには、大なり小なり「形式化」のプロセスが不可欠であり、いうまでもなく公理的な取り扱いがその最も典型的な方法である。そもそも一般線形空間論は、数学のいくつかの対象を統一的に扱うことを目指した理論なので、解析学や幾何学に比べ、公理的な取り扱いをより頻繁に求められることになる。グラフィックスの利用は R^2 - R^3 モデルに限らざるを得ないが、 R^2 - R^3 モデルにおいては一般線形空間の基本概念の多くが自明なものとなってしまう。このことが、教員に対して、一般線形空間論での図の利用をためらわせる大きな原因のひとつであると考えられる。
2. Necessity principle を満たすためには、学生に対して新たな概念を学ぶ動機付けとなるような例を与えることが欠かせない。そのためには、基本概念の魅力的な応用例を探さなくてはならない。そうした応用例を提示するためには、同時に高品質のグラフィックス、特に 2D-グラフィックスより 3D-グラフィックスが求められることが多い。結果として、不十分な例示のまま抽象的概念が提示され、そうした概念が学生の目に今ひとつ現実味をもって映らないという結果を招いていると考えられる。特に、工学系の学生を対象とした基礎教育において、現実味に欠けた抽象概念の学習に動機付けを与えるのは至難である。

4 $K_E Tpic$ が誘因となった教材選択の例

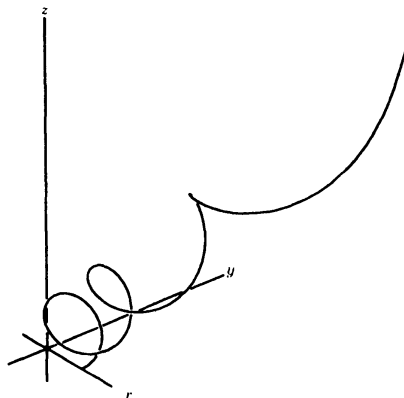
筆者は昨年度の講究録 (10)) でも、線形代数の基本概念の効果的な説明図を $K_E Tpic$ によって作成できた例を示した。しかし、それらはあくまで $K_E Tpic$ の優れた 3D-グラフィックス描画能力を使って授業テキストや印刷配布教材に効果的な図を入れてみたという次元にとどまっており、本稿で課題としているような、学生の動機付けとなり得る応用例の追求とは程遠いものであった。そこで本節では、この 1 年間に得られた応用例を 2 つ紹介していくことにしたい。

ひとつめの例は、微分方程式の数値解を計算し、3次元の解曲線を自動的かつ手軽に (実際に `Deqplot` というコマンドを用いるだけである) 描画させることができるという $K_E Tpic$ の能力 (3)) を併せて利用した例である。

問題 次の連立微分方程式の解曲線は、右図に示すとおりである。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z & x(0) = \sqrt{2} \\ \frac{dy}{dt} = x - z & y(0) = 0 \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z & z(0) = 0 \end{cases}$$

この解曲線があるひとつの円柱上に存在していることを示せ。



解

与えられた連立微分方程式は次のように行列表示されるので

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = A\vec{p} \quad \vec{p}(0) = \vec{p}_0$$

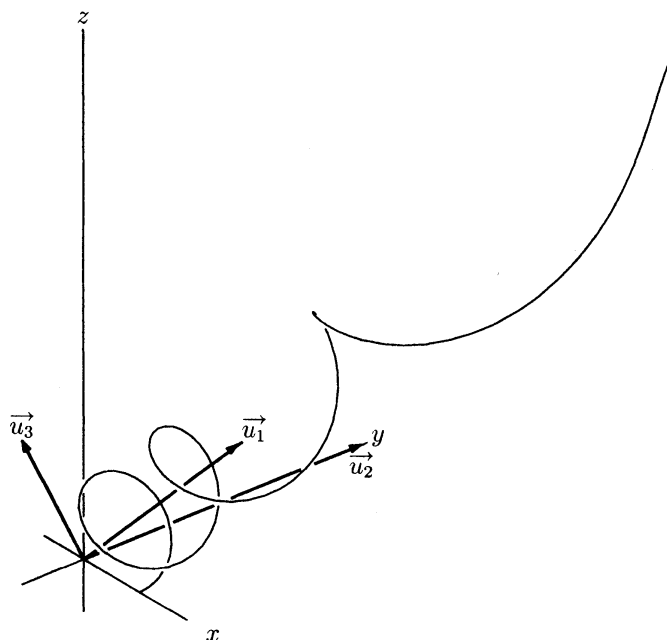
$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

