

一次元ランダム Ising 系の自由エネルギーのゆらぎスペクトル

鹿児島県短大 田中稔次郎

鹿大理 藤坂博一, 井上正義

一次元ランダム Ising 模型の自由エネルギーのゆらぎの統計的性質を揺動スペクトル理論を用いて調べた。不規則磁性体の問題は、これまでに多くの人々によって研究されてきたが¹⁻⁷、特にフラクタル次元と関連して、クエンチしたランダム磁性体の自由エネルギーのゆらぎについての関心が高くなってきた⁸。ごく最近、我々は不規則系の自由エネルギーのゆらぎの大局的性質を調べるための新しい統計力学的アプローチを提唱した^{9, 10}。この発展は、ストレンジ・セットに対するマルチフラクタル理論や時間的ゆらぎに対する揺動スペクトル理論の成功にもとずいている¹¹。ここでは揺動スペクトル理論を用いて、一次元ランダム・ボンド Ising 模型の自由エネルギーのゆらぎの特性を考察する。すなわち、系のサイズを増大させたときに、ゆらぎがどのように減少していくかを調べることによりその特性を明らかにする。

N 個のスピンの構成される一次元ランダム Ising 模型のハミルトニアンは次のように表される。

$$H_N = - \sum_{i=1}^N J_i \sigma_i \sigma_{i+1}$$

ただし $\sigma_i = \pm 1$ は i 番目のサイトのスピンの値、 J_i は隣接スピン σ_i と σ_{i+1} の間の交換積分である。ここでは J_i はサイト i に関して統計的に独立なランダム変数であり、ランダム・ボンドと呼ぶ。なお、総和は全てのスピン対についてとる。ランダム・ボンドの分布 $\{J_i\}$ がわかれば、N スピン系の分配関数は次のように計算できる。

$$Z_N(\beta) = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \exp(-\beta H_N),$$

ただし、 $\beta (=1/k_B T)$ は系の逆温度である。一次元ランダム Ising 鎖及び環に対して次の表式を得る。

$$Z_N(\beta) = 2^N \psi_N \prod_{i=1}^N \cosh(\beta J_i),$$

ここで ψ_N は二つの系について $N \rightarrow \infty$, $\psi_N \rightarrow 1$ となる量である。ランダム・ボンドの分布 $\{J_i\}$ が決まると分配関数 $Z_N(\beta)$ が計算できるが、それはボンドの分布によって変動するので、 $Z_N(\beta)$ はランダムな変数である。いま次の量を定義すると

$$\frac{Z_N(\beta)}{Z_{N-1}(\beta)} = e^{-\beta g_N(\beta)},$$

ただし、

$$g_N(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln[2 \cosh(\beta J_N) \psi_N / \psi_{N-1}]$$

は、大きな N に対して統計的に N に依存しない。したがって、 $Z_N(\beta)$ は自己相似であり、揺動スペクトル理論を用いてそのゆらぎを調べることができる。あるサンプル系の1スピン当りの自由エネルギーは

$$f_{\beta, N} = -\frac{1}{N} \beta^{-1} \ln Z_N(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i(\beta).$$

で与えられるが、 N が大きくなると $f_{\beta, N}$ のゆらぎが減少し、その値は平均値 $f_{\beta, \infty}$ に近づく。すなわち、熱力学的極限ではサンプル間の自由エネルギーのゆらぎは存在しないことを表している。ところで、ランダム・ボンド J_i の分布は次の一次元カオティックマップによって決定する。

$$x_{N+1} = f(x_N) = A x_N (1 - x_N),$$

ただし、 A はマップの振幅である。 i 番目のボンド J_i は $J_i = \omega X_i$ で表される。 ω は定数である。 A の値によって、 $\{X_N\}$ は違った統計的性質を持つので、それが J_i の分布に反映してサンプル系の自由エネルギーがゆらぐのである。ボンドに依存した $g_i(\beta)$ のゆらぎを図1に示す。

さて、自由エネルギーのゆらぎの大局的な特性を調べるために、我々は特性関数 λ_q を次のように導入する^{11, 12}。

$$\lambda_q(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N \beta^q} \ln \langle [Z_N(\beta)]^{-q} \rangle, \quad \left(\frac{d\lambda_q(\beta)}{dq} \geq 0 \right)$$

ただし、 q は無次元のパラメータ ($-\infty < q < \infty$) である。記号 $\langle \cdots \rangle$ はランダム・ボンド $\{J_i\}$ の分布の集団に関する平均である。 q が零の極限では、 λ_q は

