

Braids と Links について

神大 理学部 丸本嘉彦

E.C. Zeeman [5] は $\text{codim} \geq 3$ の時 すべての knot は unknot であることを示した。 $L = (S^n, \bigcup_{j=1}^r S_j^{p_j})$ を link とするとき、 $2n \geq 3p_1 + 4$ の時 link L は linking number のみで決定される ことが知られている ([1], [3], [4])

ここでは link を braid に置き換えた時、得られる結果を述べ、その link に対しての応用を述べる。

定理 1 B を $(n; p_1, p_2, \dots, p_r)$ -braid とし、 $n - p_j \geq 3$ ($j=1, 2, \dots, r$) とする。すると B は unknotted である。

定義 (1) 次の条件を満たす時、 $B = (B^n, \bigcup_{j=1}^r B_j^{p_j})$ を $(n; p_1, p_2, \dots, p_r)$ -braid と呼ぶ。

- $$\begin{cases} \text{(i)} & p_j\text{-ball } B_j^{p_j} \text{ は } n\text{-ball } B^n \text{ に locally flat に embed されている。} \\ \text{(ii)} & j=1, 2, \dots, r \text{ に対して } B_j^{p_j} \cap \partial B^n = \partial B_j^{p_j} \end{cases}$$

定義 (2) $B_i = (B^n, \bigcup_{j=1}^r B_{ij}^{p_j})$ を $(n; p_1, p_2, \dots, p_r)$ -braid とする ($i=1, 2$)

次を満たす時, B_1 と B_2 が equivalent であると呼ぶ:

level preserving homeomorphism $h: B^n \times I \rightarrow B^n \times I$ (ただし $I = [0, 1]$)

が存在して, 次を満たす,

$$(i) \quad h(x, 0) = (x, 0) \text{ for } x \in B^n$$

$$(ii) \quad h(B_{ij}^{p_j}, 1) = (B_{2j}^{p_j}, 1) \text{ for } j=1, 2, \dots, r.$$

定義(3) $\Delta(n, p)$ は $(\Sigma^{n-p} \Delta^p, \Delta^p)$ を表わす, ただし Δ^p は standard p -simplex, Σ^{n-p} は $(n-p)$ -fold suspension のことである.

定義(4) $(n; p_1, p_2, \dots, p_r)$ -braid $B = (B^n, \bigcup_{j=1}^r B_j^{p_j})$ が unknotted であるとは 次の条件を満たすような mutually disjoint n -balls B_j^n が B^n の中に存在する時である:

$$(i) \quad B_j^n \cap \partial B^n \text{ は } (n-1)\text{-ball である,}$$

$$(ii) \quad B_j^{p_j} \subset B_j^n \text{ であり, } (B_j^n, B_j^{p_j}) \text{ と } \Delta(n, p_j) \text{ は equivalent である. } (j=1, 2, \dots, r)$$

定理 1 の証明のために, 次の補題を証明する.

補題 2 $B = (B^n, \bigcup_{j=1}^r B_j^{p_j})$, $B' = (B^{n+1}, \bigcup_{j=1}^r B_j^{p_j+1})$ をそれぞれ, $(n; p_1, \dots, p_r)$, $(n+1; p_1+1, p_2+1, \dots, p_r+1)$ -braid とする. すべての j に対して, $n-p_j \geq 3$ の時, 次が成り立てば B は unknotted である.

$$\begin{cases} (i) \quad B^n \subset \partial B^{n+1} \\ (ii) \quad B_j^{p_j} = B^n \cap B_j^{p_j+1} \text{ for } j=1, 2, \dots, r. \end{cases}$$

[補題2の証明] $x_j \in \partial B_j^{p_i+1} - B_j^{p_i}$ 内の一点, $y \in \partial B^{n+1} - (B^n \cup \bigcup_{j=1}^r B_j^{p_i+1})$ の中の一点とし, α_j を x_j と y を結ぶ弧を満足する simple arc とする: (i) $\alpha_j \subset \partial B^{n+1} - B^n$ (ii) $\alpha_j \cap \alpha_k = \{y\}$ if $j \neq k$, (iii) $\text{int } \alpha_j \cap \bigcup_{i=1}^r B_i^{p_i+1} = \emptyset$.

