

開水路模型実験の相似律に関する研究

——模型歪みの効果について——

足 立 昭 平

SIMILITUDE OF OPEN CHANNEL MODELS

——HYDRAULIC EFFECTS OF MODEL DISTORTION——

by Shohei ADACHI

Synopsis

Owing to costs of laboratory facilities such as water supply, space and equipment, many open channel models are constructed by two different linear scales, one for the horizontal dimension and another for the vertical dimension. However, the hydraulic effects of model distortion have not well known.

In this paper the author proposes some new formulas and charts to determine factors involving the effects of side walls in the case of channels with a rectangular cross-section and discusses the conditions of similitude for distorted open channel models with a fixed bed. Two numerical examples are added to illustrate the method of selection of model scale ratios. They also show that the suitability of model distortion should not be decided without inspecting the model roughness.

1. 緒 言

模型実験は自然界の複雑な諸問題を模型によつて解明しようとするものであるから、その模型は原型と相似でなければならない。しかしながら原型に含まれるすべての事象を完全に縮尺して、模型に複製することは不可能であるから、その相似律はあくまでも個個の実験が対象とする現象に限定して議論されねばならない。したがつていたづらに完全模型を夢見て、現実の模型に失望することは当然いし、また一方慢然と模型を過信することも許されないのであつて、われわれはつねに実験目的を見失うことなく、模型内に得られる現象の物理的意味を究明するとともに、原型についての実証を怠つてはならない。

一般に開水路水流を取り扱う場合には、水深に比して長大な水路長が要求されるのが常であり、模型縮尺の選定は、平面的には実験施設の大きさや機能に、また鉛直方向には計測器の精度に制約される。このため、この種の実験においては、縮尺を水平方向と鉛直方向とに分け、それぞれを独立に選んだいわゆる歪められた模型を製作することが多い。この模型歪みについては、見かけ上原型水路の形状を損ねることを理由に、相似律の成立を懸念する向きもあるのであるが、従来ともすれば単に便宜的手段としてのみ考えられがちであり、これを積極的に模型の相似律と関連づけようとする試みはほとんど見受けられない。大縮尺の模型がいかに原型に近く、小縮尺の模型に優るといつても、模型は所詮模型に過ぎないから、ただむやみに大きい模型を作るだけでは、相似律の本質的解決をはかることにはならない。本報告は、開水路模型実験に関する相似律解明の一端として、模型歪みを相似律の面から意味づけようと試みた研究の一部であつて、矩形断面水路における側壁粗度の役割りを明確にし、模型歪みと粗度との関連について述べたものである。

2. 相 似 条 件

開水路水流の基礎方程式は、つぎのように与えられる。

運動方程式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{gA^2} \frac{\partial Q^2}{\partial x} &= -\frac{\lambda Q^2}{2gRA} + i_b - \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

連続方程式：

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

ここに、 Q は流量、 A は流水断面積、 H は水深、 i_b は河床勾配、 R は径深、 λ は摩擦係数、 g は重力の加速度、 x は水流方向にとつた距離、 t は時間をあらわす。

原型と模型の流れが力学的に相似であるためには、それぞれの流れを記述する基礎方程式の各項の比が相等しくなければならない。いま原型と模型とに関する諸量を、それぞれ添字 p および m を付けた記号であらわすことにすれば、基礎方程式 (1) から相似の条件式はつぎのように与えられる。

$$\frac{t_m}{t_p} = \frac{x_m}{x_p} \left(\frac{H_m}{H_p} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_p} = \frac{R_m}{R_p} \frac{x_m}{x_p} \dots\dots\dots (3)$$

および

$$\frac{A_m}{A_p} = \frac{x_m}{x_p} \cdot \frac{H_m}{H_p}, \quad \frac{Q_m}{Q_p} = \left(\frac{x_m}{x_p} \right)^2 \frac{H_m}{H_p} \frac{t_m}{t_p} \dots\dots\dots (4)$$

(2) 式はいわゆる Froude の相似則であり、長さの縮尺に対応する時間縮尺を規定し、(3) 式は粘性流体における Reynolds の相似則に相当する条件であつて、流水の摩擦抵抗を規定する。また (4) 式は断面積、容積の幾何学的縮尺関係を与えている。

これらの条件式のうち、(2) および (4) 式を満足せしめることはきわめて容易であり、縮尺選定に特別の考慮を必要としない。しかしながら (3) 式の摩擦抵抗係数については、一般に原型河川と模型水路とでは性格的にいちじるしい差異のあるのが普通であり、摩擦抵抗が水路面の粗さで代表されるような乱流の場合においても、単に原型を幾何学的に忠実に縮尺するだけで (3) 式の関係を満足せしめ得るとは限らない。結局この種の実験に関する相似律の問題は条件式 (3) にあるのである。

原型河川の流れはすべて乱流と考えられるのであるが、一般にその流路形状は複雑であり、底質砂礫も均一でないうえに、雑草の繁茂状態も一様でなく、さらに多少とも流砂をとまなうから、その摩擦抵抗をこれらの関数として普遍的法則を与えることはきわめて困難である。したがつて現在のわれわれの知識では、原型摩擦係数 λ_p に対しては個々の河川区間についての実測値を用い、摩擦抵抗に関与する諸要素の影響は定性的にその傾向を吟味し、与えられた実測値が的外れでないことを確める程度で満足しなければならない。

河川工学においては、摩擦抵抗をあらわす係数として、Manning の粗度係数 n が広く用いられている。この係数は経験的に見出されたものであるが、摩擦係数 λ に対して

$$n = g^{1/2} R^{1/6} \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{-1/2} \quad \text{あるいは} \quad \sqrt{\frac{2}{\lambda}} = \frac{R^{1/6}}{n\sqrt{g}} \dots\dots\dots (5)$$

