

BIFURCATION OF HOMOCLINIC TANGENCY

小室 元政

西東京科学大学

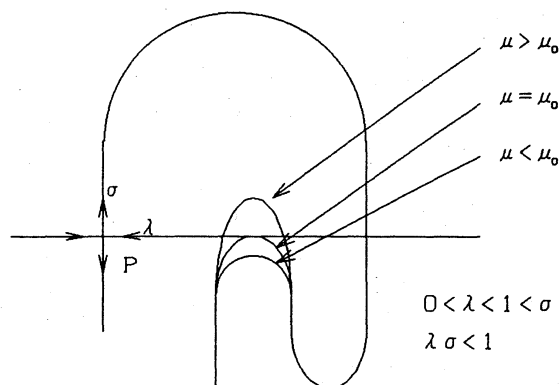
2次元曲面上の微分同相写像が HOMOCLINIC TANGENCY を起こすとき、その近くで生じる分岐現象について、Newhouse-Robinson, Mora-Viana 及び Paris-Takens の結果を中心に報告をする。

§1. 3つの結果の概要

設定 . M を 2-dimensional closed manifold, $f_\mu : M \rightarrow M$ を one-parameter family of C^r -diffeomorphisms which nondegenerately creates homoclinic tangency at $\mu = \mu_0$ for the fixed point P とする。 Tf_μ は P において固有値 $\lambda = \lambda_\mu, \sigma = \sigma_\mu$ を持ち

$$0 < \lambda < 1 < \sigma, \quad \lambda \sigma < 1$$

を満たしているとする。



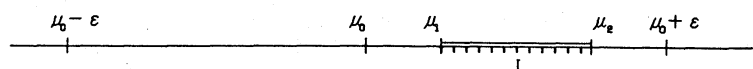
$f \in \text{Diff}^r(M)$ が hyperbolic であるとは、non-wandering set $\Omega(f)$ が hyperbolic set であること。 $f \in \text{Diff}^r(M)$ が persistently hyperbolic であるとは、 f の C^r 近傍 $\mathcal{U}$ が存在して任意の $g \in \mathcal{U}$ が hyperbolic となること。

$$A = \{\mu \in \mathbb{R} : f_\mu \text{ は persistently hyperbolic}\}$$

$$B = \mathbb{R} - A$$

とし B を Ω -bifurcation set と呼ぶ。

NEWHOUSE - ROBINSON の結果. $r = 3$ のとき、 $\mu = \mu_0$ の近くで、 B は open interval を含む。すなわち、
for any $\varepsilon > 0$, there are an interval $[\mu_1, \mu_2] \subset [\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$ and a residual subset $J \subset [\mu_1, \mu_2]$ such that
(i) $\forall \mu \in [\mu_1, \mu_2]$, f_μ has a wild hyperbolic set,
(ii) $\forall \mu \in J$, f_μ has infinitely many sinks.

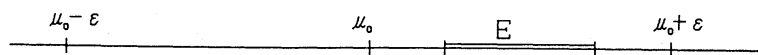


MORA - VIANA の結果. $r = \infty$ のとき、 $\mu = \mu_0$ の近くで、non-hyperbolic strange attractor を持つ μ 全体の測度は正である。すなわち、

for any $\varepsilon > 0$, there is an $E \subset [\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$ such that

(i) $m(E) > 0$, and

(ii) $\forall \mu \in E$, f_μ has a non-hyperbolic strange attractor (hence $E \subset B$).



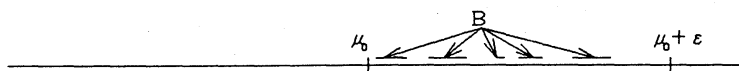
PALIS-TAKENS の結果. ある状況 (*) 下では、 $\mu = \mu_0$ の近くで、 B は A に比べて非常に少ない。すなわち、

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{m(B \cap [\mu_0, \mu_0 + \varepsilon])}{\varepsilon} = 0$$

ここで、状況 (*) とは、

(i) $\mu < \mu_0 \implies \mu \in A$, (i.e. homoclinic Ω - explosion)

(ii) $d^s + d^u < 1$ (i.e. sum of stable and unstable limit capacities < 1 .)



