

双曲型混合問題が well-posed になるための必要条件について

京大 エ 梶谷邦彦

§1. 序

混合問題が十分なめらかな $\delta\epsilon$ に対し、一意的に解をもつかという問題に対する研究は、定係数の場合には多くの人々によってなされている。例えば、Hersh は [5] において 1 階 system について global な解の存在を示し、又 [6] において高階 system について解の存在並びに解の有限伝播性について考察しているが、その証明は complete なものではなかったように思われる。しかし Kasahara は [8] において解の存在について complete な証明をふえ、さらに Shirota は [9] において解の有限伝播性に関してさらに詳しい研究を行っている。最近 Sakamoto は [11] において高階単独方程式に対する解の存在及び解の有限伝播性についての完全な characterize を行っている。それは、解の存在及び有限伝播が成り立つため必要十分条件は、単に Lopatinski determinant が 0 にならないだけでなく、それが

と方向に *hyperbolic function* になることである。すなわち有限伝播が成り立つためには、境界条件の中から *parabolic* 的な要素を除くことが必要であるという。Heush が [13] において指摘したことを、完全に *characterize* したものであることが出来る。

さて、上にのべた問題を変係数にした場合にどうなるかというのが本稿の目的である。変係数の場合にこの種の問題はあまりなされていない。十分性に関しては Ikawa が [3] において 2 次元 Laplacian の *oblique* な *boundary condition* ももった問題に関して、解の存在と解の有限伝播を導いている。又、Chazarain [1] & Beals [2] は *semi-group* の理論を用いて Gevrey-Class の解の存在を導いている。必要性に関しては、[7] において *analytic* な係数をもった 2×2 system に対して、 ε -well posed であるためには Lopatinski 条件が必要であることを示している。

ここでの目的は [7] の結果を一般の system に拡張することである。すなわち、与えられた方程式系がなめらかな解をもつか有限伝播をもつならば、ある条件の下で、方程式系の principal part から成る Lopatinski determinant は 0 にならない。この問題は、Cauchy 問題の場合に、Lax [9] & Mizohata [10] が示したように、与えられた方程式系の Cauchy

問題がなめらかな data に対し、解をもちかつ有限伝播が成り立つならば、方程式系の principal part の characteristic roots はすべて real になるという問題と対応したものと考えてよいであろう。しかし、混合問題が Cauchy 問題と異なるところは単に解の存在と有限伝播のみから principal part に対して Lopatinski 条件は一般には成り立たないことを注意しておく。(c.f. [1])。それは Lopatinski determinant の中に explicit に低階の影響が現われるからである。変係数の場合もえられた問題が ϵ -well posed (解が存在しかつ有限伝播をもつ) ためには単に principal part のみならずその低階に対しても条件が必要であると思われるが、それは今のところまったくわかっていない。この問題は混合問題の今後の研究課題の一つとなるであろう。

§2. 問題の設定.

次の様な問題を考えよ。

$$(2.1) \quad \begin{cases} L[u] = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^k A_j(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j} - B(x,t) \right) u(x,t) = f(x,t) \\ u|_{t=0} = g(x) \\ P(x',t) u|_{x_k=0} = h(x',t), \quad x' = (x_1, \dots, x_{k-1}). \end{cases}$$

ここで、 L の係数及び P は十分なめらかとする。

A_j 及び B は $m \times m$ matrices とし、 P は $l \times m$ matrix とする。

仮定として次のものを置く.

[I]. L は hyperbolic である。すなわち $\sum_{j=1}^k A_j(x,t) \xi_j$ は実の固有値のみをもつ。又 $A_k(x',0,t)$ は non singular とする。

[II]. $P(x',t)$ の rank は l とし, l は $A_k(x',0,t)$ の負の固有値の数に等しい。

$$M(x',t; \lambda, i\eta) = A_k^{-1}(x',0,t) \left(\lambda - i \sum_{j=1}^{k-1} A_j(x',0,t) \eta_j \right)$$

と置くと, M は $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\eta \in \mathbb{R}^{k-1}$ のとき, 仮定[I]より real part が 0 になる固有値をもたず, real part が負になる固有値の数は l に等しい。 $E^\pm(x',t; \lambda, \eta)$ を M の real part 正(負)の固有値に対応する一般固有ベクトルから成る空間とする。 $M^\pm$ を M の次のような分解とする。 すなわち,

$$M^\pm(x',t; \lambda, i\eta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\pm} \xi (\xi - M)^{-1} d\xi,$$