$T = \bigcup_{j=1}^r \alpha_j$ とする, T は collapsible である. $\square$

$U_j = N(x_j; B^{n+1})$, $V = N(T; B^{n+1})$ をそれぞれ, x_j と T の B^{n+1} における regular neighbourhood meeting the boundary regularly とする. すなわち U_j, V は $(n+1)$ -balls である. このとき,

$\tilde{B}^n = \text{cl}(\partial V - \partial B^{n+1})$, $\tilde{B}_j^{p_i} = \tilde{B}^n \cap B_j^{p_i+1}$, $\tilde{U}_j = U_j \cap \tilde{B}^n$ とする.

すると $\tilde{B}^n$ は n -ball, $\tilde{B}_j^{p_i}$ は p_i -ball, $\tilde{U}_j$ は n -ball となる.

さらに, $\tilde{B}_j^{p_i} \cap \partial \tilde{B}^n = \partial \tilde{B}_j^{p_i}$, $\tilde{B}_j^{p_i} \cap \tilde{B}_k^{p_k} = \emptyset$ if $j \neq k$ となる,

つまり, $\tilde{B} = (\tilde{B}^n, \bigcup_{j=1}^r \tilde{B}_j^{p_i})$ は $(n; p_1, p_2, \dots, p_r)$ -braid である.

そこで, $\tilde{U}_j$ の作りかたより, $\tilde{U}_j \cap \partial \tilde{B}^n$ は $(n-1)$ -ball となる.

Zeeman's Unknotting Theorem [5] より, $(\tilde{U}_j, \tilde{B}_j^{p_i})$ は $\Delta(n, p_i)$

と equivalent になる. すなわち, $\tilde{B}$ は unknotted である.

$\tilde{B}$ の作りかより, B と $\tilde{B}$ は concordant である. すると Hudson

の結果より [2], B と $\tilde{B}$ は equivalent である. すなわち, B は

unknotted となる.

[定理1の証明] $B = (B^n, \bigcup_{j=1}^r B_j^{p_i})$ を $(n; p_1, p_2, \dots, p_r)$ -braid とし,

$n - p_i \geq 3$ for $j=1, 2, \dots, r$. とする. このとき, $B' = B \times I = (B^n \times I,$

$\bigcup_{j=1}^r (B_j^{p_i} \times I))$ とおく. すると補題2の条件を満足することは

容易に確かめられる。すなわち $\mathcal{B}$ は unknotted となる。

定義(6) $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし、以下の様な notations を定義する：

$$\mathbb{R}^{n-1}[a \leq x_n \leq b] = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x_n \leq b\},$$

$$\mathbb{R}^{n-1}[x_n = a] = \mathbb{R}^{n-1}[a \leq x_n \leq a],$$

$$\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^n[0 \leq x_n < \infty).$$

定義(7) (i) $\bigcup_{j=1}^r S_j^{p_j}$ を $\mathbb{R}^n$ における locally flat な disjoint union of spheres とするとき、 $L = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^r S_j^{p_j})$ を $(n; p_1, p_2, \dots, p_r)$ -link と呼ぶ。

(ii) link L の各 component が disjoint な ball を bound するとき、 L は trivial であるという。

(iii) $L_i = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^r S_{ij}^{p_j})$ を link とする ($i=1, 2$)。

h は $\mathbb{R}^n$ の orientation preserving auto-homeomorphism であって、各 j に対して $h|_{S_{ij}^{p_j}}$ が $S_{ij}^{p_j}$ から $S_{2j}^{p_j}$ への orientation preserving homeo. であるような h が存在するとき、 L_1 と L_2 は equivalent であるという。

定理3 $L = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^r S_j^{p_j})$ を $(n; p_1, p_2, \dots, p_r)$ -link として、

$n - p_j \geq 3$ for $j=1, 2, \dots, r$ と仮定する。このとき、 L と equivalent な $(n; p_1, \dots, p_r)$ -link $L' = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^r K_j^{p_j})$ で次を満たすものが

存在する:

- (1) $\bigcup_{j=1}^r K_j^{p_j} \subset \mathbb{R}^{n-1} [0 \leq x_n \leq 1]$,
- (2) $(\mathbb{R}^{n-1} [x_n = t], \bigcup_{j=1}^r (K_j^{p_j} \cap \mathbb{R}^{n-1} [x_n = t]))$ は trivial $(n-1; p_1, p_2, \dots, p_{r-1})$ -link である (ただし $0 < t < 1$),
- (3) $\bigcup_{j=1}^r K_j^{p_j} \cap \mathbb{R}^{n-1} [x_n = t]$ は disjoint union of balls である (ただし $t = 0$ or 1).