§2. 定義

(1) $f \in \text{Diff}^r(M)$ とする。compact set $\Lambda \subset M$ が 次の条件 (i) ~ (iv) を満たすとき、 Λ は hyperbolic basic set for f であるという。

(i) $f(\Lambda) = \Lambda$,

(ii) Λ は hyperbolic set,

(iii) Λ は dense orbit を持つ,

(iv) Λ は local product structure を持つ。

hyperbolic basic set Λ が wild hyperbolic set for f であるとは、次の条件を満たすことである。

$\exists \mathcal{U} : C^2$ -neighborhood of f such that $\forall g \in \mathcal{U}, \exists q_1, q_2 \in \Lambda(g)$ such that

$W^s(q_2, g)$ has a nondegenerate tangency with $W^u(q_1, g)$.

(2) compact set $\Lambda \subset M$ が次の条件 (i) ~ (iii) を満たすとき、 Λ は strange attractor for f であるという。

(i) $f(\Lambda) = \Lambda$,

(ii) $\text{int} W^s(\Lambda) \neq \emptyset$,

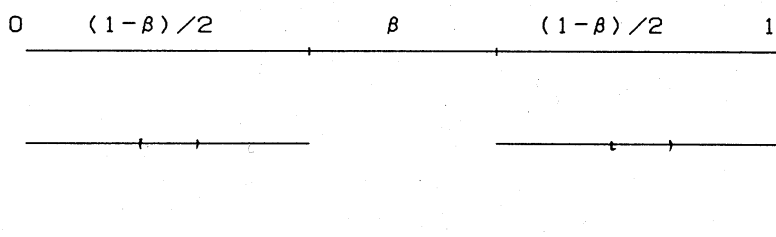
(iii) $\exists z \in \Lambda, \exists c > 0$ and $\exists v \in T_z M$ with $\|v\| = 1$ such that $\{f^n(z) : n \geq 0\}$ is dense in Λ , and $\|Df^n(z) \cdot v\| \geq e^{cn}$ for $\forall n \geq 0$.

(3) $A \subset \mathbb{R}$ は Cantor set とする。 A の limit capacity $d(A)$ を次のように定義する。

$$d(A) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n(A, \epsilon)}{-\log \epsilon}$$

但し、 $n(A, \epsilon)$ は the minimum number of ϵ -balles needed to cover A .

例 1 the middle β Cantor set

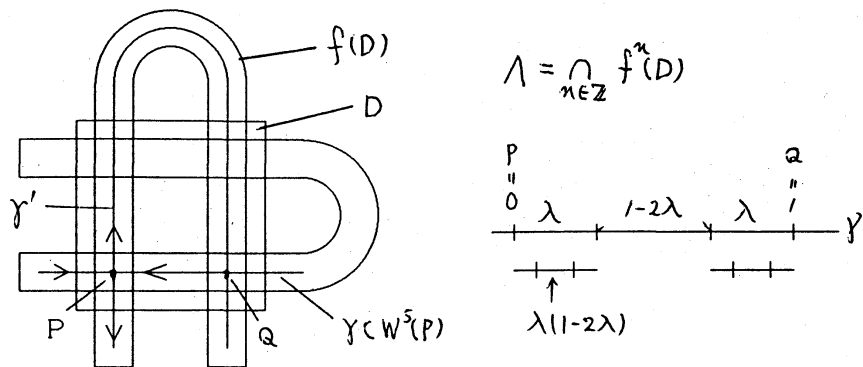


$$\epsilon = \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^k$$

$$n(A, \epsilon) = 2^k$$

$$d(A) = \frac{\log n(A, \epsilon)}{-\log \epsilon} = \frac{\log 2^k}{-\log \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^k} = \frac{\log 2}{\log 2 - \log(1-\beta)}$$