の関係があつて、径深の $3/8$ 乗だけ λ を補正した形をとり、個々の河川区間の固有値として、比較的一定値に近いといわれている。もちろん n の値は厳密に一定値ではないが、原型の摩擦抵抗に関する係数として、 λ_p を n_p に書き換えておくことは、實際上ほとんどの河川資料が n で整理されていることから便利である。

(5) 式を用いて (3) 式を変形すると、

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda_m}} = n_p^{-1} \cdot g^{-1/2} \cdot R_p^{1/6} \cdot \left(\frac{R_m}{R_p} \frac{x_m}{x_p} \right)^{-1/2}$$

いま、水路の断面形状係数として

$$S = \frac{R}{H} \dots\dots\dots (6)$$

また、模型歪みを

$$\epsilon = \frac{H_m}{H_p} \frac{x_m}{x_p} \dots\dots\dots (7)$$

とおくと、上式は

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda_m}} = \epsilon^{-3/2} \cdot n_p^{-1} \cdot g^{-1/2} \cdot H_m^{1/6} \cdot \left(\frac{x_m}{x_p} \right)^{-1/6} \cdot S_m^{-1/2} \cdot S_p^{3/2} \dots\dots\dots (8)$$

と書くことができる。(8)式が相似の条件式であり、模型の摩擦係数はこれを満足しなければならないのであるが、(8)式で規定される摩擦係数 λ_m は水深 H_m の関数であるから、水位変動が小さく変動水深の平均値について考慮するだけで満足できる場合を除けば、この条件が成立するためには、一般に模型水路の摩擦抵抗の特性を吟味する必要がある。そして模型歪みの可否もまたこの点から議論されねばならない。

水路断面形が近似的に矩形である場合には、水面巾は水深変動に独立であり、断面係数 S は

$$S = \frac{1}{1+\gamma} \quad \text{ただし、} \gamma = \frac{2H}{B} \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる。ここに B は水路巾である。また原型水路は一般に水深に比して水路巾が大きく、 $S_p \approx 1$ とみなせるから、(8)式はこの場合 γ_m をパラメーターとして、次式のようにあらわせる。

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda_m}} = K \cdot \gamma_m^{1/6} (1+\gamma_m)^{1/2} \dots\dots\dots (10)$$

ただし、

$$K = \epsilon^{-2/3} n_p^{-1} g^{-1/2} \left(\frac{B_p}{2} \right)^{1/6} \dots\dots\dots (11)$$

3. 固定床開水路の摩擦抵抗

(8)式に規定される摩擦係数の水深変動に対する特性を得るためには、模型水路の摩擦抵抗を、ある程度自由に人為的に変化せしめる手段がなければならない。

摩擦係数は流れが層流の場合には水の粘性に、また乱流の場合には水路面の粗滑の状態に支配されるのであるから、その特性を全く自由自在に制御することは無理である。しかしながら、水路断面形状あるいは潤辺の粗度の不均一もまた流水抵抗に関与する要素の一つであり、模型を歪めさらに潤辺粗度を不均一として、側壁あるいは底面の摩擦効果を強調することは可能なはずである。もちろんこのような操作が常に(8)式を厳密に満足せしめ得るとはいえないのであるが、近似的にはかなりの結果を期待してよいであろう。

水路断面形状の流水抵抗に及ぼす影響については、Keulegan¹⁾氏の研究があり、水深の代りに径深 R を採用すれば十分であるといわれている。しかしこの考察は潤辺粗度が一様の場合であり、また後に述べるように若干の修正を要するに思われる。これに対して Powell 氏²⁾は潤辺粗度が一様であつても、剪断応力の不均一性が重大であると述べているが、その具体的評価方法にまでは論及していない。

水路潤辺の粗度が不均一である場合の取り扱いについては、Einstein 氏³⁾の提案があり、流砂量算定に利用されているのであるが、側壁と底面のそれぞれの抗力係数を流水全断面についての平均流速に対して定義する点なお検討するべき余地があるに思われる。

このように従来の考察はなお検討の余地があるのであるが、それらの基本的見解となつている流水断面を側壁および底面の支配域に分離できるという仮定は、一応是認できるように思われる。すなわち、このこと

は平行壁間の流れにおいて、その中心面上の剪断応力が0であることから推論でき、また管路および開水路の流速分布が、断面の隅角部付近を除いて、ほぼ壁面に平行であることから推察できる。

いま水路断面の基本形として、矩形断面水路をとりあげ、上記の見解に従つて、流水断面を独立な2つの領域に分け、それぞれの領域における流水の速度分布は側壁あるいは底面の粗滑によつてのみ決定づけられると仮定し、さらに流れが完全乱流であつて、速度分布は対数法則であらわせるものとする。すなわち、

$$\frac{u_1}{u_{*1}} = \frac{1}{\kappa} \ln M_1 z, \quad \frac{u_2}{u_{*2}} = \frac{1}{\kappa} \ln M_2 y \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 u_1 は底面の支配領域において、底面から距離 z の点の流速を、 u_2 は側壁の支配領域において、側壁から距離 y の点の流速をあらわし、 κ は乱流混合に関する普遍常数であり、また u_* は摩擦速度、 M は壁面の粗滑に関する量である。なお添字 1, 2 はそれぞれ底面および側壁の支配領域に関する量であることを示す。