ここで, $\Gamma_\pm$ は M の real part 正(負)の固有値のみを囲む Jordan curve である。

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_+} (\xi - M)^{-1} A_k^{-1}(x',0,t) (\xi - M)^{-1} d\xi$$

と置く。このとき仮定として,

[III] (i) $E^-(x',t, \lambda, \eta)$ は固有ベクトルのみで張られており

(ii) $\{E^- \cap (\operatorname{Ker} P \cap E^+)\} \cap \Lambda(E^- \cap \operatorname{Ker} P) = \{0\}$,
かつ $\operatorname{rank} \Lambda \geq \dim(E^- \cap \operatorname{Ker} P)$

$E_0^\pm = E^\pm \cap \ker P$, $E_1^\pm = E^\pm - E_0^\pm$ とかくと, [III] の (ii) は次のものと同等である。

(ii)' Λ は E_0^- から E_1^+ へ 1 対 1 onto である。

注意: 上の条件は $m=2$ の場合は次のものと同等である。

$$(2.2) \quad E^-(x, t; \lambda, 0) \cap \ker P(x, t) = \{0\}.$$

δ を正の数とする。 $\Omega(x_0, t_0) = \{(x, t); |x - x_0| \leq \delta(t_0 - t), t \geq 0, x_k \geq 0\}$, $G(x_0, t_0) = \Omega(x_0, t_0) \cap \{x_k = 0\}$, 並びに $D(x_0) = \Omega(x_0, t_0) \cap \{t = 0\}$ と表わすことにする。さて, 方程式 (2.1) が有限伝播をもつとは, 与えられた $\text{data}(f, g, h)$ がそれぞれ $\Omega(x_0, t_0)$, $G(x_0)$ 及び $G(x'_0, t_0)$ で 0 であれば (2.1) の解 $u(x, t)$ も $\Omega(x_0, t_0)$ で 0 になることである。

定義, 方程式 (2.1) が, 適当な compatibility conditions をみたすなめらかな $\text{data}(f, g, h)$ に対し, 解を持ち, それが有限伝播をもつとき, (2.1) は Σ -well posed であると呼ぶことにする。

注意. (2.1) が Σ -well posed ならば, Banach の closed graph Theorem より次の不等式が導かれる。すなわちある正の整数 n が存在して, ($\Omega_n = \Omega(x_0/n, t_0/n)$, $G_n = G(x'_0/n, t_0/n)$, $D_n = D(x_0/n)$)

$$(2.3) \quad \|u\|_{0, \Omega_n} \leq C n^d \left\{ \|L[u]\|_{1, \Omega_n} + \|u\|_{1, D_n} + \|Pu\|_{1, G_n} \right\}, \quad (n \geq 1)$$

が成り立つ。 $\|\cdot\|_{\Delta, \Omega}$ は $C^0(\Omega)$ の norm である。

定理. [I], [II] 及び [III] を仮定する。このとき, (2.1) が Σ -well posed ならば, 境界条件 $P(x;t)$ は次のものとみえた。

$$(2.4) \quad \text{Ker} P(x;t) \cap E^-(x;t; \lambda, \eta) = \{0\}, \quad \text{Re } \lambda > 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

注意. [III] の (iv) を仮定しなければ定理の結果はもはやなりたない。例えば,

$$\begin{cases} L = \frac{\partial}{\partial t} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ P = (0, 1) \end{cases}$$

は Σ -well posed であるが, (2.4) をみたさない。これは (2.2) をみたさないからである。定係数の場合は (2.1) が Σ -well posed でありかつ (2.2) をみたすことが, (2.4) が成り立つための必要十分条件である。(c.f. [11])。

§3. 定理の証明.