その解は $\vec{p}(t) = \exp(At)\vec{p}_0$ により与えられる. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおくと

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ が成り立つ. よって, 下図に示すように

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

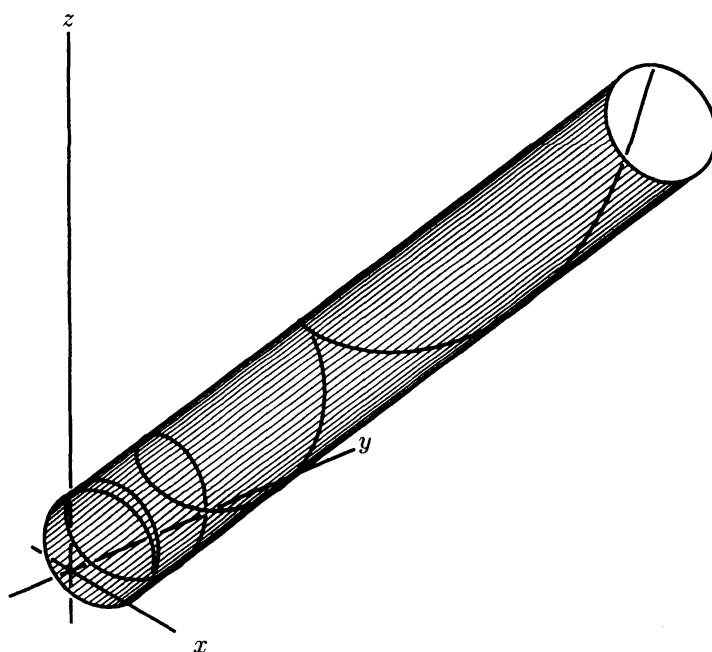
とおいて $\vec{p}(t) = X(t)\vec{u}_1 + Y(t)\vec{u}_2 + Z(t)\vec{u}_3$ と表示してみると,



次の等式が成り立つことになる.

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos \sqrt{2}t & -\sin \sqrt{2}t \\ 0 & \sin \sqrt{2}t & \cos \sqrt{2}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \\ Z(0) \end{pmatrix}$$

従って, 解曲線は下図の円柱上に存在することが示される.



この例は, 言うまでもなく, ユークリッド空間の基底を取り替えてみることにより, 微分方程式の解曲線の構造が一気に明らかになることを教えるために作られた. K_ETpic に装備された空間内の曲線の隠線処理をする機能を活用することによって, 豊かな鳥瞰が与えられていることに注意しておきたい.

ふたつめの例は, K_ETpic による 3 次元描画が一般線形空間論の学習にもたらす効果を検証すべく, 2010 年夏に少人数形式の実験授業で実際に用いてみた教材である. 実験授業の対象者は木更津高専の 5 年生 8 名で, 大学 2 年生の年齢に相当する. 彼らは前年度までに, (外積を含む) $\mathbb{R}^3$ のベクトルの基本的な取り扱いや, (固有値・固有ベクトルの計算を含む) 行列代数につき履修済みである. 加えて, この年の春に筆者が実施した 25 時間程度の集中講義の中で, 一般線形空間のいくつかの基礎的概念に関する「知識」や「基本的な計算技法」について既に教わっている状況であった (ちなみに, 昨年度の講究録 (10)) に紹介した図は, すべて集中講義のテキストの中で利用されている). ただし, そうした概念を導入する意義 (または価値) について, こちらが期待する通りに理解してくれているか否かは非常に不確かな状況でもあった.