M は壁面の粗滑に応じて、

$$\text{粗面:} \quad M_1 = 1/m_r k_{s1}, \quad M_2 = 1/m_s k_{s2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{滑面:} \quad M_1 = u_{*1}/m_s \nu, \quad M_2 = u_{*2}/m_s \nu \quad \dots\dots\dots (14)$$

である。ここに、 k_s は壁面の粗さの凹凸の高さを代表するものであつて、Nikuradse の砂粒粗度に準拠するいわゆる相当粗度であり、 ν は流水の動粘性係数を、また m_r, m_s はそれぞれ粗面および滑面に関する常数をあらわし、Nikuradse の円管実験を参照すれば、

$$m_r = \frac{1}{30}, \quad m_s = \frac{1}{9} \quad \dots\dots\dots (15)$$

である。

Fig. 1 に示すように分割した両領域の面積を A_1 および A_2 とおくと、流水の平均流速 U は

$$U = \frac{1}{A_2 + A_1} \left[\int_{A_1} u_1 dA_1 + \int_{A_2} u_2 dA_2 \right] \quad \dots\dots\dots (16)$$

である。しかして、(12) 式から両領域の境界面は

$$y = \beta z^\alpha \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、

$$\alpha = u_{*1}/u_{*2} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\beta = M_1^\alpha / M_2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

であり、したがつて両領域の面積に対して、

$$dA_1 = \left(\frac{B}{2} - \beta z^\alpha \right) dz, \quad dA_2 = \left\{ H - \left(\frac{y}{\beta} \right)^{1/\alpha} \right\} dy$$

とあらわせるから、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{B}{2} \cdot z_0 \left(1 - \frac{2\beta z_0}{B} \cdot \frac{1}{\alpha+1} \right) \\ A_2 &= H \cdot \beta z_0^\alpha \left(1 - \frac{z_0}{H} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

が得られる。さらに u_1, u_2 は (12) 式であらわせるから、

$$\left. \begin{aligned} \int_{A_1} u_1 dA_1 &= \frac{u_{*1}}{\kappa} \cdot \frac{2z_0}{B} \left[\left(1 - \frac{2\beta z_0}{B} \cdot \frac{1}{\alpha+1} \right) \ln M_1 z_0 - \left\{ 1 - \frac{2\beta z_0}{B} \cdot \frac{1}{(\alpha+1)^2} \right\} \right] \\ \int_{A_2} u_2 dA_2 &= \frac{u_{*2}}{\kappa} \cdot H \cdot \beta z_0^\alpha \left[\left(1 - \frac{z_0}{H} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \ln M_2 \beta z_0^\alpha - \left\{ 1 - \frac{z_0}{H} \cdot \frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (21)$$

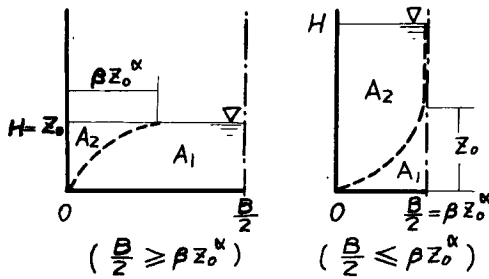


Fig. 1 Partition of cross-section

となる。ここに、 z_0 は両領域の面積に関する積分上限であつて、Fig. 1 に示されるように、

$$\begin{aligned} \frac{B}{2} \geq \beta H^\alpha &: z_0 = H, \\ \frac{B}{2} \leq \beta H^\alpha &: z_0 = \left(\frac{B}{2\beta}\right)^{1/\alpha} \dots\dots (22) \end{aligned}$$

である。(20)、(21) 式を(16) 式に代入し、点($z=z_0$, $y=\beta z_0^\alpha$) が境界面上の一点であつて

$$\frac{u_{*1}}{\kappa} \ln M_1 z_0 = \frac{u_{*2}}{\kappa} \ln M_2 \beta z_0^\alpha$$

であることに着目すれば、

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{u_{*1}}{\kappa} \ln M_1 z_0 - \frac{u_{*1}}{\kappa} \left(\frac{z_0}{H} + \frac{2\beta z_0^\alpha}{B} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{z_0}{H} \cdot \frac{2\beta z_0^\alpha}{B} \cdot \frac{1}{\alpha+1} \right), \\ U &= \frac{u_{*2}}{\kappa} \ln M_2 \beta z_0^\alpha - \frac{u_{*2}}{\kappa} \left(\frac{z_0}{H} \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{2\beta z_0^\alpha}{B} - \frac{z_0}{H} \cdot \frac{2\beta z_0^\alpha}{B} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

あるいは、

となる。

さらに両領域の境界面上において剪断応力が0であることを考慮すれば、それぞれの領域に関する力の平衡条件から

$$u_{*1}^2 = 2A_1 gI/B, \quad u_{*2}^2 = gA_2 I/H$$

でなければならない。ここに、 I は流水のエネルギー勾配である。

上式はまた(20) 式の A_1 , A_2 を代入して、

$$\left. \begin{aligned} u_{*1} &= \sqrt{\frac{z_0}{H} \left(1 - \frac{2\beta z_0^\alpha}{B} \cdot \frac{1}{\alpha+1} \right) \cdot \sqrt{gHI}}, \\ u_{*2} &= \sqrt{\frac{\beta z_0^\alpha}{H} \left(1 - \frac{z_0}{H} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \cdot \sqrt{gHI}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

と書きあらわせる。(24) 式を(18) 式に代入すると、

$$\alpha^2 = \frac{2H}{B} \cdot \frac{\left(1 - \frac{2\beta z_0^\alpha}{B} \cdot \frac{1}{\alpha+1} \right) \cdot \frac{z_0}{H}}{\left(1 + \frac{z_0}{H} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \cdot \frac{2\beta z_0^\alpha}{B}}$$

