

3 次の Siegel modular form について

露峰茂明

H_g を g 次の Siegel 上半平面, すなわち
 $\{ Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^t Z = Z, \operatorname{Im}(Z) > 0 \}$ とし、 Γ_g を modular 群
 すなわち $\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2g}(\mathbb{Z}) \mid {}^t A C = {}^t C A, {}^t B D = {}^t D B,$
 ${}^t A D - {}^t C B = I_g \}$ とする。 Z は常に H_g 上の変数を
 表わすものとする。

Γ_g は H_g に、いわゆる modular 変換

$$Z \longmapsto MZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g$$

によって作用している。商空間 H_g/Γ_g は $\mathbb{Q}$ 上定義された quasi-projective algebraic variety となり、
 これは $\mathbb{C}$ 上の g 次元 Abel 多様体の coarse moduli
 である。

H_g/Γ_g に付随する次数付環 (これは modular
 form のなす次数付環である) を調べることは
 興味あることと思われる。

f を H_g 上の正則関数とする。 f が

$$f(MZ) = |CZ + D|^k f(Z) \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g$$

を満たすとき、 f を weight k の modular form

という ($g=1$ の時は加えて、cusp でも正則であるとする)。 $\mathcal{A}(\Gamma_g)$ を modular form のなす環とする。 $\mathcal{A}(\Gamma_g)$ は modular form の weight によって、次数環となり、 $\text{Proj}(\mathcal{A}(\Gamma_g))$ は H_g/Γ_g の Satake compact 化である。

f を H_g 上の有理関数とする。 f が

$$f(MZ) = f(Z), \quad M \in \Gamma_g$$

を満たすとき、 f を modular function という ($g=1$ のときは加えて、cusp でも有理型であるとする)。 $K(\Gamma_g)$ は modular function のなす体を表わす。

$g=1$ の時、 $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ は weight 4 & 6 の 2 つの Eisenstein 級数で生成される。 $g=2$ の時は、井草により $\mathcal{A}(\Gamma_2)$ は weight が 4, 6, 10, 12 の 4 つの Eisenstein 級数と weight 35 の theta constant の多項式で表わされている modular form により生成されることが示されている。これらの場合、生成元は整の Fourier 係数をもつもののみであるようにできている。

我々は $g=3$ の時を扱うのであるが、結果は

次の通りである。

$\mathcal{A}(\Gamma_3)$ は theta constant の有理式として書ける 45 個の modular form で生成される (この数は最小とは思われない)、これらはいずれも分母が有限の有理 Fourier 係数を持つ。 $\mathcal{A}(\Gamma_3)_k$ で weight k の modular form の線型空間を表わすことにする。

$\mathcal{A}(\Gamma_3)$ の generating function $\sum_k \dim \mathcal{A}(\Gamma_3)_k T^k$ は

$$\frac{1}{(1-T^{12})^3(1-T^{18})(1-T^{20})(1-T^{25})(1-T^{30})} \times$$

$$\{ 1 + T^4 + T^6 + T^8 + 2T^{10} + T^{12} + 3T^{14} + 4T^{16} + 4T^{18} + 7T^{20} + 9T^{22} + 11T^{24} + 14T^{26} + 17T^{28} \\ + 22T^{30} + 25T^{32} + 32T^{34} + 36T^{36} + 45T^{38} + 56T^{40} + 61T^{42} + 70T^{44} + 85T^{46} \\ + 88T^{48} + 100T^{50} + 111T^{52} + 111T^{54} + 127T^{56} + 128T^{58} + 128T^{60} + 139T^{62} + 131T^{64} \\ + 134T^{66} + 129T^{68} + 125T^{70} + 118T^{72} + 109T^{74} + 104T^{76} + 90T^{78} + 85T^{80} \\ + 72T^{82} + 64T^{84} + 55T^{86} + 46T^{88} + 40T^{90} + 31T^{92} + 28T^{94} + 21T^{96} + 16T^{98} \\ + 14T^{100} + 8T^{102} + 7T^{104} + 5T^{106} + 3T^{108} + 2T^{110} + 2T^{112} + T^{116} \}$$