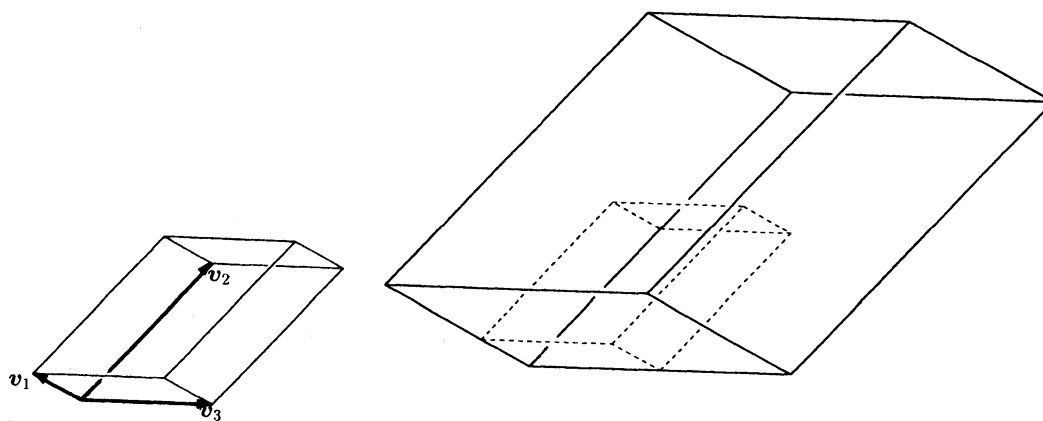
実験授業は、2時間程度の「補充授業」の形式をとったが、上述の G. Harel の提言に従って、実体としてはこちらが与えた問題に対して、最低限の誘導に従って解答させる「演習」に近いものとなった。目的としては、基底の取り替えと、それに伴う線形写像の表現行列への影響を考えることの意味を学生に理解させることを掲げた。このような目的に沿った教材としてすぐ思いつくのは「固有値・固有ベクトルの幾何的意義付け」であるが、これは集中講義の中で既に扱ったので、対角化不可能な線形変換(すなわち Jordan 標準形が現れるケース)の幾何的構造にスポットを当てることにした。教育効果の検討は、KEPic により作成された図を提示する前後で、対象学生の推論過程にどのような影響がでるかを観察することにより行うことにした。具体的に、実験授業のフローは以下の通りである。

まず、予備問題として下記のものを与え、対角化可能な線形変換のケースで「固有値・固有ベクトルの幾何的意義付け」の復習をさせた。問題文とともに、図も印刷配布教材の中に与えておいた。

予備問題

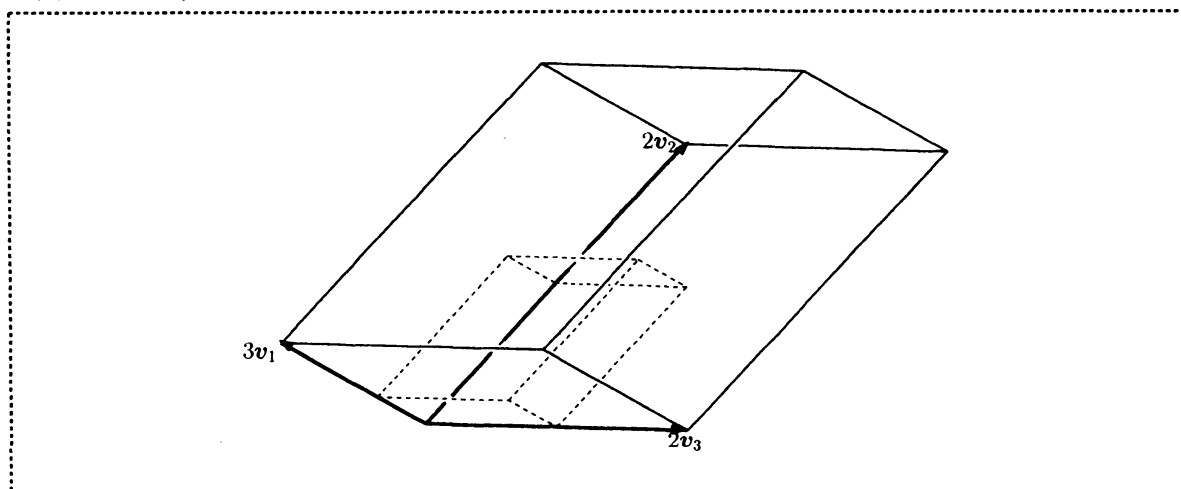
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

1. A により与えられる線形変換によってある領域 D が写された像を $A(D)$ とするとき、 D と $A(D)$ の体積比はどうなるか。
2. A の固有値・固有ベクトルを計算せよ。
3. $\det A$ と A の固有値との関係を述べよ。



上の図は長さの比や形につき正確に描かれているので(実際には方向も正確である), 学生たちはこの線形変換の幾何的構造について、固有ベクトル v_1, v_2, v_3 とその像とを比べることで、直感的イメージを得ることができる。結果的に、計算時間も含めて、20分以内に全員が正しい結論に到達できた。なお、予備問題の解答中は、学生相互の相談も許容した。