次の Lemma は IVRIY [4] からヒントを得た。

Lemma 3.1. (2.1) が Σ -well posed ならば, 次の不等式が成り立つ。

$$(3.1) \quad \|u\|_{0, \Omega(x_0, t_0)} \leq \text{const. } n^{\frac{1}{2}} \left\{ \|\tilde{M}_n u\|_{\Delta, \Omega(x_0, t_0)} + \|u\|_{\Delta, D(x_0)} + \|\tilde{P}_n u\|_{\Delta, G(x_0, t_0)} \right\}.$$

ここに,

$$\tilde{M}_n = A_n^{-1}(\frac{1}{n}x, \frac{1}{n}t) \left\{ n \frac{\partial}{\partial t} - n \sum_{j=1}^{k-1} A_j(\frac{1}{n}x, \frac{1}{n}t) \frac{\partial}{\partial x_j} - B(\frac{1}{n}x, \frac{1}{n}t) \right\},$$

$$\tilde{P}_n = P(\frac{1}{n}x', \frac{1}{n}t), \quad \text{である。}$$

この lemma は (2.3) から変数変換において容易に求まる。

さて、定理の結論 (2.4) が成り立たないとする。一般性
を失なうことなく、 $(x', t) = (0, 0)$, λ_0, z_0 , $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$ として
 $E^-(0, 0; \lambda_0, z_0) \cap \ker P(0, 0) \neq \{0\}$ とする。

Taylor 展開によつて、

$$\begin{aligned} \tilde{M}_n &= n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - M_0(D) \right) - \sum_{j=1}^{N_1} n^{-j+1} M_j(x, t, D) \\ &\quad + O(n^{-N_1}), \end{aligned}$$

$$M_0(D) = A_k^{-1}(0, 0) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{k-1} A_j(0, 0) \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

$$M_j(x, t, D) = \sum_{|\nu|+i=j} x^\nu t^i M_{i\nu} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \sum_{|\nu|+i=j-1} x^\nu t^i B_{\nu i},$$

$$\text{又, } \tilde{P}_n = P_0 + \sum_{j=1}^{N_2-1} n^{-j} P_j(x', t) + O(n^{-N_2})$$

$$P_0 = P(0, 0), \quad P_j(x', t) = \sum_{|\nu|+i=j} x'^\nu t^i P_{i\nu}$$

とかけよう。

$$M^0 = A_k^{-1}(0, 0) \left(\lambda_0 - i \sum_{j=1}^{k-1} A_j(0, 0) \eta_{j0} \right) \text{ とおく。}$$

$$\left(\eta_0 = (\eta_{10}, \dots, \eta_{k-1,0}) \right)$$

M^0 の固有値を ξ_j ($j=1, 2, \dots, l$) とし ($\operatorname{Re} \xi_j < 0$)、それに対応する固有ベクトルを h_j とする。簡単のため ξ_j ($j=1, \dots, l$) は相異なる

とす。 $\tilde{M}_n$ と $\tilde{P}_n$ に対して次の形のゼンゼン解を求め
 る。

$$(3.2) \quad u \sim \sum_j n^{-j} \sum_{p=1}^l e^{(\xi_p^- x_k + \lambda_0 t - i x' z_0) n} u_j^{(p)}(x, t),$$

$$\tilde{M}_n[u] \sim O(n^{-N})$$

$$\tilde{P}_n[u] \sim O(n^{-N}).$$

(3.2) による $\tilde{M}_n$ と $\tilde{P}_n$ は、

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \tilde{M}_n[u] = & \sum_{p=1}^l \left[n^2 (\xi_p^- - M^0) u_0^{(p)} + n \{ (\xi_p^- - M^0) u_1^{(p)} \right. \\ & + \left. \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - M_0(D) - M_1(x, t; \lambda_0, i z_0) \right) u_0^{(p)} \right] + \dots \\ & + n^{-j+2} \left\{ (\xi_p^- - M^0) u_j^{(p)} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - M_0(D) - M_1(x, t; \lambda_0, i z_0) \right) u_{j-1}^{(p)} \right. \\ & - \sum_{\substack{i+\Delta=j \\ \Delta < j-1}} M_i(x, t, \lambda_0, i z_0) u_{\Delta}^{(p)} - \sum_{\substack{i+\Delta=j-1 \\ \Delta < j-1}} M_i(x, t, D) u_{\Delta}^{(p)} \left. \right\} \\ & + \dots \left. \right] e^{(\xi_p^- x_k + \lambda_0 t - i x' z_0) n} \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{P}_n[u] = & \sum_{p=1}^l e^{(\lambda_0 t - i x' z_0) n} \left[P_0 u_0^{(p)} \Big|_{x_k=0} + \right. \\ & n^{-1} \left\{ P_0 u_1^{(p)} + P_1(x, t) u_0^{(p)} \right\} \Big|_{x_k=0} + \dots \\ & + n^{-j} \left\{ P_0 u_j^{(p)} + P_1(x, t) u_{j-1}^{(p)} + \sum_{\substack{i+\Delta=j-1 \\ \Delta < j-1}} P_i(x, t) u_{\Delta}^{(p)} \right\} \Big|_{x_k=0} \\ & + \dots \left. \right] \end{aligned}$$