で得られる。また $K(\Gamma_3)$ の生成元も 9 つの modular form の (weight 0 の) 比として表わすことができる。

$\mathcal{A}(\Gamma_3)$ の 45 個の生成元については、それをこの報告集にかく余裕はないので略すことにするが、体 $K(\Gamma_3)$ の生成元は後にかくことにする。

我々は theta 関数を次のように定義する。

$l, m \in M_{1,g}(\mathbb{R})$ に對し

$$\vartheta_m^l(z, \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{(\frac{1}{2}{}^t(n + \frac{1}{2}{}^t l)z + (n + \frac{1}{2}{}^t l)(x + \frac{1}{2}{}^t m))}$$

ここで x は $\mathbb{C}^g$ 上の元とし、 $e(*) = \exp(2\pi\sqrt{-1}*)$ とする。 $\vartheta_m^l(z) = \vartheta_m^l(z, 0)$ とおき、これを theta constant とする。

§ 1 準同型 ρ_g

$\xi_1, \dots, \xi_r$ を $\mathbb{C}$ 上の変数とし、 $S(r)$ を $\mathbb{C}[\xi_1 - \xi_r]$ ($1 \leq i \leq r$) の次のように定義される部分環とする。 S 次の齊次式 $I \in \mathbb{C}[\xi_1 - \xi_r]$ が $S(r)$ の元であるのは

$$I(\dots, \frac{a\xi_i + b}{c\xi_i + d}, \dots) = \prod_{i=1}^r (c\xi_i + d)^{-S} I(\dots, \xi_i, \dots), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

を満たすときである。

さらに $S(2, r)$ を $S(r)$ の次数付部分環で次のように定義されるものとする。 $I \in S(r)$ が $S(2, r)$ の元であるのは $I(\xi_1, \dots, \xi_r)$ が $\xi_1, \dots, \xi_r$ について対称であるときである。 $S(2, r)$ を degree r の二次形式の不変式の次数環という。 $I \in S(2, r)$ が S 次であるとは、各々の ξ_i に対し S 次であること

とある。

井草 [2] により、我々は準同型

$$\rho_g: \mathcal{A}(\Gamma_g(2)) \longrightarrow S(2g+2)$$

を持つ、ここで $\Gamma_g(2)$ は Γ_g の level 2 の主合同群である。 $g=1, 2$ の場合 ρ_g は単射である。 ρ_g は一意的に定まるものではないが、 $g=3$ の場合は特に次のように取れる。

V を $\mathcal{H}[\frac{1}{101}](2)$ の零点集合とすると、

$$0 \longrightarrow \{f \in \mathcal{A}(\Gamma_3(2)) \mid f|_V = 0\} \longrightarrow \mathcal{A}(\Gamma_3(2)) \xrightarrow{\rho_3} S(8)$$

は exact になる。 ρ_g を $\mathcal{A}(\Gamma_g)$ に制限すれば、その像は $S(2, 2g+2)$ にはいる。 $g=1$ の時 $\rho_1: \mathcal{A}(\Gamma_1) \rightarrow S(2, 4)$ は同型、 $g=2$ の時 $\rho_2: \mathcal{A}(\Gamma_2) \rightarrow S(2, 6)$ は単射、そして $g=3$ の時

$$0 \longrightarrow \chi_{18} \mathcal{A}(\Gamma_3) \longrightarrow \mathcal{A}(\Gamma_3) \xrightarrow{\rho_3} S(2, 8)$$

は exact になる、ここで χ_{18} は後に定義する weight 18 の modular form である。 χ_{18} は H_3/Γ_3 において {hyperelliptic locus} を定義するものであり、またイデアル (χ_{18}) は $\mathcal{A}(\Gamma_3)$ で素イデアルとなる。 $R \in \mathcal{A}(\Gamma_3)$ がイデアル (χ_{18}) にはいってなければ、 $f = g/R$ ($g \in \mathcal{A}(\Gamma_3)$) の ρ_3 による像は定義される。

そこで $\mathcal{A}'(\Gamma_3)$ を ρ_3 による像が $S(2,8)$ にはいるような有理 modular form の次数付環とする。明らかに $\mathcal{A}(\Gamma_3) \subset \mathcal{A}'(\Gamma_3)$ である。