念のため次の図を印刷して配布すると同時にプロジェクターの画面上で提示して正解を確認したが、ほとんどの学生は「またあれか」という反応であった。



続いて、以下の本問題を与えることになるが、基本的に問題の構成が同じであるだけでなく、線形変換の固有値 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ やそれらに属する固有ベクトル v_1, v_2 として、予備問題と同じものが使えるように仕組んでおいた。ただし、対角化は不可能であって、重解の固有値に属する広義固有ベクトルとして予備問題と同じ v_3 を用いることができるように作られている。従って、学生たちは予備問題で用いた図をそのまま用いて本問題の考察を行うことができるわけである。

なお、学生が設問5までの計算を進める過程で以上のことを指摘する以外は、こちらからヒント等を出すことはせず、また、学生相互の相談も禁じた。

本問題

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

1. B により与えられる線形変換によってある領域 D が写された像を $B(D)$ とするとき、 D と $B(D)$ の体積比はどうなるか。
2. B の固有値・固有ベクトルを計算せよ。 B は対角化不可能であることを示せ。
3. B の固有値 λ とそれに属する固有ベクトル v であって、次の方程式

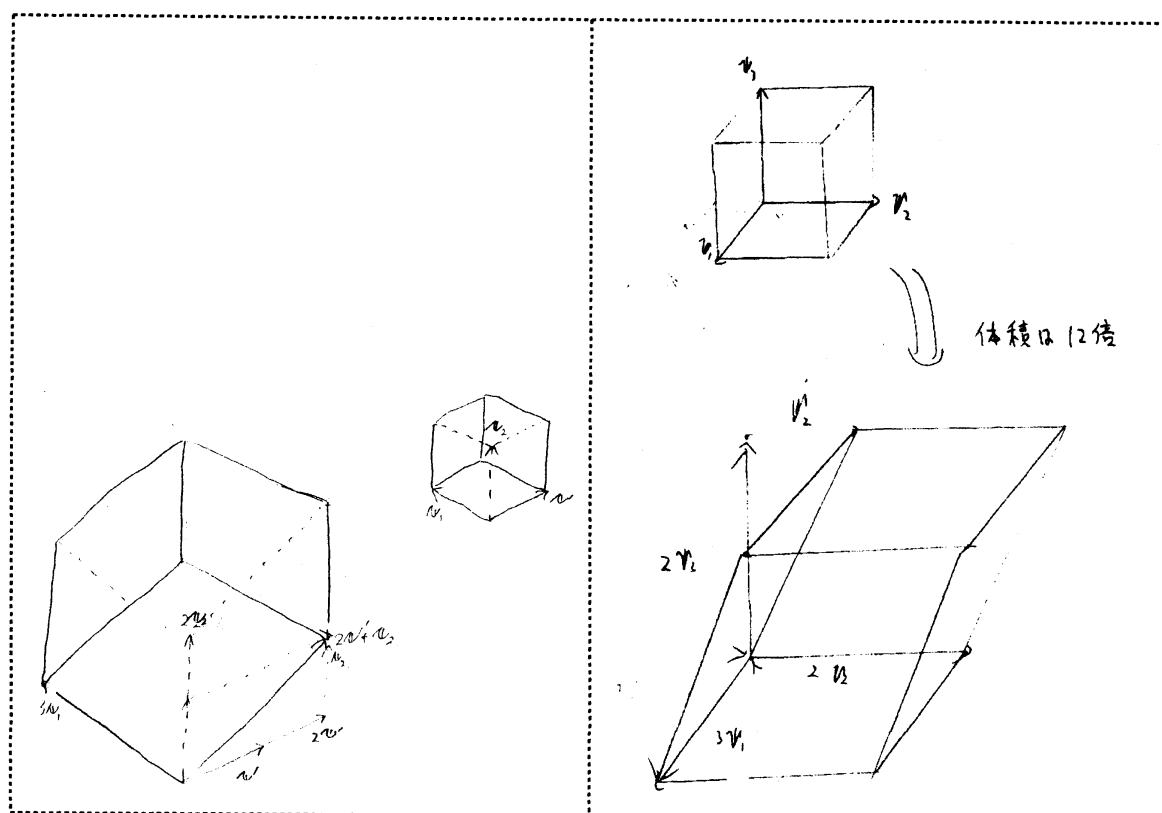
$$(B - \lambda I)v' = v$$

の解となるベクトル v' が存在するものを求めよ。

4. 2. で求めた B の2つの固有ベクトルと、3. で求めたベクトル v' が $\mathbb{R}^3$ の基底をなすことを示せ。
5. 4. で考察した $\mathbb{R}^3$ の基底に関する、 B で与えられる線形変換の表現行列を求めよ。
6. B で与えられる線形変換について考察し、 $\det B$ と B の固有値との関係を述べよ。