であり、(9) 式で定義した $\gamma \left(= \frac{2H}{B} \right)$ を導入して変形すると、

$$\frac{2\beta z_0^\alpha}{B} = \frac{\gamma(\alpha+1) \frac{z_0}{H}}{\left\{ \left(1 - \frac{z_0}{H} \right) \alpha^2 + \alpha^2 + \gamma \frac{z_0}{H} \right\}}$$

および、

$$\frac{z_0}{H} = \frac{\alpha^2(\alpha+1) \frac{2\beta z_0^\alpha}{B}}{\left\{ \left(1 - \frac{2\beta z_0^\alpha}{B} \right) \gamma + \alpha \left(\alpha^2 + \frac{2\beta z_0^\alpha}{B} + \gamma \right) \right\}}$$

となる。この関係式を用いれば、(22) 式から z_0 に関する項 $\frac{z_0}{H}$ および $\frac{2\beta z_0^\alpha}{B}$ はそれぞれつぎのように α , γ の関数として与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha \geq \gamma &: \quad \frac{z_0}{H} = 1, \quad \frac{2\beta z_0^\alpha}{B} = \frac{\gamma(\alpha+1)}{\alpha^2 + \gamma} \\ \alpha \leq \gamma &: \quad \frac{z_0}{H} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha^2 + \gamma}, \quad \frac{2\beta z_0^\alpha}{B} = 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

したがって、また u_{*1} , u_{*2} は (24) 式から、

$$u_{*1} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma}} \sqrt{gHI}, \quad u_{*2} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \gamma}} \sqrt{gHI}$$

あるいは、水路潤辺全体の平均値としての摩擦速度を U_* とおくと、

$$U_* = \sqrt{gRI} = \sqrt{\frac{1}{1+\gamma}} \sqrt{gHI}$$

であるから、

$$u_{*1} = \alpha \sqrt{\frac{1+\gamma}{\alpha^2 + \gamma}} \cdot U_*, \quad u_{*2} = \sqrt{\frac{1+\gamma}{\alpha^2 + \gamma}} \cdot U_* \dots\dots\dots (26)$$

で与えられる。

これらの (25), (26) 式を (23) 式に代入して整頓すると、結局、平均流速 U は

$$\left. \begin{aligned} \alpha \geq \gamma: \quad U &= U_* \cdot \alpha \sqrt{\frac{1+\gamma}{\alpha^2 + \gamma}} \cdot \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln M_1 H - 1 - \frac{\gamma}{\alpha(\alpha^2 + \gamma)} \right\} \\ \alpha \leq \gamma: \quad U &= U_* \cdot \alpha \sqrt{\frac{1+\gamma}{\alpha^2 + \gamma}} \cdot \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln M_1 H - 1 - \frac{\alpha^2 - \gamma\alpha + \gamma}{\alpha(\alpha^2 + \gamma)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

となる。

一方、開水路の摩擦係数 λ は

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda}} = \frac{U}{U_*}$$

であるから、結局、

$$\left. \begin{aligned} \alpha \geq \gamma: \quad \sqrt{\frac{2}{\lambda}} &= \alpha \sqrt{\frac{1+\gamma}{\alpha^2 + \gamma}} \cdot \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln \gamma - 1 - \frac{\gamma}{\alpha(\alpha^2 + \gamma)} + \ln \frac{M_1 B}{2} \right\} \\ \alpha \leq \gamma: \quad \sqrt{\frac{2}{\lambda}} &= \alpha \sqrt{\frac{1+\gamma}{\alpha^2 + \gamma}} \cdot \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln \gamma - 1 - \frac{\alpha^2 - \gamma\alpha + \gamma}{\alpha(\alpha^2 + \gamma)} + \ln \frac{M_1 B}{2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

が得られる。

この (28) 式が側壁の効果を含めた矩形断面開水路水流の抵抗法則をあらわし、これを二次元流の抵抗則

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} (\ln M_1 H - 1)$$

と対比すれば、側壁の効果が摩擦抵抗の特性にどのような変化をもたらすかを知ることができる。またこの考察にもとづけば、潤辺の粗度が均一の場合についての Keulegan 氏の提案式は若干の修正を要するものと考えられ、氏の取り扱い $H = \frac{B}{2}$ の場合だけに限定されるということが出来る。

さて、摩擦抵抗係数 λ の γ に対する特性を具体的に表示するためには、底面の摩擦速度と側壁のそれとの比で定義される α の値を与えねばならない。この α の値は底面と側壁の粗度によつて決定され、粗面あるいは滑面に応じて (13) あるいは (14) 式と (19) 式および (25) 式から γ の関数として導くことができる。

まず水路底面も側壁ともに水理学的に粗である場合を考えると、(13) 式から

$$M_1 = 1/m, \quad k_{s1}, \quad M_2 = 1/m, \quad k_{s2}$$

であり、したがって境界面の係数 β は (18) 式から

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{1}{N} (m, k_{s1})^{1-\alpha} \\ N &= k_{s1}/k_{s2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ただし、

一方, (24) 式から

$$\left. \begin{aligned} \alpha \geq \gamma : \quad & \beta \gamma^\alpha \left(\frac{B}{2}\right)^{\alpha-1} = \gamma \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha^2+\gamma)^{-1} \\ \alpha \leq \gamma : \quad & \beta \gamma^\alpha \left(\frac{B}{2}\right)^{\alpha-1} = (\alpha^2+\gamma)^\alpha \cdot \alpha^{-\alpha} \cdot (\alpha+1)^{-\alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