$R = \begin{pmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix} \subset H_3$ とおくと、明らかに $R \subset V$ である。
 $z_0 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_3 \end{pmatrix} \in R$, $f \in \mathcal{A}'(\Gamma_3)$ に対し

$$\bar{f}(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in V}} f(z)$$

と定義する。 Γ_3' を theta characteristic $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対する Γ_3 の stabilizer subgroup とする。 $\Gamma_3' \times \Gamma_1$ は写像

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} A & B & a & b \\ C & D & c & d \end{pmatrix}$$

によって Γ_3 の部分群と表えられるが、この時 $\Gamma_3' \times \Gamma_1$ は R も V も全体としては動かさない。 f の weight を k とし、 $M = \begin{pmatrix} A & B & a & b \\ C & D & c & d \end{pmatrix}$ を $\Gamma_3' \times \Gamma_1$ の元とすると、

$$\begin{aligned} \bar{f}(Mz_0) &= \lim_{\substack{z \rightarrow Mz_0 \\ z \in V}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in V}} f(Mz) \\ &= |Cz_1 + D|^k |Cz_3 + d|^k \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in V}} f(z) \\ &= |Cz_1 + D|^k |Cz_3 + d|^k \bar{f}(z_0) \end{aligned}$$

である。従って $\bar{f} \in \mathcal{A}(\Gamma_3') \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1)$ 。我々は $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ も $\mathcal{A}(\Gamma_3')$ も良く構造の分かっていうことに注意

する。 π は $\mathcal{A}'(13)$ から $\mathcal{A}(12') \otimes \mathcal{A}(11)$ への準同型を定義する。

$\mathcal{A}(12')$ の p_2 での像を $S'(2,6)$ とおく。我々は次の図を可換にする写像 $\pi: S(2,8) \rightarrow S'(2,6) \otimes S(2,4)$ を得る；

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}'(13) & \xrightarrow{p_3} & S(2,8) \\
 \pi \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \pi \\
 \mathcal{A}(12') \otimes \mathcal{A}(11) & \xrightarrow{p_2 \otimes p_1} & S'(2,6) \otimes S(2,4)
 \end{array}$$

この $S(2,8)$ から $S'(2,6) \otimes S(2,4)$ への写像 π の定義はここでは省くことにする。 $f \in \mathcal{A}(13)$ に対し、 $f\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ を計算することはそう容易ではないが、もしその p による像が分かっているならば、図の右側の π を用いて計算することができる(図の $p_2 \otimes p_1$ は分かり易い同型写像である)。また $f \in \mathcal{A}(13)$ が V に沿って R に近づく時 order いくつの零を持つかも $p_3(f)$ をみることによつて容易に計算できる。

上の可換な図によつて多くの結果を得ることが出来るが、次後はそれを断めらうと述べ

ていくことにする。

§ 2 方法の概略

以後は $A(\bar{z})$ を A , $A'(\bar{z})$ を A' とおくことにする。 R , V は前と同じものとする。 V は R で non-singular である。

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & \tau \\ \tau & Z_3 \end{pmatrix} \in H_3, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに $Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1^0 \\ 0 & Z_3 \end{pmatrix}$ とおき、 Z_0 での $\mathcal{V}^{[111]}_{[101]}$ の展開を求めると、

$$\mathcal{V}^{[111]}_{[101]}(Z) = -\frac{1}{2\sqrt{-1}} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial \tau_i} \mathcal{V}^{[110]}(Z_1, 0) \mathcal{V}^{[0]}(Z_3) \mathcal{V}^{[1]}(Z_3) \mathcal{V}^{[1]}(Z_3) \tau_i \\ + (\tau_i \text{ の higher term })。$$