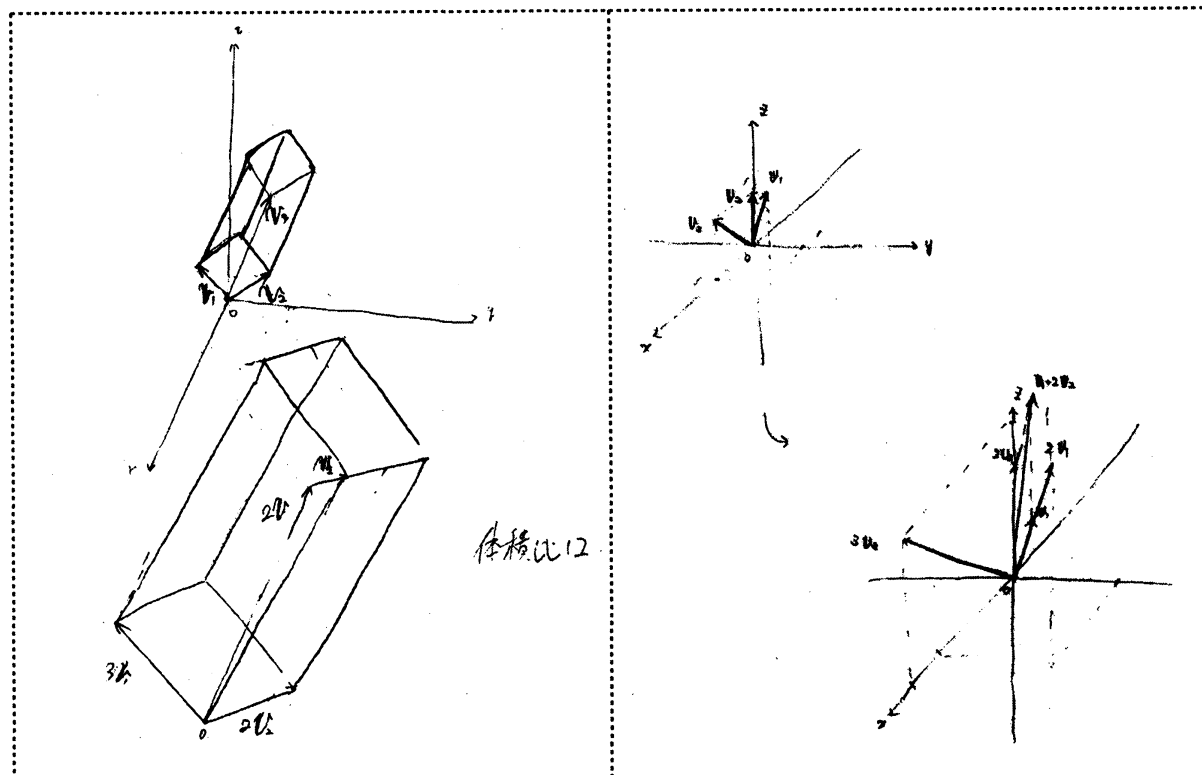
設問5の結果はJordan標準形となるが、それまでの集中講義の中でJordan標準形を得るための計算過程を扱ってあったので、設問1から設問5までの正解を得るのに学生たちはそれほど時間を要しなかった。ハイライトとなるのは設問6であり、KEPicにより作成したヒントとなる図(図3)を配布する以前と以後とで答案用紙を分け、図3が学生の推論過程に及ぼす影響を追跡できるようにした。集中講義の中では、基底の取り替えが表現行列に与える影響について知識としては与えていたものの、それについての組織的な説明や動機付けとなるような例は全く与えていなかったで、実際に学生たちがどのように反応してくるかは全くの手探り状態であった。

結果的に、適切な図を描いて自力で幾何的な構造を認識できたのは2名にとどまった。次の図は彼らが実際に描いたものであるが、基底の取り方は本質的ではないことを既に把握しており、基底が正規直交に近い場合の図を描いている。



他の6名は30分経過しても幾何的構造を的確に把握できず、納得できる解答を得ることができなかった。以上の結果は、行列計算への習熟や抽象的な概念の定式化に焦点を当てたカリキュラムによっては、一般的な学生に基底の取り替えの意義を理解させるのが容易でないことを強く示唆している。