であるから, (29) 式を (30) 式に代入して β を消去すると,

$$\alpha \geq \gamma : \quad (\alpha+1)(\alpha^2+\gamma)^{-1} \gamma^{1-\alpha} = \frac{1}{N} \left(\frac{B}{2m_r k_{s1}}\right)^{\alpha-1} \dots\dots\dots (31a)$$

$$\alpha \leq \gamma : \quad \alpha^{-\alpha} (\alpha+1)^{-\alpha} (\alpha^2+\gamma)^\alpha \cdot \gamma^{-\alpha} = \frac{1}{N} \left(\frac{B}{2m_r k_{s1}}\right)^{\alpha-1} \dots\dots\dots (31b)$$

が得られる。

(31a), (31b) 式を展開して, α の関数形を求めることは困難であるが, これら両式とも左辺が α と γ だけで構成され, 右辺は γ を含まず, しかも α が冪の指数にだけ含まれていることに着目すると, 図式的に γ に対する α の値を求めることができる。すなわち両辺の対数をとって, 左辺を F_{1a} および F_{1b} とおき, 右辺を F_r とおくと

$$\left. \begin{aligned} F_{1a} &= \log(\alpha+1) - \log(\alpha^2+\gamma) + (1-\alpha)\log\gamma \\ F_{1b} &= \alpha\{\log(\alpha^2+\gamma) - \log\gamma - \log\alpha - \log(\alpha+1)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

$$F_r = (\alpha-1) \log \frac{B}{2m_r k_{s1}} - \log N \dots\dots\dots (33)$$

となり, (32) 式の F_{1a} , F_{1b} は水路粗度に無関係に γ をパラメーターとして, α に対してプロットできる。すなわち, これらの計算値は普遍的曲線群として図化しておくことができる。また (33) 式の F_r は γ には無関係であつて, 水路条件が与えられると, α に関する一次式であり, 簡単に直線として図化できる。したがって, F_{1a} , F_{1b} の普遍的曲線群の上に, F_r の直線を重ね合わせると, 両者の交点が求める解を与える。

Fig. 2 は F_{1a} , F_{1b} の普遍的曲線群と, 二三の水路条件に対する F_r の直線群を示したものである。なお (33) 式の m_r の値は (15) 式に示した Nikuradse の実験値 $1/30$ を用いた。

底面および側壁が水理学的に滑面である場合についても全く同様にして計算でき, (32) および (33) 式はつぎのようにあらわせる。

(i) 底面, 側壁とも水理学的に滑面の場合

$$\begin{aligned} F_{1a}' &= -\alpha \log \alpha + \log(\alpha+1) - \frac{3}{2}(\alpha-1)\log\gamma \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha-3)\log(\alpha^2+\gamma) \\ F_{1b}' &= -2\alpha \log \alpha - \alpha \log(\alpha+1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(3\alpha-1)\{\log(\alpha^2+\gamma) - \log\gamma\} \end{aligned}$$

$$F_r' = (\alpha-1) \left\{ \log \frac{\sqrt{gI}}{m_s v} + \frac{3}{2} \log \frac{B}{2} \right\}$$

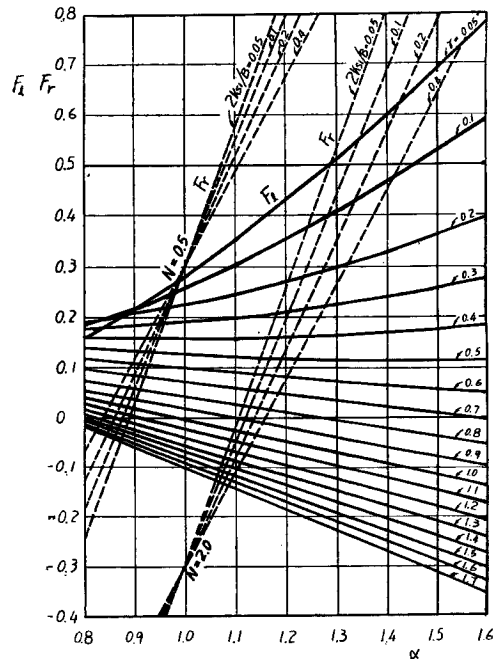


Fig. 2 Diagram for graphical solution of equation (31)

(ii) 底面が粗面で，側壁が滑面の場合

$$F_{ia}'' = \log(\alpha+1) - \frac{3}{2} \log(\alpha^2 + \gamma) + \left(\frac{3}{2} - \alpha\right) \log \gamma$$

$$F_{ib}'' = -\alpha \{\log \alpha + \log(\alpha+1)\} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \{\log(\alpha^2 + \gamma) - \log \gamma\}$$

$$F_r'' = \alpha \log \frac{1}{m_r k_{s1}} - \log \frac{\sqrt{gI}}{m_s \nu} + \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \log \frac{B}{2}$$

(iii) 底面が滑面で，側壁が粗面の場合

$$F_{ia}''' = -\alpha \log \alpha + \log(\alpha+1) + \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \log(\alpha^2 + \gamma) - \left(\frac{3}{2} \alpha - 1\right) \log \gamma$$

$$F_{ib}''' = \alpha \left\{ -2 \log \alpha - \log(\alpha+1) + \frac{3}{2} \log(\alpha^2 + \gamma) - \frac{3}{2} \log \gamma \right\}$$