例2 the affine horseshoe



$A^* = W^s(\Lambda) \cap \gamma$ は middle $(1 - 2\lambda)$ -Cantor set

$$d^*(\Lambda) = d(A^*) = \frac{\log 2}{\log 2 - \log 2\lambda}$$

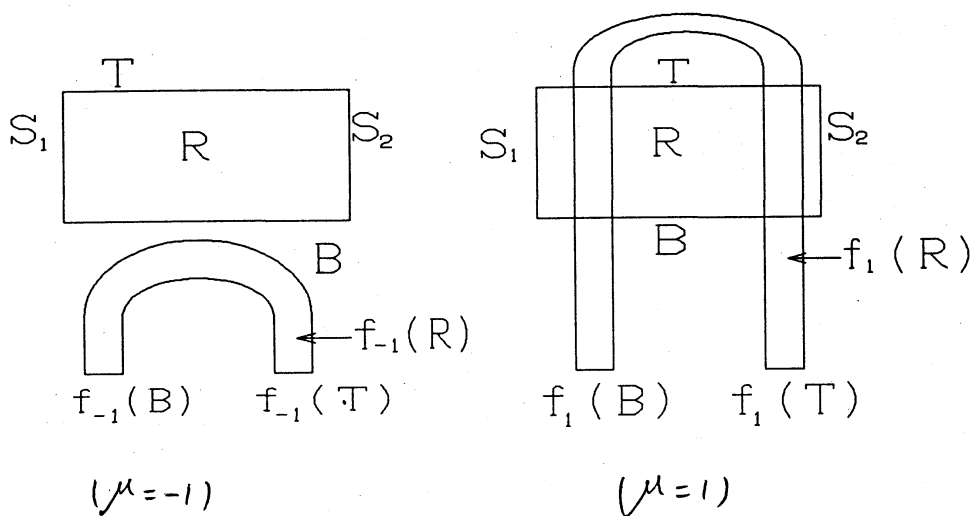
$A^s = W^s(\Lambda) \cap \gamma'$ は middle $(1 - 2\sigma^{-1})$ -Cantor set

$$d^s(\Lambda) = d(A^s) = \frac{\log 2}{\log 2 - \log 2\sigma^{-1}}$$

(4) a family of diffeomorphisms $f_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($-1 \leq \mu \leq 1$) が次の条件 (i) ~ (v) を満たすとき、horseshoe 形成族 であるという。

$\exists$ a rectangle $R \subset \mathbb{R}^2$ such that

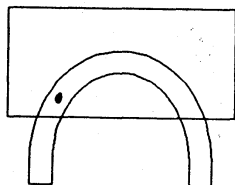
- (i) $f_{-1}(R) \cap R = \emptyset$,
- (ii) f_1 has a horseshoe,
- (iii) $f_\mu(R) \cap S_i = \emptyset$ ($-1 \leq \mu \leq 1, i = 1, 2$),
- (iv) $f_\mu(T) \cap R = \emptyset, f_\mu(B) \cap R = \emptyset$ ($-1 \leq \mu \leq 1$),
- (v) $|\det Df_\mu| < 1$ on R ($-1 \leq \mu \leq 1$).



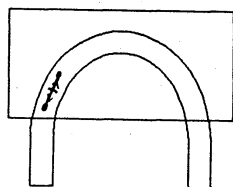
§3. HORSESHOE 形成族

3つの定理に共通の視点として次の点があげられる。

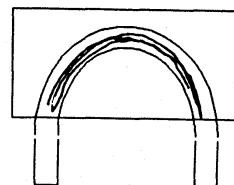
- (1) nondegenerate homoclinic tangency が $\mu = \mu_0$ で起こるとき、十分大きな n と、 μ_0 の近くの μ に対して、 f_μ^n は horseshoe 形成族となる。
 (2) horseshoe 形成族の性質が f_μ に反映する。