[証明]

$\bigcup_{j=1}^r S_j^{p_j} \subset \mathbb{R}^n [1 \leq x_n \leq 2]$ と仮定しても一般性を失わない。

x_i を a point in $S_i^{p_i}$, y_i を a point of $\mathbb{R}^{n-1} [x_n = 0]$, α_i は x_i と y_i を結ぶ simple arc で次を満たすようにする:

$$\alpha_i \subset \mathbb{R}_+^n, \quad \alpha_i \cap \bigcup_{j=1}^r S_j^{p_j} = \{x_i\}, \quad i \neq k \Rightarrow \alpha_i \cap \alpha_k = \emptyset.$$

すると, 次を満たすような embedding $f_j: B_j^{p_j} \times I \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ が存在する: (1) $f_j(B_j^{p_j} \times I) \subset N(\alpha_j; \mathbb{R}_+^n)$

$$(2) f_j(B_j^{p_j} \times I) \cap S_j^{p_j} = f_j(B_j^{p_j}, 1) = N(x_j; S_j^{p_j})$$

$$(3) f_j(B_j^{p_j} \times I) \cap \mathbb{R}^{n-1} [x_n = 0] = f_j(B_j^{p_j}, 0) \subset N(y_j; \mathbb{R}^{n-1} [x_n = 0]).$$

すると $(S_j^{p_j} \cup f_j(\partial B_j^{p_j} \times I)) - \text{int } N(x_j; S_j^{p_j})$ は p_j -ball となり, この p_j -ball を $B_j^{p_j}$ とし, $\tilde{S}_j^{p_j} = B_j^{p_j} \cup f(B_j^{p_j}, 0)$ とすると

$\tilde{S}_j^{p_j}$ は p_j -sphere である。すると $\tilde{L} = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^r \tilde{S}_j^{p_j})$ は L と equivalent な $(n; p_1, p_2, \dots, p_r)$ -link である。

$\mathcal{B} = (\mathbb{R}_+^n, \bigcup_{j=1}^r B_j^{p_j})$ とすると, $\mathcal{B}$ は $(n; p_1, p_2, \dots, p_r)$ -braid である。よって定理 1 より, orientation preserving auto-homeo h of $\mathbb{R}_+^n$

が存在して、次の条件を満足する：

- (1) $h(B_j^{p_j}) \subset \mathbb{R}^{n-1}[0 \leq x_n \leq 1]$ for $j=1, 2, \dots, r$,
- (2) $(\mathbb{R}^{n-1}[x_n=t], \bigcup_{j=1}^r (h(B_j^{p_j}) \cap \mathbb{R}^{n-1}[x_n=t]))$ is trivial
 $(n-1; p_1-1, \dots, p_r-1)$ -link である ($t \in L$ $0 \leq t < 1$)
- (3) $\bigcup_{j=1}^r h(B_j^{p_j}) \cap \mathbb{R}^{n-1}[x_n=1]$ is disjoint union of balls
 である。

すると、 h は容易に $\mathbb{R}^n$ 全体の orientation preserv. auto-homo.
 に拡張でき、それを $\tilde{h}$ とする。ここで $K_j^{p_j} = \tilde{h}(\tilde{S}_j^{p_j})$ と
 おけば、 $K_j^{p_j}$ は p_j -sphere となり、 $K_j^{p_j}$ は $\tilde{S}_j^{p_j}$ から $\tilde{h}$ によって
 induce される orientation を入れることにより、 $L' = (\mathbb{R}^n, \bigcup_{j=1}^r K_j^{p_j})$
 は $\tilde{L}$ と equivalent な $(n; p_1, \dots, p_r)$ -link となり、結局、 L と L'
 は equivalent である。 L' が求める条件を満していることは明か
 である。

References

- [1] A. Haefliger ; Differential links , Topology 1 (1962) 241-244.
- [2] J.F.P. Hudson ; Concordance, isotopy and diffeotopy , Ann. Math 91 (1970)
- [3] K. Kobayashi ; On a p.l link isotopy group , J. Fac. Sci. Hokkaido
 Univ. 22 (1972) 79-98
- [4] E.C. Zeeman ; Isotopies and knots in manifold , Topology of 3-manifolds
- [5] _____ ; Unknotting combinatorial balls , Ann. Math. 78 (1963)