$\mathcal{V}^{[0]}(Z_3) \mathcal{V}^{[1]}(Z_3) \mathcal{V}^{[1]}(Z_3)$ は H_1 のどの点でも零とならず、また $\frac{\partial}{\partial \tau_i} \mathcal{V}^{[110]} (i=1, 2)$ は $Z_1 \in H_2$ に対して同時に消えてしまうことはない。我々は Z_1 を特に $\frac{\partial}{\partial \tau_1} \mathcal{V}^{[110]}(Z_1, 0) \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial \tau_2} \mathcal{V}^{[110]}(Z_1, 0) \neq 0$ なるようにと、とおくことにする。この時 V 上では τ_1 は τ_2 の analytic な関数となり、逆も成り立つ。

$f \in A$ に対し、 Z_0 での V 上の展開を

$$f(Z) = \sum_n a_n(Z_0) \tau_2^n$$

とおき、 $a_n(z_0) \neq 0$ なる n の最小数を $\nu(f)$ とおく。 $\nu(f)$ は f が V に沿って R に近づけたときの零の order であるが、今後は単に f の order ということにする。 $f \in \mathcal{A}$ の weight は偶であることに気をつければ $\nu(f) \in 2\mathbb{Z}$ を得る。また f が V 上で恒等的に消えていけば、 $\nu(f) = +\infty$ とおく。

ここで $\mathcal{A}$ の modular form のうちで特別なものをふたつ紹介する。

ところで theta characteristic $k = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \in M_{2,g}(\mathbb{Z})$ が偶であるとは $\varrho(\frac{1}{2}l^+m) = 1$ なることとし、奇であるとは $\varrho(\frac{1}{2}l^+m) = -1$ なることとする。 $g=3$ の時は、36 個の偶 theta characteristic が存在する。

$$\chi_{18} = \prod_{k: \text{偶}} \nu[k]$$

とおくと χ_{18} は weight 18 の modular form となり、§1 に述べたような性質を持つ。従って $\nu(\chi_{18}) = +\infty$ である。

$\{k_1, \dots, k_5\}$ を異なる、た偶 theta characteristic からなる列とする。この列が syzygetic であるとはこの 3 つの k_1, k_2, k_3 の和もまた偶 theta characteristic になることであるとする。 $g=3$ の

場合、最大な syzygetic な列は常に 8 つの元からなり、このような列は全部で 135 個ある。

weight 28 の modular form χ_{28} を次のように定義する。
 $30\chi_{28}$ は偶 theta characteristic 全体から最大 syzygetic な列を引いたものに対応する theta constant の積を二乗し (135 個の最大 syzygetic 列について) それを取ったものとする。 χ_{28} は $\{\text{hyperelliptic locus}\}$ 上では reducible point ($\Leftrightarrow (\frac{z}{0}, \frac{1}{z_3})$ に modular 変換で移る点) ではないが消えない。即ち

$$z \in H_3 \begin{cases} \chi_{28}(z) \neq 0 & ; z \text{ は non-hyperelliptic curve の} \\ & \text{Jacobi 多様体に対応する} \\ \chi_{28}(z) = 0 & \begin{cases} \chi_{28}(z) \neq 0 ; z \text{ は hyperelliptic curve の} \\ & \text{Jacobi 多様体に対応する} \\ \chi_{28}(z) = 0 ; z \text{ は reducible point.} \end{cases} \end{cases}$$

また $\nu(\chi_{28}) = 8$ である。我々は証明なしで、次の命題を述べる。

命題 1. f を Λ の元とする。 $\nu(f) = \frac{2}{\eta} \text{weight}(f)$ ならば、 f は V 上で定数倍を除いて χ_{28} の中に一致する。また $\nu(f) > \frac{2}{\eta} \text{weight}(f)$ ならば、 f は

V 上で消える、即ち $\nu(f) = +\infty$ である。§1 に述べた χ_{18} の性質により、modular form $g \in \mathcal{A}$ が存在して、 $f = g \chi_{18}$ とかける。

偶数 ν に対して $\mathcal{A}$ のイデアル $\mathcal{A}(\nu)$ を

$$\mathcal{A}(\nu) = \{f \in \mathcal{A} \mid \nu(f) \geq \nu\}$$

によって定義する。明らかに $\mathcal{A}(\nu_1) \mathcal{A}(\nu_2) \subset \mathcal{A}(\nu_1 + \nu_2)$ である。さらに我々は

$$\overline{\mathcal{A}(\nu)} = \mathcal{A}(\nu) / \mathcal{A}(\nu+2)$$

と定義する。 $\overline{\mathcal{A}(0)}$ は次数付環であり、 $\overline{\mathcal{A}(\nu)}$ は次数付 $\overline{\mathcal{A}(0)}$ -加群となる。