この6名中の2名は次の図を描いたが、彼らはある基底に関する線形写像の表現行列の定義については正しく理解していることがわかる。自然の流れとして、予備問題に現れた基底 v_1, v_2, v_3 を用いればこの線形変換の幾何的構造が理解しやすくなることを予測したわけだが、残念ながら v_3 方向にずれることによって平行六面体の体積が保たれることを図から判断することができなかった。



この結果は、上記のような直線的な形を扱う比較的簡単なケースであっても、一般的な学生にとって、推論の助けとなるような図を手書きで描くことがそれほど容易ではないという実態を示している。

残る4人の学生は、適切な図を描くことができないか、または次の例に示す通り行列代数の計算に拘ってしまつて、折角求めた基底を利用して考察することができなかった。

$$\begin{aligned}
 & \text{det} B = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
 & \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 = 2 \times 2 \times 3 \\
 & \text{影響なし} \\
 & \text{三角行列の行列式} = \text{対角成分の積} \\
 & \text{基底の2倍} \\
 & \text{上半分は体積に多少影響するかい} \\
 & \text{(形状は変える)} \\
 & \downarrow \\
 & \text{2倍された基底を辺に持つ} \\
 & \text{平行六面体の体積比は} \\
 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3
 \end{aligned}$$

設問6への着手から30分ほどが経過し、正解に達しなかった学生の手がほとんど止

まってしまったタイミングで、最後のヒントとなる図3をコピーしたプリントを配布した。

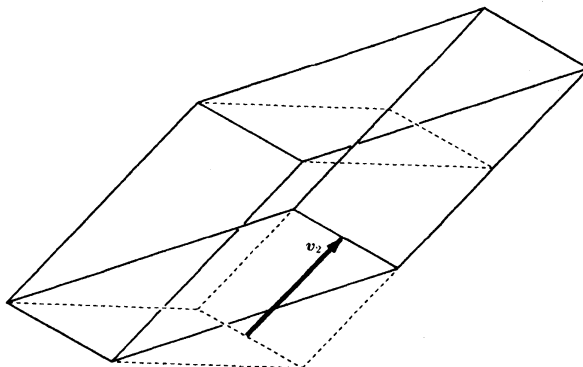
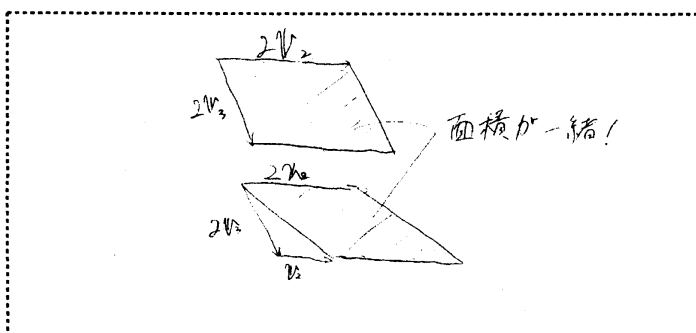


図3 最終ヒント

その結果、全受講者が10分以内に結論に到達した。次の図は、学生が記した最終解答の一例である。



15)に指摘される通り、一般次元における多くの結果は、適切に選ばれた2次元の部分空間における考察から推論することができる。上に示したサンプルは、まさにこの指摘に合致する。KEPicによる3D-グラフィックスでは立体の奥側を見通すことができるが、こうした特徴がこの学生の推論を大きく助けたことは想像に難くない。

受講者全員が解答を終えた後で、図の利用を中心にこの実験授業に関するアンケートをとったが、学生たちの反応は以下のようであった。

1. 図3の中の v_2 の矢印を見た瞬間、予備問題と本問題との関係性を明確に把握することができた。
2. 図3のヒントがなかったら、線形変換の構造を理解するのにもっと時間がかかっていただろう。
3. $v_2 + 2v_3$ の矢印も付け加えた方がよいのではないだろうか。
4. 2つ以上の広義固有ベクトルが現れる場合には、線形変換の構造はどうなるのだろうか？
5. もっと隠線を消した方がよい。

6. 自分の場合は、集中講義の中で今回使われている図と同じような図を見てきたのでなんとかついてこれたが、初心者がこの図を見て本質を理解するのは難しいのではないか。