(3.3), (3.4) において n に属する n の係数が順次 0 になるように $u_j^{(p)}(x, t)$ をきめてゆく。

まず,

$$(3.5) \quad \begin{cases} (\bar{\xi}_p - M^0) u_0^{(p)} = 0, & p=1, 2, \dots, \ell \\ \sum_{p=1}^{\ell} P_0 u_0^{(p)} \Big|_{x_k=0} = 0 \end{cases}$$

となるように $u_0^{(p)}$ ($p=1, 2, \dots, \ell$) をきめる。

今 $E^- \cap \text{Ker } P_0 = \{p_1, p_2, \dots, p_{\ell'}\}$ とする。 $C = (p_1, p_2, \dots, p_{\ell'})$ とおく。(3.5) の第 1 項より

$$(3.6) \quad u_0^{(p)} = \sigma_0^{(p)}(x, t) \bar{h}_p, \quad (p=1, \dots, \ell)$$

を得る。又 (3.5) の 2 次より

$$(3.7) \quad \sum_{p=1}^{\ell} u_0^{(p)} \Big|_{x_k=0} = \sum_{p=1}^{\ell'} \tilde{\sigma}_0^{(p)}(x, t) p_p.$$

よって,

$$(3.8) \quad (\bar{\xi}_p - M^0) u_1^{(p)} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - M_0(D) - M_1(x, t, D) \right) u_0^{(p)} = 0$$

$p=1, 2, \dots, \ell$

$$(3.9) \quad \sum_{p=1}^{\ell} \left(P_0 u_1^{(p)} + P_1(x, t) u_0^{(p)} \right) \Big|_{x_k=0} = 0$$

となる $u_1^{(p)}$ をさがす。(3.8) において $u_1^{(p)}$ が存在するためには、 $(\bar{\xi} - M^0)$ の left null vector を $w_{\bar{p}}$ とすれば、 $u_0^{(p)}$ は

$$w_{\bar{p}} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - M_0(D) - M_1 \right) u_0^{(p)} = 0$$

とみえなければならぬ。上の式に (3.6) を代入すると

$$(3.10) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - a_p(D) - b_p(x, t, D) \right) \sigma_0^{(p)} = 0 \quad (p=1, 2, \dots, l)$$

とす。 $z = z''$ $a_p(D) = \omega_p \cdot M(D) h_p^-$,

$b_p(x, t, D) = \omega_p M_1(x, t, D) h_p^-$ とす。 (3.10) の方程式は

係数は analytic なる (Cauchy-Kowalevski の定理) によつて,

(3.10) をみたす $\sigma_0^{(p)}(x, t)$ は存在す。 $p=1$ に (3.8) の特解 $\tilde{u}_1^{(p)}$ をかけば、一般解は

$$(3.11) \quad u_1^{(p)} = \sigma_1^{(p)} h_p^- + \tilde{u}_1^{(p)}$$

とかけよ。

(3.11) を (3.9) に代入して,

$$(*) \quad \sum_{p=1}^l \left(P_0 h_p^- \sigma_1^{(p)}(x, 0, t) + P_0 \tilde{u}_1^{(p)} \Big|_{x_k=0} + P_1 u_0^{(p)} \Big|_{x_k=0} \right) = 0$$

となる $\sigma_1^{(p)}(x, 0, t)$ が存在するようには $\sigma_0^{(p)}$ の初等値 $\tilde{\sigma}_0^{(p)}(x, t)$ を定めよ。

$$H^- = (h_1^-, h_2^-, \dots, h_l^-),$$

$$\sigma_1 = {}^t(\sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)}, \dots, \sigma_1^{(l)})$$

$$\tilde{\sigma}_0 = {}^t(\tilde{\sigma}_0^{(1)}, \dots, \tilde{\sigma}_0^{(l)})$$