ν を 8 の倍数とする。この時 $f \in \mathcal{A}(\nu)$ に対し $f \cdot \chi_{24}^{-\frac{\nu}{8}}$ は $\mathcal{A}'$ に属していることが示される。 $\overline{\mathcal{A}(\nu)}$ を

$$\mathcal{A}(\nu) \xrightarrow{\text{mult. by } \chi_{24}^{-\frac{\nu}{8}}} \mathcal{A}' \xrightarrow{\overline{\pi}} \mathcal{A}(\Gamma_2') \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1)$$

なる写像とすると、

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(\nu+2) \longrightarrow \mathcal{A}(\nu) \xrightarrow{\overline{\pi(\nu)}} \mathcal{A}(\Gamma_2') \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1)$$

は exact であり、これにより $\overline{\mathcal{A}(\nu)}$ は $\mathcal{A}(\Gamma_2') \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1)$ の部分加群とみられる。

また order がそれぞれ 2, 4, 6 の modular form β, γ, δ を適当に選んで、 ν が mod 8 で 2 (resp 4, 6)

に等しい時、 $\bar{A}(L)$ を

$$\bar{A}(L) \xrightarrow{\text{mult by } \delta x_{2\delta}^{-\frac{L+6}{\delta}} \text{ (resp } \delta x_{2\delta}^{-\frac{L+4}{\delta}}, \beta x_{2\delta}^{-\frac{L+2}{\delta}})} \bar{A}' \xrightarrow{\pi} \bar{A}(l_2') \otimes \bar{A}(l_1')$$

によって定義すれば、上と同様にして $\bar{A}(L)$ も $\bar{A}(l_2') \otimes \bar{A}(l_1')$ の $\bar{A}(l_1)$ -部分加群とみることができる。 $\bar{A}(l_1)$ の部分環で 5 変数の多項式環の部分環と同型のもので、 A の部分環に lift できるものが存在するが、その環上の加群として

$$A/(x_5) \cong \bar{A}(l_1) \oplus \bar{A}(l_2) \oplus \cdots \oplus \bar{A}(L) \oplus \cdots$$

の同型を得る。

$x_{2\delta} A(L) \subset A(L+\delta)$ であるから、 $\bar{A}(l_2') \otimes \bar{A}(l_1')$ の部分加群として $\bar{A}(L) \subset \bar{A}(L+\delta)$ であるが、実際 $L=0$ の場合を除き $\bar{A}(L) = \bar{A}(L+\delta)$ を得る。従って

$$A/(x_5) \cong \bar{A}(l_1) \oplus \bigoplus_{k \geq 0} (\bar{A}(l_2) \oplus \bar{A}(l_4) \oplus \bar{A}(l_6) \oplus \bar{A}(l_8)) x_{2\delta}^k$$

となる。

我々はまず環 $\bar{A}(l_1)$ の生成元を求め、 π での像がそれになる A の元を求める。次に $\bar{A}(l_2)$, $\bar{A}(l_4)$, $\bar{A}(l_6)$, $\bar{A}(l_8)$ の $\bar{A}(l_1)$ -加群としての構造を決めて、その生成元に落ちてくる A の元を求める。それらと $x_{2\delta}$, $x_{2\delta}^2$ が A の生成元になることは、命題1により容易に分かる。また $\bar{A}(l_1)$, $\dots$, $\bar{A}(l_8)$ の

generating function を求めれば自動的に $\mathcal{A}$ の generating function も決定される。

§ 3 $K(\Gamma_3)$ について I

modular form は常に偶 weight のものしか考えないことにする。 $K(\Gamma_3)$ の生成元については、なるべく $\mathcal{A}$ の構造定理は用いない簡素な構成法を示すことにする。