学生のサンプル数は少ないものの、図3を見せた後に学生の推論状況に大きな変化が出ていることから、正確な $\text{\LaTeX}$ 中の描画が学生の推論の大きな助けとなり得ることが実証されたものと考ええる。さらに、アンケートの中の学生コメント1.や2.から、鳥瞰豊かな $\text{\LaTeX}$ の3D-グラフィックスが学生の推論を正しい方向に導いたと見てよいであろう。教員対象のアンケートの中では、「図は板書で提示すれば充分」とする回答も少なくなかったが、一般的な数学教員にとって、黒板上で図3と同じ質の図を描くことはそれほど易しいとは言えないであろう。

また、学生コメント4.については、数学の問題としては考え得るとは思っていたが、学生からこのようなコメントが実際に寄せられるとは想定していなかった。このような結果を見ると、魅力的な図を提示すること自体が、学生の intellectual need (§3参照)を喚起することもあり得ると考えるべきであろう。ちなみに、次の図4をさらなる学習のための資料として配布しておいた。

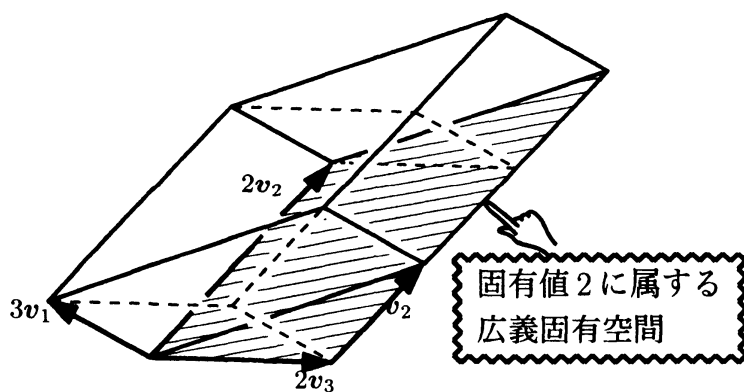


図4 「さらなる学習のために」

ただし、学生コメント5.や6.を見ると、 $\text{\LaTeX}$ の3D-グラフィックスを有効に利用するためには、教員・学生双方に工夫や習熟が求められることも同時に明らかになったと言える。

5 結論と今後の課題

線形代数、とりわけ一般線形空間論の教育と学習は、重大なジレンマを抱えている。基礎概念の多くは、ユークリッド空間以外の多くの対象に当てはめられるような普遍性を備えており、それらを学習する意義は、異なった対象を同一視するという高度に抽象的な思考過程を経て初めて実感される。学生をそうした思考過程に向けて動機付けるた

めには、グラフィックスを伴うような実体性を持った応用例がどうしても必要である。ところが、グラフィックスが扱えるのは、基礎概念の多くが自明なものとなってしまう R^2 - R^3 モデルにほぼ限られる。結果的に、よほど工夫しないことには、基礎概念の存在意義を見失わせることなく興味深い応用例を探すことは難しい。この難しさが、本稿のタイトルを教材「選択」でなく教材「発掘」とした理由でもある。描かれている図自体はそれほど複雑なものではないので、必ずしも K_ETpic だけがこうした問題と結びつくわけではないとの指摘もあり得るだろう。実際、2次元の固有値・固有ベクトルの動的な教材を DGS により作成しようという試みが存在する。しかし、そのような「情報量豊富な」提示よりも、ある意味で無駄を削ぎ落とした K_ETpic による描画を用いる方が、学生にとって概念の本質に迫りやすいのではないかと強く感じている。その根拠はいろいろあるが、何よりも線形代数というものの性格が Dynamic ではなく Static だからである。

§4の実験授業により、K_ETpic による描画の持つ教育効果について、一定の手応えを得ることはできた。しかし、検証の対象となった図3を提示する以前の学生の解答状況は、筆者に対してこうした手応えを吹き飛ばすほどの衝撃を与えるものであった。実際、受講者の木更津高専における在籍学科は全5学科中2つに限られ、5年間ほぼ均質な数学の授業を受けてきていることになる。加えて、一般線形空間論については、筆者の集中講義を全員同じように受けて、K_ETpic による描画も全く同等に用いられてきたはずである。にもかかわらず、§4に示した通り図3を提示する以前の解答状況は大きくばらついている。このことは、本稿で取り上げたような幾何的色彩の強いテーマを用いたとしても、グラフィックスの及ぼす教育効果を調べるのがいかに難しいかを鮮明に示している。描画ソフトそのものや図の提示方法の改善に結びつく本質的な知見を得るためには、少なくとも、調査対象となる学生ひとりひとりが教員の設定する授業デザインにどのように組み込まれているかということが致命的に重要な前提であり、多くの場合、これは個々の学生ごとに大きくばらついている。従って、たとえ多くのサンプルを用いた問題正解率への影響を調査したとしても、それだけではそのデバイスを「用いた方が良いか否か」という程度のことしか見えてこないであろう。