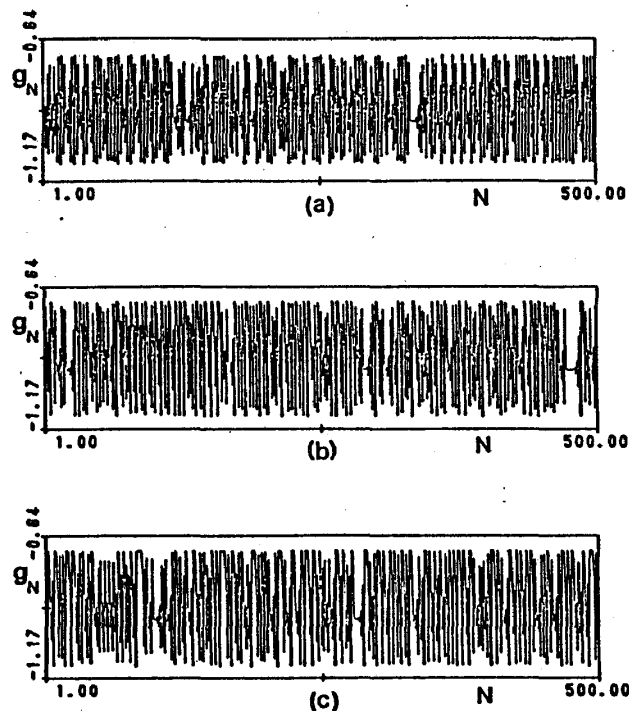


FIG. 1. Typical temporal evolutions of the dynamical variable $g_N(\beta)$ ($\equiv g_N$) for (a) $A=3.88$, (b) $A=3.98$, and (c) $A=3.9999$ with $\beta=1.0$ and $\omega=1.0$.

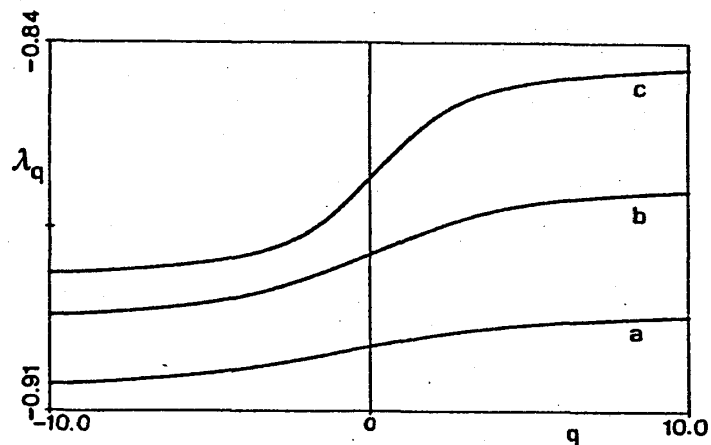


FIG. 2. Numerical results of the characteristic function $\lambda_q(\beta)$ ($\equiv \lambda_q$) for the configuration of random bonds generated by the logistic map (8). The values of A for a , b , and c are the same as in (a), (b), and (c) in Fig. 1, respectively. The number of spins contained in the one-dimensional chain is 250. The average $\langle \dots \rangle$ is taken by the distribution of 1000 sets of random bonds $\{J_i\}$.

$$\lambda_0(\beta) = -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\beta} \langle \ln Z_N(\beta) \rangle$$

となり、いわゆるスピン当りの平均の自由エネルギーである ($\lambda_0(\beta) = f_{\beta, \infty}$)。特性関数 $\lambda_q(\beta)$ についての数値計算の結果を図2に示す。さて、自由エネルギーがある値 f' をとる確率密度 $\rho_N(f'; \beta)$ を導入する。大きな N に対して、漸近的に次のように書けると仮定する。

$$\rho_N(f'; \beta) \sim \exp[-\beta \sigma_\beta(f') N]$$

ここで $\sigma_\beta(f)$ は揺動スペクトルである。鞍点法を用いると揺動スペクトル $\sigma_\beta(f)$ は $\lambda_q(\beta)$ からルジャンドル変換で容易に得ることができる。スピン当りの特性関数から得た熱力学変数の間の関係式は、次のように表される⁹⁻¹¹。

$$f_\beta(q) \equiv \frac{\partial}{\partial q} [q \lambda_q(\beta)],$$

$$\sigma_\beta(f_\beta(q)) \equiv q^2 \frac{\partial \lambda_q(\beta)}{\partial q},$$