$\mathcal{A}(\Gamma_3)$ は二つの modular form j_4, j_6 で生成されている。なお

$$j_4 = \sum_{k: \text{偶}} j[k]^8, \quad j_6 = \sum_{M: \Gamma_3/\Gamma_3(2)} M j[0^0]^8 j[1^0]^4$$

である、ここで weight k の $\Gamma_3(2)$ の modular form f と $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_3$ に対して、 $Mf(z) = |Cz+D|^{-k} f(Mz)$ とおく。

さらに $\mathcal{A}(\Gamma_2)$ は 4 つの modular form $\psi_4, \psi_6, \psi_{10}, \psi_{12}$ で生成されている。ここで

$$\begin{aligned} \psi_4 &= \sum_{k: \text{偶}} j[k]^8, & \psi_6 &= \sum_{M: \Gamma_2/\Gamma_2(2)} M j[0^0]^6 j[1^0]^2 j[0^1]^2 j[1^1]^2, \\ \psi_{10} &= \prod_{k: \text{偶}} j[k]^2, & \psi_{12} &= \sum_{M: \Gamma_2/\Gamma_2(2)} M (j[0^0] j[0^1] j[1^0] j[0^1] j[0^1] j[1^1])^2 \end{aligned}$$

である。

$\mathcal{A}(\Gamma_3)$ の generating function は $\frac{1}{(1-T^4)(1-T^6)}$, そして

$A(\Gamma)$ の generating function は $\frac{1}{(1-T^4)(1-T^6)(1-T^{10})(1-T^{12})}$ 、

$A(\Gamma')$ の generating function は

$$\frac{1+T^{12}+T^{16}+T^{18}+T^{20}+T^{24}}{(1-T^4)(1-T^6)(1-T^{10})(1-T^{12})}$$

で与えられる。これより $A(\Gamma') \otimes A(\Gamma)$ の generating function は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-T^{12})^3(1-T^{20})(1-T^{30})} \times \{ 1+T^4+T^6+T^8+2T^{10}+5T^{12}+2T^{14}+9T^{16}+9T^{18}+12T^{20} \\ & +14T^{22}+23T^{24}+19T^{26}+29T^{28}+33T^{30}+31T^{32}+39T^{34}+42T^{36}+38T^{38}+47T^{40}+41T^{42}+42T^{44} \\ & +41T^{46}+41T^{48}+32T^{50}+34T^{52}+29T^{54}+24T^{56}+21T^{58}+18T^{60}+11T^{62}+12T^{64}+7T^{66}+4T^{68} \\ & +2T^{70}+3T^{72} \} \end{aligned}$$

で与えられることが導かれる。 $A(\Gamma') \otimes A(\Gamma)$ は従って 5 つの次数が 12, 12, 12, 20, 30 の変数の多項式環と同型な部分環上 integral な拡大として実現されることを示される。我々はこれより、 ν と増やした 6 つの生成元を持つ環 $\overline{\Lambda}_0$

$$\overline{\Lambda}_0 = \mathbb{C}[\frac{1}{4}\otimes j_4, \frac{1}{6}\otimes j_6, \psi_{12}\otimes(j_4^3-2j_6^2)$$

$$(2^2 3^4 \frac{1}{2} + \frac{1}{4}^3 - 4 \frac{1}{6}^2) \otimes (j_4^3 - 2j_6^2) + 2^2 3^4 \frac{1}{2} \otimes (8j_6^2 + 5j_4^3),$$

$$\psi_{10}^2 \otimes j_4^5, \psi_{10}^3 \otimes j_6^5]$$

上 $A(\Gamma') \otimes A(\Gamma)$ は integral であることを得る。

$F(*)$ によつて環 $*$ の (次数 0 の元からなる)

体を表わすことにすれば

$$F(\bar{\Lambda}_0) = F(\mathcal{A}(\Gamma_2) \cdot \mathbb{C}((j_4^3/j_6^2)^5))$$

となり、これは $F(\mathcal{A}(\Gamma_2) \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1))$ の位数 5 の部分体である。

$\bar{\Lambda}_0$ に j_4 の j_6 を加えてできる環を $\bar{\Lambda}_1$ とおくと、

$$F(\bar{\Lambda}_1) = F(\mathcal{A}(\Gamma_2) \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1))$$