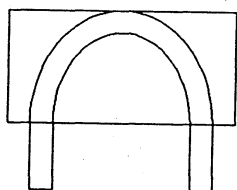
① sink



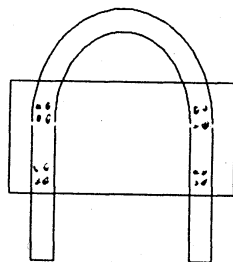
② period-doubling



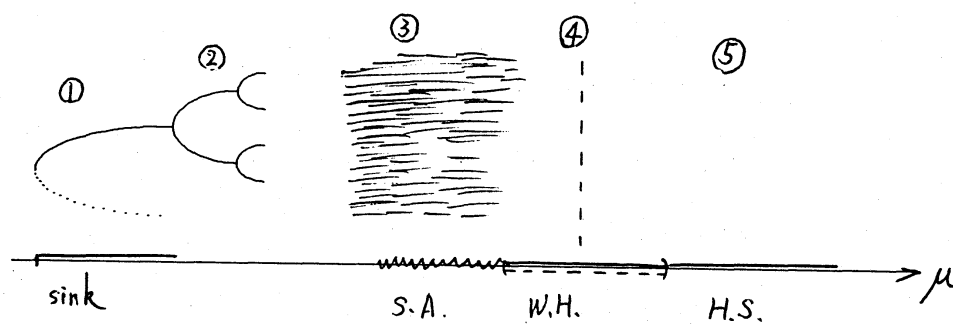
③ strange attractor



④ wild hyperbolic set



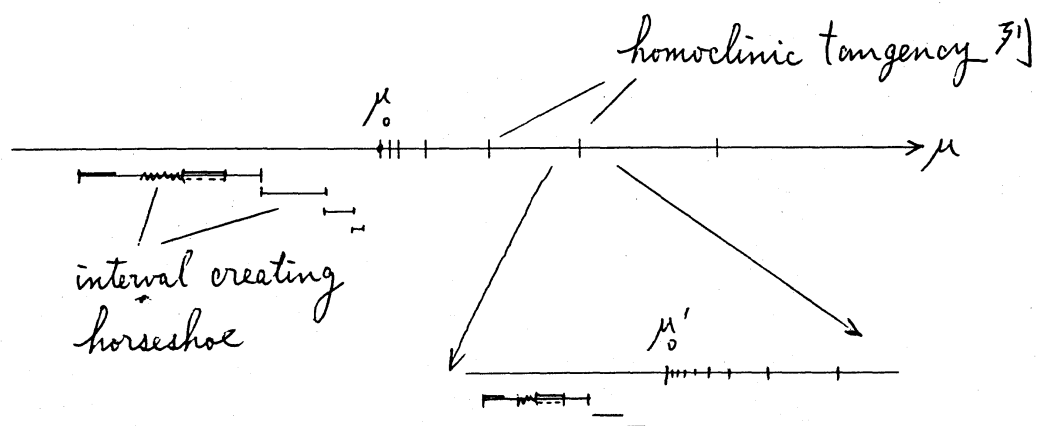
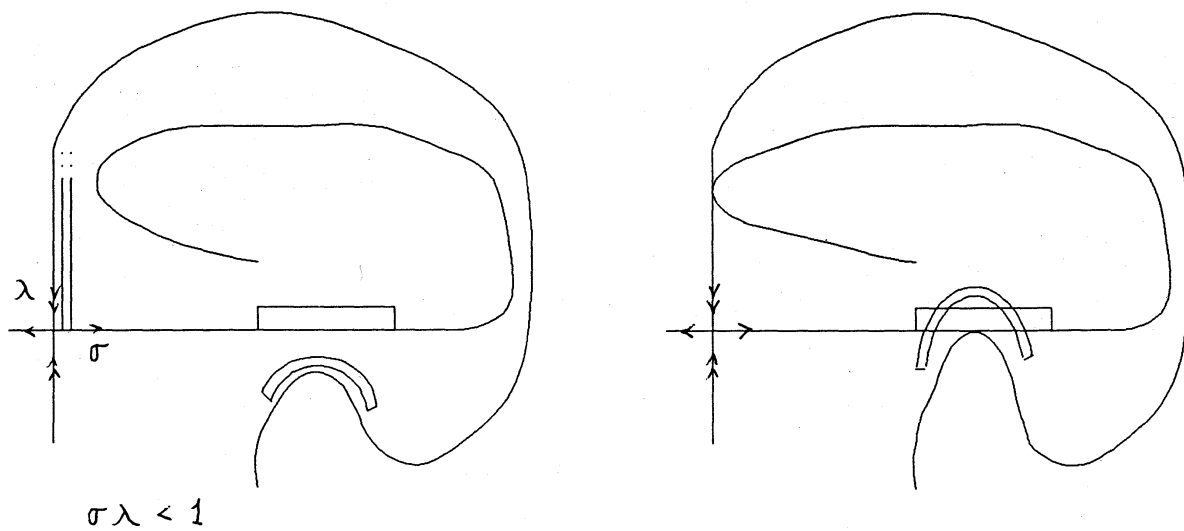
⑤ horseshoe

