

氏 名	小 谷 眞 一 と たに しん いち
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	論 理 博 第 549 号
学位授与の日付	昭 和 51 年 11 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	On asymptotic behaviour of the spectra of a one-dimensional Hamiltonian with a certain random coefficient (あるランダムな係数をもった一次元ハミルトニアンのスペクトルの漸近的挙動について)

論文調査委員 (主 査) 教授 渡辺信三 教授 吉沢尚明 教授 池部晃生 教授 伊藤 清

論 文 内 容 の 要 旨

多量の不純物が混入している物質や、ガラスのような無定形の物質の中の電子の運動を記述する場合に、ランダムなポテンシャルをもったシュレディンガー方程式をとりあつかう必要がある。このようないわゆる不規則系 (disordered system) とよばれるものの energy spectrum に関しては今まで色々な研究がなされてきた。

本論文はこのような不規則系のあるモデルについてその状態分布関数とよばれる量を厳密、かつ詳細にしらべたものである。対象とするシュレディンガー作用素は、シンボリックに書くと

$$L\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} \cdot \psi$$

の形で与えられる一次元の作用素である。ここで $x \rightarrow Q(x)$ は確率 1 で増大する見本をもつ加法過程 (独立増分過程) である。このモデルは H.L. Frisch, S.P. Lloyd によって考察されたもののより一般の場合である。作用素 L を有限区間 I で適当な境界条件を与えて自己共役作用素として考えたときの固有値分布関数を $N_I(\lambda)$ とする。 $N(\lambda) = \lim_{I \uparrow (-\infty, \infty)} \frac{1}{|I|} N_I(\lambda)$ が確率 1 で存在し、しかもエルゴード性によって $N(\lambda)$ は見本に無関係に定まる。これを状態分布関数という。状態分布関数は F.J. Dyson により無秩序格子振動の場合に研究され、さらに 1960 年 Frisch-Lloyd により $N(\lambda)$ を決定する方程式が発見されその後の研究に大きな影響を与えた。本論文ではまず $L\psi = \lambda\psi$ の解として定まる拡散過程をくわしく調べることにより、Frisch-Lloyd の方程式を厳密に導いた。次にこの方程式を用いて $N(\lambda)$ の $\lambda \downarrow 0$ の漸近的性質をしらべている。

この方向では、1964 年 I.M. Lifschitz は直観的考察により $N(\lambda)$ は $\lambda=0$ の近くで指数関数的に減少することを予想した。申請論文においては $N(\lambda) \sim C_0 \exp -\frac{C}{\sqrt{\lambda}}$, $\lambda \downarrow 0$ (C_0, C は確率過程 $Q(x)$ の特性量より定まるある正の定数) の形の漸近式が得られているが、これは従来のこの種の結果と比べてより精密なものである。この結果を出すため、申請者は Frisch-Lloyd の方程式を純虚軸に解析延長し、そこで得られた方程式をいわゆる Langer の方法等を用いて詳細に解析した。この方法は又、ランダムな質量分布をも

った弦の振動の方程式 $L\Psi = -\frac{d}{dM(x)} \frac{d\Psi}{dx}$ ($M(x)$ はやはり増大する見本をもつ加法過程) にも適用できる。

論文審査の結果の要旨

ランダムなポテンシャルをもった一次元シュレディンガー作用素 $L\Psi = -\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} \cdot \Psi$ (ただし $Q(x)$ は増大する見本をもつ加法過程) に対し、その状態分布関数 $N(\lambda)$ の $\lambda \downarrow 0$ での漸近的性質に関し優れた結果を出している。申請者の得た漸近的評価式は、 $Q(x)$ が複合ポアソン過程の場合 $N(\lambda) \sim C_0 \exp -\frac{C}{\sqrt{\lambda}}$, (C_0, C は $Q(x)$ の特性量より定まるある定数) という形のものであるが、従来得られていた結果はいずれも

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \sqrt{\lambda} \log N(\lambda) = -C$$

の形のものであり、それに比較してずっと精密な結果である。このために申請者の用いた方法は、まず $L\Psi = \lambda\Psi$ の解によって定義される拡散過程に確率過程論を適用してくわしく解析することにより、Frisch-Lloyd の方程式を厳密に導き、それを純虚数軸に解析延長して、そこで Langer の方法などの摂動法を用いて解析するのである。この方法は $Q(x)$ が複合ポアソン過程より一般の加法過程の場合にも適用可能であり、実際 $Q(x)$ が増大する見本をもつ安定過程 (片側安定過程) の場合に適用して興味ある具体的な漸近式が得られている。又この方法はランダムな質量分布をもつ弦の振動の方程式 $L\Psi = -\frac{d}{dM(x)} \frac{d\Psi}{dx}$ の場合にも適用されるし、又 $N(\lambda)$ の他の性質やその他作用素 L に関連する種々の問題にも有効なものである。このようにこの論文はこの分野に大きな貢献をなした。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。

なお、申請者は、一次元のシュレディンガー方程式や弦の方程式など、いわゆる Sturm-Liouville の微分作用素について確率論や解析への応用の見地から優れた研究を行ってきており、それは参考論文において発表されている。