とかけよ。

$$(3.12) \quad P_0 H^- \sigma_1 + \sum_{p=1}^l \left(P_0 \tilde{u}_1^{(p)} + P_1 u_0^{(p)} \right) \Big|_{x_k=0} = 0$$

とす。

仮定から $P_0 H$ の rank は $l-l'$ 故から, PH^- の left mul-vector

を $r_1, r_2, \dots, r_{l'}$ とすれば, $\left(R = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{l'} \end{pmatrix} \right) \tilde{u}_1^{(p)}$ は

$$(3.13) \quad \sum_{p=1}^l R(P_0 \tilde{u}_1^{(p)} + P_1 u_0^{(p)}) \Big|_{x_k=0} = 0$$

とみなければならない。上の式を $\tilde{\sigma}_0$ の関係式に直そう。
 そのため $\tilde{u}_1^{(p)}$ を (3.8) から具体的に求める。

$$Q^\pm = \frac{1}{2\pi i} \oint_{P_\pm} (\xi - M^0)^{-1} d\xi$$

とすると, $Q^+(Q^-)$ は E^+ (E^-) の E^- (E^+) にさう projection

である。 $RP_0 Q^+ \tilde{u}_1^{(p)} = 0$ に注意すれば, $Q^+ \tilde{u}_1^{(p)}$ を求めれば

よい。 $M^\pm = M^0 Q^\pm$ とおく。 (3.8) に Q^+ を operate して $\tilde{u}_1^{(p)}$ を

求めると, $Q^+ u_0^{(p)} = 0$ に注意する。

$$(3.14) \quad Q^+ \tilde{u}_1^{(p)} = (\xi_p^- - M^+)^{-1} Q^+ (M_0(D) + M_1(x, t, D)) u_0^{(p)}$$

とす。

$$(\xi_p^- - M^+)^{-1} Q^+ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{P_+} (\xi_p^- - \xi)^{-1} (\xi - M)^{-1} d\xi$$

に注意すれば (3.14) を (3.13) に代入すると, $\tilde{\sigma}$ についての

微分方程式とす。

$$(3.15) \quad T_0(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\sigma}_0 + \sum_{j=1}^{k-1} T_j(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\sigma}_0 + S(x, t) \tilde{\sigma}_0 = 0$$

$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}$

$T_0(0,0) = RP_0 \wedge C$ であり, $T_j(x, t)$ ($j=0, \dots, k-1$), $S(x, t)$ は analytic な $l' \times l'$ matrices である。

$\text{Ker}(RP_0) = E^- \cup (\text{Ker } P_0 \cap E^+)$ に注意すれば仮定 [IV] の (ii) より, $T_0(0,0)$ は non singular であることは明らかであろう。故に (3.15) をみたす $\tilde{\sigma}_0$ は存在する。従って (*) の特別解を $\sigma_1^{(p)}(x,t)$ とすれば, $\sigma_1^{(p)}(x,t)$ の初期条件として, $\sigma_1(x',0,t) = t(\sigma_1^{(1)}(x',0,t), \dots, \sigma_1^{(l)}(x',0,t)) = \tilde{\sigma}_1(x',t) + \tilde{C}\tilde{\sigma}_1(x',t)$ をとればよい。

以上をまとめると,

$$u_0^{(p)}(x,t) = \sigma_0^{(p)}(x,t) h_p^-, \quad p=1,2,\dots,l$$

$$\sum_{p=1}^l \sigma_0^{(p)}(x',0,t) h_p^- = \sum_{p=1}^{l'} \rho_p \tilde{\sigma}_0^{(p)}(x',t),$$

ここで, $\sigma_0^{(p)}(x,t)$ は方程式 (3.10) をみたすものにとり, その初期条件として $\tilde{\sigma}_0^{(p)}(x',t)$ を方程式 (3.15) をみたすものにとる。次に $u_1^{(p)}(x,t)$ とし,

$$u_1^{(p)}(x,t) = \sigma_1^{(p)}(x,t) h_p^- + \dot{u}_1^{(p)}(x,t), \quad p=1,\dots,l,$$

$$\sum_{p=1}^l \sigma_1^{(p)}(x',0,t) h_p^- = \sum_{p=1}^l \tilde{\sigma}_1^{(p)}(x',t) h_p^- + \sum_{p=1}^{l'} \rho_p \tilde{\sigma}_1^{(p)}(x',t)$$