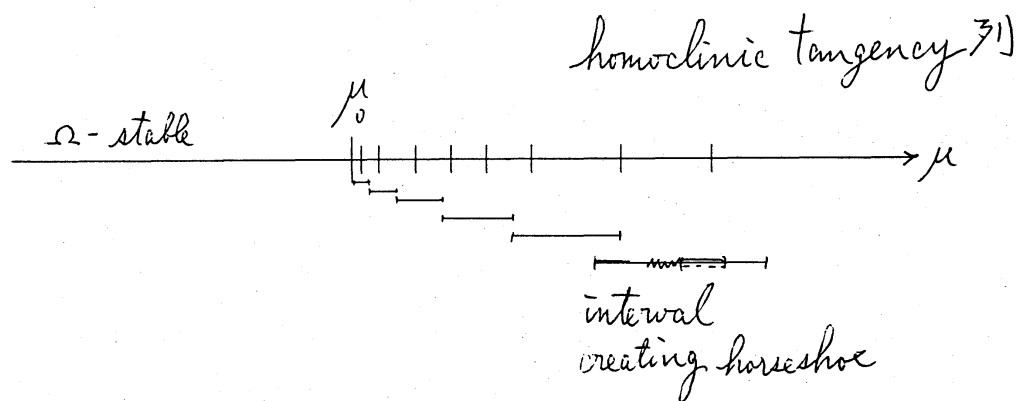
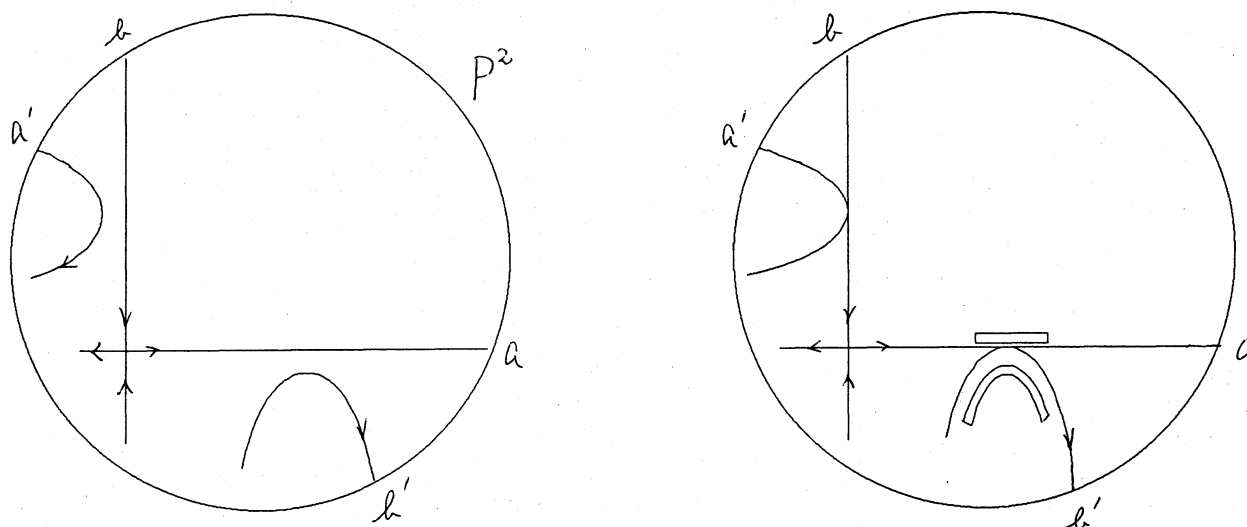


(interval creating horseshoe)

§4. HOMOCLINIC TANGENCY の例

(1) premature creation of horseshoes



(2) homoclinic Ω -explosion

[1] S.Newhouse; The abundance of wild hyperbolic set and non-smooth stable sets for diffeomorphisms, Publ. I.H.E.S. 50 (1979), 101-151.

[2] C.Robinson; Bifurcation to infinitely many sinks, Commun. Math. Phys. 90 (1983), 433-459.

[3] J.Palis and F.Takens ; Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits, Annals of Math.,125(1987), 337-374.

[4] L.Mora and M.Viana; Abundance of strange attractors, to appear in ACTA Math.