

Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots

東京農工大・工 合田 洋 (Hiroshi Goda)

Tokyo Univ. of Agriculture and Technology

東工大・情報 北野晃朗 (Teruaki Kitano)

Tokyo Institute of Technology

東京農工大・工 森藤孝之 (Takayuki Morifuji)

Tokyo Univ. of Agriculture and Technology

よく知られているように, ファイバー結び目 K のアレキサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ はモニックになります ([6], [7], [8]). $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ が $\pm t^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) による積を法として well-defined であることおよび対称性 $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$ から, $\Delta_K(t)$ は最高次と最低次係数が 1 の多項式で表されることになります. この条件は多くの結び目 (例えば, 交代結び目 [5] や 10 交点以下の素な結び目 [3] 等) に対して十分条件ですが, 一般には必要十分条件になりません. 実際, モニックアレキサンダー多項式をもつファイバー結び目でない結び目が無限個存在します.

本研究の目的は, 和田 [9] のひねりアレキサンダー多項式 $\Delta_{K,\rho}(t)$ によるファイバー結び目の一判定法を与えることです. より具体的には, $\Delta_{K,\rho}(t)$ の Reidemeister torsion による解釈 [4] を経由することにより, 次の結果を導くことができます.

Theorem. K を S^3 内のファイバー結び目, $\rho: \pi_1 K \rightarrow SL(2n, \mathbb{F})$ を体 $\mathbb{F}$ 上の表現, $\alpha: \pi_1 K \rightarrow \mathbb{Z} = \langle t \rangle$ を可換化準同型とする. このとき, テンソル表現 $\rho \otimes \alpha: \pi_1 K \rightarrow GL(2n, \mathbb{F}(t))$ に付随した K の Reidemeister torsion $\tau_{\rho \otimes \alpha} K$ はモニック多項式の有理関数として表される. 特に, $\tau_{\rho \otimes \alpha} K$ は t^{2nk} ($k \in \mathbb{Z}$) による積を法として well-defined である.

証明等詳細はプレプリント [1] を参照して下さい. この結果を用いると, アレキサンダー多項式ではできなかった次の結び目 K のファイバー性を判定することができます.

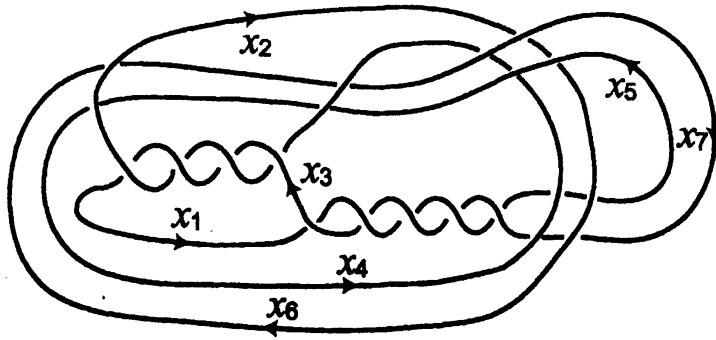


図 1:

Example. $\pi_1 K$ は次の群表示をもちます.

$$\pi_1 K = \langle x_1, \dots, x_7 \mid r_1, \dots, r_6 \rangle,$$

$$r_1 : x_2 x_1 = x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1},$$

$$\begin{aligned} r_2 : x_6 x_5 x_6^{-1} \\ = x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_4^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3 : x_6 x_7 x_6^{-1} \\ = x_4 x_3 x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3^{-1} x_4^{-1}, \end{aligned}$$

$$r_4 : x_5 x_6 x_5^{-1} = x_7 x_2 x_7^{-1},$$

$$\begin{aligned} r_5 : x_2 x_6 x_2^{-1} \\ = x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_7 x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1}, \end{aligned}$$

$$r_6 : x_5 x_4 x_5^{-1} x_7 = x_7 x_3 x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1}.$$

直接計算から, $\Delta_K(t) = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ であることがわかります. そこで $\pi_1 K$ の表現として, 以下で定義される有限体 $\mathbb{F}_5$ 上の非可換表現 $\rho : \pi_1 K \rightarrow SL(2, \mathbb{F}_5)$ をとります:

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \rho(x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \rho(x_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(x_5) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_6) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \rho(x_7) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき, $\rho \otimes \alpha$ に付随した K の Reidemeister torsion は

$$\tau_{\rho \otimes \alpha} K = 3t^2 + 3$$

となります. これは t^{2k} ($k \in \mathbb{Z}$) を法として well-defined なので, K はファイバー結び目でないことがわかります.

逆に, $\tau_{\rho \otimes \alpha} K$ のモニック性から結び目 K のファイバー性を特徴づけることができるか気になるところですが, 現在のところその真偽は定かではありません. そこで, 次の問いを挙げておくことにします [2].

Problem. ファイバー結び目でない任意の結び目 K に対して, $\tau_{\rho \otimes \alpha} K$ がモニック多項式の有理関数とならない表現 $\rho: \pi_1 K \rightarrow SL(2n, \mathbb{F})$ が存在するか.

アレキサンダー多項式がモニックでない(よって, もちろんファイバーでない) 結び目については自明表現をとればよいので, 上記問題はモニックアレキサンダー多項式をもつファイバーでない結び目が本質的対象です.

参考文献

- [1] H. Goda, T. Kitano and T. Morifuji, *Reidemeister torsion, twisted Alexander polynomial and fibered knots*, preprint (2002).
- [2] H. Goda and T. Morifuji, *Twisted Alexander polynomial for $SL(2, \mathbb{C})$ -representations and fibered knots*, preprint (2003).
- [3] T. Kanenobu, *The augmentation subgroup of a pretzel link*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7 (1979), 363–384.
- [4] T. Kitano, *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion*, Pacific J. Math. 174 (1996), 431–442
- [5] K. Murasugi, *On a certain subgroup of the group of an alternating link*, Amer. J. Math. 85 (1963), 544–550.
- [6] L. Neuwirth, *Knot Groups*, Annals of Mathematics Studies, No. 56 Princeton University Press, Princeton, N.J.(1965).
- [7] E. Rapaport, *On the commutator subgroup of a knot group*, Ann. of Math. (2) 71 (1960), 157–162

- [8] J. Stallings, *On fibering certain 3-manifolds*, 1962 Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), 95–100.
- [9] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology 33 (1994), 241–256.