$$\lambda_q(\beta) = f_\beta(q) - q^{-1} \sigma_\beta(f_\beta(q)).$$

ここで $f_\beta(q)$ は q 次の自由エネルギーである。揺動スペクトル $\sigma_\beta(f')$ は f に関して下に凸の関数であり、 $f' = \lambda_0(\beta) = f_\beta(0)$ で最小値 $\sigma_\beta(f') = 0$ をとる。さて、1 スピン当りの次数 q の自由エネルギー $f_\beta(q)$ を A の幾つかの値について計算したものを図3に示す。また、自由エネルギーのゆらぎのスペクトル $\sigma_\beta(f)$ を計算したが、それを図4に示す。数値計算の結果から、一次元ランダム・ボンド *Ising* 系の自由エネルギーのゆらぎの統計的特性は次数 q の自由エネルギー $f_\beta(q)$ や揺動スペクトルによって記述されることがわかった¹³。なお、我々のこの方法はランダム磁場の *Ising* 系の問題に対しても有用と思われる。

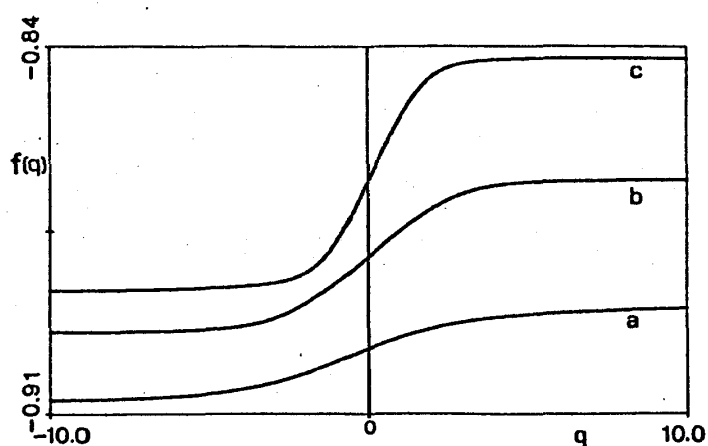


FIG. 3. Numerical results of the order- q free energy $f_{\beta}(q)$ [$\equiv f(q)$]. The values of A for a , b , and c are the same as in (a), (b), and (c) in Fig. 1, respectively.

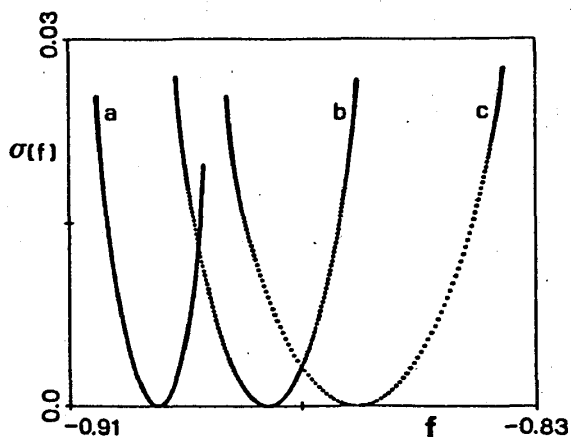


FIG. 4. Fluctuation spectra $\sigma_{\beta}(f)$ [$\equiv \sigma(f)$] of the free energy are shown for (a) $A = 3.88$, (b) $A = 3.98$, and (c) $A = 3.9999$.

参 考 文 献

- ¹ B. Derrida and H.J. Hilhorst, J. Phys. C: Solid State Phys. 14, L539 (1981).
- ² B. Derrida, Phys. Rep. 103, 29 (1984).
- ³ R. Bruinsma and G. Aeppli, Phys. Rev. Lett. 50, 1494 (1983).
- ⁴ G. Aeppli and R. Bruinsma, Phys. Lett. A97, 117 (1983).
- ⁵ B. Derrida and H.J. Hilhorst, J. Phys. A: Math. Gen. 16, 2641 (1983).

- ⁶ G. Györgyi and P. Ruján, J. Phys. C: Solid State Phys. 17, 4207 (1984).
- ⁷ J.M. Normand, M.L. Mehta and H. Orland, J. Phys. A: Math. Gen. 18, 621 (1985).
- ⁸ For example, see
J. Bene and P. Szépfalusy, Phys. Rev. A37, 1703 (1988).
- ⁹ G. Paladin and A. Vulpiani, Phys. Rep. 156, 147 (1987).
- ¹⁰ M. Inoue and H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. 79, 557 (1988).
- ¹¹ H. Fujisaka and M. Inoue, Prog. Theor. Phys. 77, 1334 (1987).
- ¹² The asymptotics $\psi_N \rightarrow 1$ indicates that the function $\lambda_q(\beta)$ does not depend on the boundary condition of the system, (chain or ring).
- ¹³ T. Tanaka, H. Fujisaka and M. Inoue, to be submitted to Phys. Rev. A.