をとる。ここで $\dot{u}_1^{(p)}(x,t)$ は (3.8) の特解であり, 又 $\tilde{\sigma}_1^{(p)}(x',t)$ は (*) の特解である。 $\sigma_1^{(p)}$ と $\tilde{\sigma}_1^{(p)}$ は次の step を進めるための任意関数である。一般に $u_{j-1}^{(p)}(x,t)$ とし,

$$u_{j-1}^{(p)}(x,t) = \sigma_{j-1}^{(p)}(x,t) h_p^- + \dot{u}_{j-1}^{(p)}(x,t)$$

$$\sum_{p=1}^l \sigma_{j-1}^{(p)}(x',0,t) h_p^- = \sum_{p=1}^l \tilde{\sigma}_{j-1}^{(p)}(x',t) h_p^- + \sum_{p=1}^{l'} \rho_p \tilde{\sigma}_{j-1}^{(p)}(x',t)$$

と置いて, (3.3)の $n-j+2$ の係数, (3.4)の $n-j$ の係数が
0になるためには, 前と同様の考察により, $\sigma_{j-1}^{(p)}(x,t)$ は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - a_p(D) - b_p(x,t,D)\right) \sigma_{j-1}^{(p)} = f_{j-1}(x,t), (p=1, \dots, l)$$

かつ, $\tilde{\sigma}_{j-1}^{(p)}(x,t)$ は $(\tilde{\sigma}_{j-1}(x,t) = {}^t(\tilde{\sigma}_{j-1}^{(1)} \dots \tilde{\sigma}_{j-1}^{(l)}))$

$$T_0(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\sigma}_{j-1} + \sum_{p=1}^{k-1} T_p(x,t) \frac{\partial}{\partial x_p} \tilde{\sigma}_{j-1} + S(x,t) \tilde{\sigma}_{j-1} = g_j(x,t)$$
をみたせばよい。 f_j, g_j は j 番の step から与えられる函数である。

このように順次くりかえすことにより (2.1) の $f=0, h=0$
 に対する $\tilde{w}$ の近解を構成することが出来る。こうして得られ
 た $\tilde{w}$ の近解は, $\operatorname{Re} \lambda_p < 0, \operatorname{Re} \lambda_0 > 0$ であることは留意すれば,
 (9.1) を violate することは明らかである。

参考文献

- [1] J. Chazarain: Problèmes de Cauchy abstraits et application
à quelques problèmes mixtes, J. Funct. Analysis 7.
386-446 (1971).
- [2] R. Beals: Mixed boundary value problem for nonstrict
hyperbolic equations, Bull. A.M.S. (1972) 520-521.
- [3] M. Ikawa: Mixed problem for the wave equation with
an oblique derivative boundary condition. Osaka J. Math.
17. (1970) 495-525.

- [4] V.T. IVRIĬ : The Cauchy problem for nonstrict hyperbolic equation. Dokl. Akad. Nauk. 197 (1971) 483-486.
- [5] K. Hersh. Mixed problem in several variables. J. Math. Mech. 12 (1963) 317-334.
- [6] R. Hersh. Boundary condition for equations of evolution, Arch. Rational. Mech. Anal. 16 (1964).
- [7] K. Kajitani ; Sur la condition nécessaire du problème mixte bien posé pour les systèmes hyperboliques à coefficients variables. to appear.
- [8] K. Kasahara ; On weak wellposedness of mixed problem for hyperbolic systems. Publ. R.I. M.S. 6 (1971) 503-514.
- [9] P. Lax. Asymptotic solution of oscillatory initial value problems. Duke Math. J. 24 (1957), 627-646.
- [10] S. Mizohata. Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ. 1 (1961) 109-127.
- [11] R. Sakamoto, Hyperbolic mixed problems with constant coefficients. to appear.
- [12] S. Saitoh ; On propagation speed of hyperbolic mixed boundary conditions. Jour Fac. Sci. Hokkaido Univ. 22 (1972), 21-31.
- [13] R. Hersh: On surface waves, Arch. Rat. Mech. Anal. 9 (1965).