となる。ここで我々は次の注意をする。 $\mathcal{A}$ に weight が 4, 6, 12, 12, 20, 30, 10 の modular form $\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha'_{12}, \alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_{10}$ が存在して、それぞれの変による像は順に $\bar{\Lambda}_0$ の生成元及び j_4 の j_6 になっている。

さて $\Gamma_2/\Gamma_2(2)$ は 6 つの奇 theta characteristic に置換群として忠実に作用しており、実際 $\Gamma_2/\Gamma_2(2)$ と 6 次の置換群 S_6 は同型である。 $\Gamma_2/\Gamma_2(2)$ は奇 theta characteristic ひとつを動かさないような作用であるから S_5 と同型になっている。真に S_5 と S_6 の間にあるような群はないことに注意すれば次の補題を得る。

補題 1 ψ を $A(I_2)$ にはない $A(I_2')$ の元とする。

この時 $g_0 \in A(I_2), \neq 0$ が存在して

$$g_0 A(I_2') \subset A(I_2)\psi + \dots + A(I_2)\psi^b$$

となる。

系 ψ を上述のものとし、 $\psi \otimes \beta$ の形をした $A(I_2')$ の $A(I_1)$ の元を取る。この時 $\lambda' \in \bar{A}_1, \neq 0$ が存在して

$$\lambda' (A(I_2') \otimes A(I_1)) \subset \bar{A}_1(\psi \otimes \beta) + \dots + \bar{A}_1(\psi \otimes \beta)^b$$

となる。

さて、 $F(\bar{A}_0[\psi \otimes \beta])$ と $F(\bar{A}_1)$ は $F(\bar{A}_0)$ 上 linearly disjoint であるように $\psi \otimes \beta$ を取る。この時両方の体ともに $F(\bar{A}_0)$ との中間体を持たず、

$$F(\bar{A}_0[\psi \otimes \beta \cdot (\psi_0 \otimes \beta_0)^t]) = F(\bar{A}_1[\psi \otimes \beta])$$

を得る、ここで t は 5 と素な正整数である。

補題 2 上と同じ条件のもとに、 $\lambda \in \bar{A}_0, \neq 0$ が存在して

$$\lambda (A(I_2') \otimes A(I_1)) \subset \bar{A}_0(\psi \otimes \beta \cdot (\psi_0 \otimes \beta_0)^t) + \dots + \bar{A}_0(\psi \otimes \beta \cdot (\psi_0 \otimes \beta_0)^t)^{30}$$

となる。

§ 4 $K(\Gamma_3)$ について II

β を order 2 の modular form とする。§2 において定義した $\bar{\Psi}(\nu)$ を、この β を用いてすることにする。すなわち、 $\nu \equiv 2$ (resp. 4, 6) mod 8 なる時 $\bar{\Psi}(\nu)$ を

$$\mathcal{A}(\nu) \xrightarrow{\text{mult. by } \beta^3 \chi_{28}^{-\frac{\nu+6}{8}} \text{ (resp. } \beta^2 \chi_{28}^{-\frac{\nu+4}{8}}, \beta \chi_{28}^{-\frac{\nu+2}{8}})} \mathcal{A}' \xrightarrow{\bar{\Psi}} \mathcal{A}(\Gamma_2') \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1)$$

により定義する。

さてここで環 Λ_0 を

$$\Lambda_0 = \mathbb{C}[\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha'_{12}, \alpha_{20}, \alpha_{30}, \beta, \chi_{28}, \chi_{18}]$$

により定義する。 $\bar{\Lambda}_0 = \bar{\Psi}(\Lambda_0)$ であり、 $\bar{\Lambda}_0 \subset \bar{\mathcal{A}}(0)$ である。我々は $\bar{\mathcal{A}}(0)$ -加群の昇鎖

$$\bar{\mathcal{A}}(0) \subset \bar{\Psi}(8) \mathcal{A}(8) \subset \dots$$

$$\bar{\Psi}(2) \mathcal{A}(2) \subset \bar{\Psi}(10) \mathcal{A}(10) \subset \dots$$

$$\bar{\Psi}(4) \mathcal{A}(4) \subset \bar{\Psi}(12) \mathcal{A}(12) \subset \dots$$

$$\bar{\Psi}(6) \mathcal{A}(6) \subset \bar{\Psi}(14) \mathcal{A}(14) \subset \dots$$