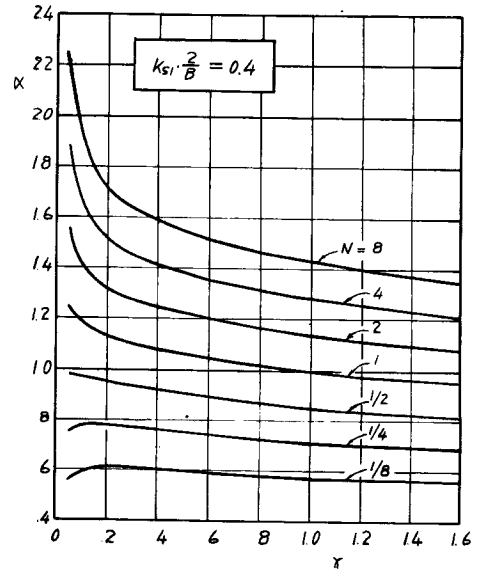
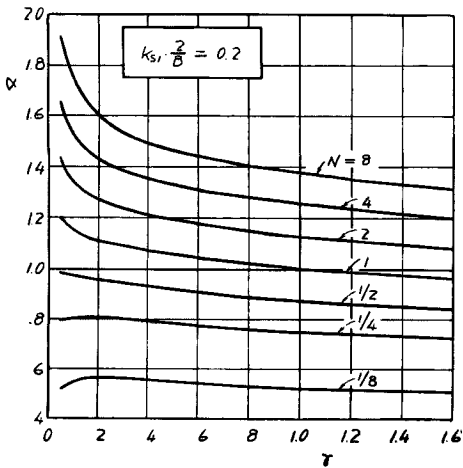
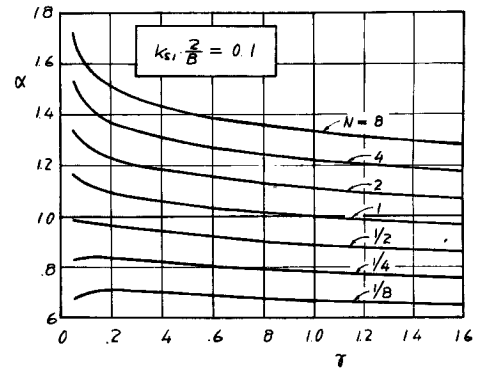
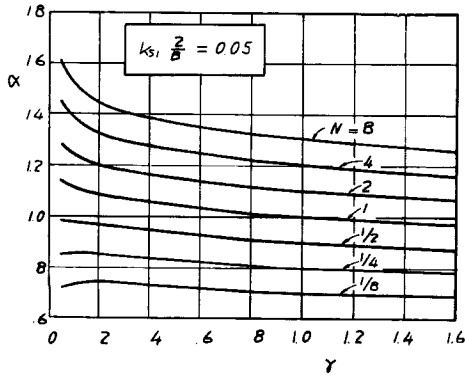


Fig. 3 Relation between α and γ for different values of N and $2k_{s1}/B$

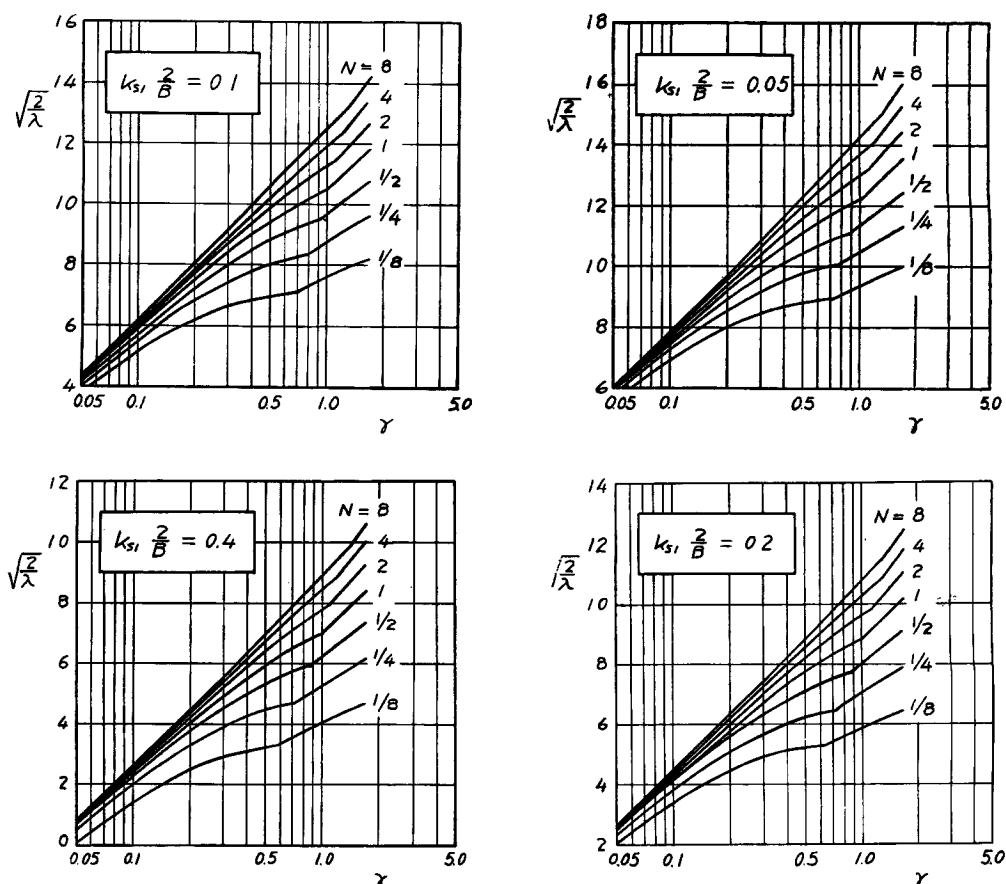


Fig. 4 Variation of frictional factor $\sqrt{2}/\lambda$ for different values of N and $2k_{s1}/B$

$$F_r''' = \alpha \log \frac{\sqrt{gI}}{m_s \nu} - \log \frac{1}{m_r k_{s2}} + \left(\frac{3}{2} \alpha - 1 \right) \log \frac{B}{2}$$