このように考えてくると、K_ETpic を含むさまざまなデバイスの教育効果を検証する場合、その前提として学生の授業に対するニーズや履歴に応じて期待される効果を分類することが求められ、デバイスや教授方法の開発も、それに対応してケースバイケースで行うことが今後の課題となると思われる。

謝辞

本研究は、科学研究費補助金基盤研究C(課題番号 20500818)の補助を受けています。

参考文献

- 1) Kaneko M., Abe T., Sekiguchi M., Tadokoro Y., Fukazawa K., Yamashita S. & Takato

- S.: “CAS-aided Visualization in $\text{\LaTeX}$ documents for Mathematical Education”, Teaching Mathematics and Computer Science, Vol. VIII, Issue I, pp. 1–18, 2010
- 2) Kitahara K., Kaneko M., Abe T., Yamashita S., & Takato S.: “Towards a more effective use of 3D-graphics in mathematics education”, to appear in The International Journal for Technology in Mathematics Education, Vol. 17, No. 4, 2010
 - 3) Koshikawa H., Kaneko M., Yamashita S., Kitahara K., & Takato S.: “Handier use of Scilab to draw fine $\text{\LaTeX}$ figures”, Proc. 2010 International Conference on Computational Sciences and its Applications, IEEE press, pp. 39–48, 2010
 - 4) Fukazawa K., & Takato S.: “Teaching materials of physics about Lorentz contraction generated by $\text{\KerTeXpic}$ ”, Proc. 2010 International Conference on Computational Sciences and its Applications, IEEE press, pp. 24–32, 2010
 - 5) Akemi G., Iglesias A., & Takato S.: “ $\text{\KerTeXpic}$ Matlab binding for efficient handling of fractal images”, International Journal of Future Generation Communication and Networking, Vol. 3, No. 2, pp. 1–14, 2010
 - 6) Shunji O., & Takato S.: “High-quality statistical plots in $\text{\LaTeX}$ for mathematics education using R-based $\text{\KerTeXpic}$ plug-in”, Proc. 2010 Asian Technology Conference in Mathematics, pp. 266–275, 2010
 - 7) 金子真隆, 阿部孝之, 関口昌由, 山下哲, 高遠節夫: 「 $\text{\KerTeXpic}$ による曲面描画と教育利用」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.1-10, 2009
 - 8) 泉源, 深澤謙次: 「 $\text{\KerTeXpic}$ の工学教育への利用と Maxima への移植」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.37-44, 2009
 - 9) 北原清志, 高遠節夫: 「級数を扱う授業における $\text{\KerTeXpic}$ で作成した挿図教材の使用」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.90-105, 2009
 - 10) 金子真隆, 阿部孝之, 泉源, 山下哲, 深澤謙次, 北原清志, 高遠節夫: 「線形代数学の教科書における挿図の利用について – $\text{\KerTeXpic}$ 利用の可能性を中心に –」, 京都大学数理解析研究所講究録 1674, pp.12–25, 2010
 - 11) 深澤謙次, 阿部孝之, 金子真隆, 北原清志, 山下哲, 高遠節夫: 「 $\text{\KerTeXpic}$ の Maxima への移植と Sage への移植の試み」, 京都大学数理解析研究所講究録 1674, pp.31–39, 2010
 - 12) 北原清志, 高遠節夫: 「全微分に関する図入り教材の作成例とその研究授業報告」, 京都大学数理解析研究所講究録 1674, pp.132–145, 2010
 - 13) Kaneko M. & Takato S.: “The effective use of $\text{\LaTeX}$ drawing in linear algebra”, to appear in The Electric Journal of Mathematics and Technology, 2011
 - 14) Carlson D., Johnson C.R., Lay D.C. & Porter A.D.: “The linear algebra curriculum study group recommendations for the first course in linear algebra”, The College Mathematics Journal 24-1, pp.41-46, 1993
 - 15) Gueudet G.: “Using geometry to teach and learn linear algebra”, Research in Collegiate Mathematics Education IV, pp.171-195, American Mathematical Society, 2006
 - 16) Harel G.: “Three principles of learning and teaching mathematics”, On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer, Dordrecht, pp.177-189, 2000