Fig. 2 に基づいて、底面および側壁がともに水理学的に粗面であつて、それらの相当粗度 k_{s1} および k_{s2} の比 N が 8, 4, 2, 1, $1/2$, $1/4$ および $1/8$ である場合の α を求めると、Fig. 3 が得られる。さらにこの結果を (28) 式に代入して得られる流水の摩擦抵抗は、Fig. 4 のようになる。これらの図から底面粗度が強いほど水深変動による抵抗の変化が急激で大きく、逆に側壁粗度の強いほどその変化が緩慢で小さいことがわかる。

これらの計算値の実証は、 $N \neq 1$ の場合の実験例が少なく、十分とはいえないのであるが、 $N=1$ の場合について U. S. W. E. S. の実験値⁴⁾を引用すると、Fig. 5 のようであり、断面形状の影響を径深 R で代表せしめるだけでは不十分であつて、著者の計算値がより実験値に近いことを示している。また底面のみ粗面で側壁が滑面である著者の実験例は Fig. 6 のようであり、著者の考察が細部については、断面隅角部あるいは副流の効果を省略したものであるにもかかわらず、比較的良好に実験値を説明づけているように思われる。

4. 模型歪みに関する例題

模型縮尺の選定は、前節に述べた固定床水路の摩擦抵抗の特性を利用し、相似の条件式に合致するものを

見出せばよいのであるが、つぎにこの手順を簡単な例題について述べ、模型歪みの適否について若干の検討を加えてみよう。

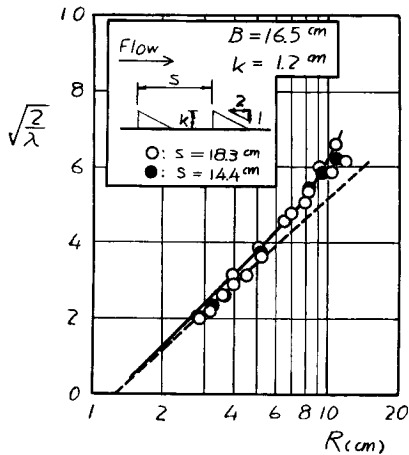


Fig. 5 Variation of frictional factor $\sqrt{2/\lambda}$

— Calculated values using equations (31)
 Calculated values using the common logarithmic equation

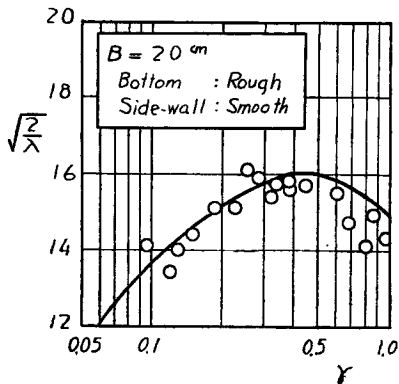


Fig. 6 Variation of frictional factor $\sqrt{2/\lambda}$

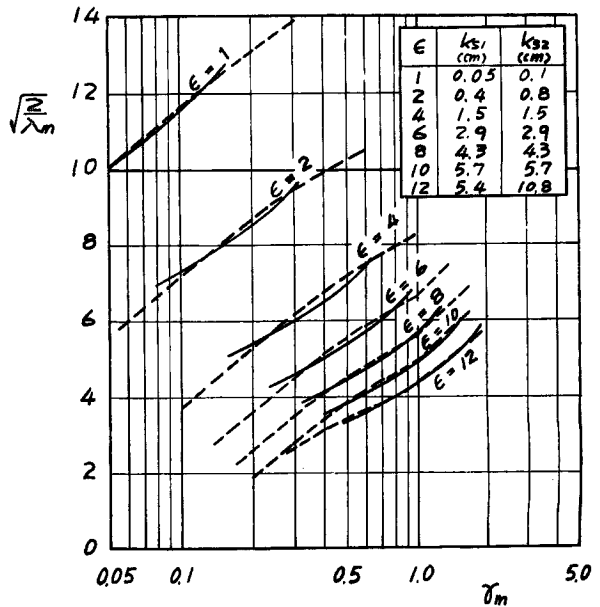


Fig. 7 Conditions of similitude (horizontal scale : 1/500, $n_p : 0.025$, $B_p : 60 \text{ meters}$)

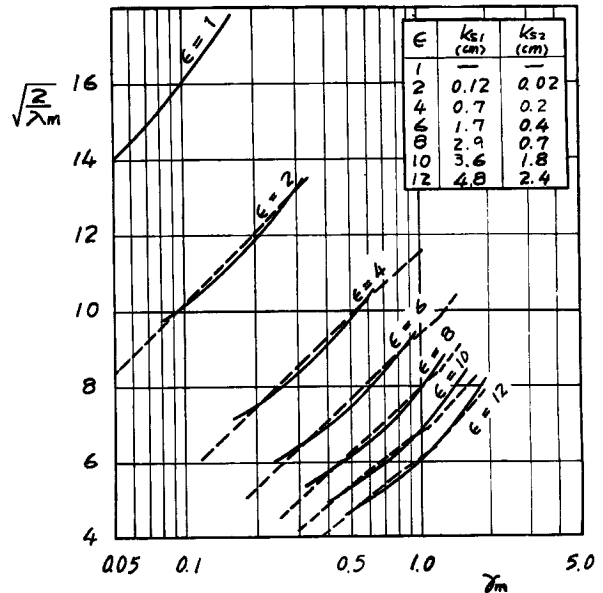


Fig. 8 Conditions of similitude (horizontal scale : 1/500, $n_p : 0.035$, $B_p : 60 \text{ meters}$)

いま原型として、水路巾が 60 m であつて、水深が 1.2 m から 4.8 m まで、またそれに対応する平均流速が 1.2 m/sec から 3.6 m/sec まで変化するような単断面河川が与えられ、模型化すべき水路長が非常に広範囲にわたるため、水平縮尺を 1/500 にとどめたいものとする。

原型粗度が $n_p=0.025$ および 0.035 の 2 つの場合をとりあげると、まず相似条件 (10) 式の係数 K の値は模型歪みに応じて Table 1 のように与えられるから、相似条件は Fig. 7 および 8 の実線であらわさ

Table 1 Values of K for the examples, horizontal scale $X_r=1/500$ and channel width of prototype $B_p=60$ meters

distortion	1	2	4	6	8	10	12
Ex. I ($n_p=0.025$)	22.53	14.19	8.94	6.83	5.63	4.87	4.30
Ex. II ($n_p=0.035$)	16.09	10.14	6.39	4.88	4.02	3.48	3.07

れる。一方固定水路の摩擦抵抗は (28) 式で与えられ、その計算値は Fig. 4 に示されているから、これらから相似条件に最も近いものを選ぶと、Fig. 7 および 8 の破線のようにあり、それぞれの粗度の値は同図に表示してある。

この例題からも明らかなように、模型歪みは常に模型粗度と相関連するものであり、歪みの適否は粗度の適否によつて判定されるべきである。したがつて、もし所要の模型粗度がすべて製作可能であれば、模型歪みの選択は自由である。しかしながら実際には、極端に大きい粗度もまた小さい粗度も実現不可能であり、模型歪みの選択はおのずから制約される。人工粗度としては従来多くの形式が考案され、実際に試みられているのであるが、なおその規格化は十分でなく、明確に実現可能な粗度の範囲を示すことは困難である。しかしながら、著者の経験から推定すれば、この例題について歪み $\epsilon=10$ 程度までの粗度を実現することは可能と考えられる。

一方、またここに述べた計算は、流れが乱流の場合を取り扱っているから、模型の流れが乱流でなく、層流あるいはその遷移状態にある場合については、その抵抗則についてあらためて計算しなおさなければならない。例題について模型の Reynolds 数を吟味すると Table 2 のようであり、歪み $\epsilon<4$ の場合には

Table 2 Minimum values of Reynolds number for the examples, min. $H_p=1.2$ m. and min. $U_p=1.2$ m/s ($\nu=0.01\text{cm}^2/\text{s}$)

distortion	1	2	4	6	8	10	12
horizontal scale	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
vertical scale	0.002	0.004	0.008	0.012	0.016	0.020	0.024
time scale	0.0447	0.0316	0.0224	0.0183	0.0158	0.0141	0.0129
velocity scale	0.0447	0.0632	0.0894	0.1096	0.1265	0.1414	0.1549
min. H_m	0.24	0.48	0.96	1.44	1.92	2.40	2.88
min. U_m	5.37	7.59	10.73	13.15	15.18	16.97	18.59
min. Reynolds number	129	364	1030	1894	2915	4730	5354

Reynolds 数が 10^3 以下であり、乱流としての計算が適用できないことを示している。

結局、この例題における鉛直縮尺は $1/125 \sim 1/50$ の範囲内で、実験施設の給水能力および計測能力に好都合なものを選定すればよいことになる。もし計測上この限界を超える鉛直縮尺が要求されるならば、最初に定めた水平縮尺 $1/500$ が不適当であり、さらに大きい値を選んで上の計算を繰り返さねばならない。

5. 結 言

以上、固定床開水路模型実験の模型歪みが、流水の抵抗則から論じられるべきことを述べ、矩形断面水路について粗度と歪みとの関連を明らかにした。この考察は水流を一次元的に取り扱っており、水流内部の複雑な混合機構については、その結果としてあらわれる水路断面の平均的な流水抵抗だけを問題としているのであるから、水路内の流況、とくに副流の強さおよび方向に關しての相似が要求される場合には適用できない。さらにまた模型実験の遂行に當つては、所要の模型粗度の實現方法、すなわち人工粗度の型式が問題となるのであるが、一応、従来不明瞭のまま行われていた模型歪みに一つの合理的根拠を示し得たと考えられる。

おわりに本研究の遂行にあつて、終始暖い御指導と御鞭撻を賜つた矢野勝正教授に深甚なる謝意を表するとともに実験計算に援助を頂いた大学院学生村本嘉雄氏に謝意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) C. H. Keulegan : Laws of Turbulent Flow in Open Channels, Jour. of Research of National Bureau of Standards, Vol. 21, Dec. 1937.
- 2) R. W. Powell : Flow in a Channel of Definite Roughness, Trans. A.S.C.E., Vol. 111, 1946.
- 3) H. A. Einstein and N. L. Barbarossa : River Channel Roughness, Trans. A.S.C.E., Vol. 117, 1952.
- 4) Waterways Experiment Station : Study of Finite Boundary Roughness in Rectangular Flumes, Technical Memorandum No. 2-364, June 1953.