を持つ。すべて $\mathcal{A}(\Gamma_2') \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1)$ の部分加群であり、 $\mathcal{A}(\Gamma_2') \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1)$ は Noether $\bar{\Lambda}_0$ -加群であるから、正の偶数 ν_0 が存在して、すべての $\nu_0 \leq \nu$ に對し

$$\bar{\Psi}(\nu-8) \mathcal{A}(\nu-8) = \bar{\Psi}(\nu) \mathcal{A}(\nu)$$

となる。補題 1 と上のことから我々は次を得

る。

補題 3 $f \in A$ が $\nu(f) \geq \nu_0$ であるとする。この時 $g, h \in A$ が存在して

$$f = g\chi_{25} + h\chi_{15}$$

とかける。

さてここで我々は β が

$$\overline{\pi}(f)\beta^4 = 4 \otimes f \cdot (\chi_0 \otimes f_4 f_6)^4$$

なるものであると仮定する、 $4 \otimes f$ は §3 の性質を持つものである。

補題 4 ν は 240 より大きい正の偶数とする。

この時、 $\mathbb{C}[\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha'_{12}, \alpha_{20}, \alpha_{30}]$ の元 P で order 0 のものが存在し、すべての ν に対し

$$\overline{\pi}(\nu)(P, A(\nu)) \subset \overline{\pi}(\nu)(\Lambda_0 \cap A(\nu))$$

となる。

証明) $\Lambda_0 \cap A(\nu)$ は

$$\sum_{2n_1 + 8n_2 \geq 2} \mathbb{C}[\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha'_{12}, \alpha_{20}, \alpha_{30}] \beta^{n_1} \chi_{25}^{n_2}$$

なるものをなす。例えば $\nu \equiv 0 \pmod{8}$ の場合、

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(\omega)(\Lambda_0 \cap A(\omega)) &\supset \overline{\Lambda}_0(\psi \otimes \bar{\psi}(\psi_0 \otimes \bar{\psi}_0)^4) + \cdots + \overline{\Lambda}_0(\psi \otimes \bar{\psi}(\psi_0 \otimes \bar{\psi}_0)^4)^{\frac{1}{2}} \\ &\supset \overline{\Lambda}_0(\psi \otimes \bar{\psi}(\psi_0 \otimes \bar{\psi}_0)^4) + \cdots + \overline{\Lambda}_0(\psi \otimes \bar{\psi}(\psi_0 \otimes \bar{\psi}_0)^4)^{30}. \end{aligned}$$

補題 2 より P の存在は保証される。他の場合も同様である。

補題 5 すべての係数 $\lambda \geq 0$ に対し、 $A(\lambda)$ は Λ_0 上有限生成加群である。

証明) これは §2 の末尾に述べたアイデアと補題 3 により容易に示される。

定理 $K(U_3) = F(\Lambda_0)$

証明) $A(2) \cap \Lambda_0$ は Λ_0 の素イデアルである。さらに環 $\Lambda_0[\chi_k/\chi_{23}^k, (k=1, 2, \dots)]$ の中でイデアル

$$(A(2) \cap \Lambda_0, \chi_k/\chi_{23}^k (k=1, 2, \dots))$$

は素イデアルである。 $\Lambda_0[\chi_k/\chi_{23}^k (k=1, 2, \dots)]$ の上記のイデアルによる局所化を Λ で表わすことにする。 Λ は Λ_0 の商体の部分環である。

定理は十分な大きな λ_1 に対して、 $A(\lambda_1)$ は Λ の

商体にはいることを示せば十分である、実際に λ に λ_{23} の十分大きな巾乗をかければ $\lambda(\lambda)$ にはいってしまうからである。

補題 5 より、 $\lambda(\lambda)$ の有限個の modular form の列 $\{f_1, \dots, f_t\}$ が存在して

$$\lambda(\lambda) \subset \lambda f_1 + \dots + \lambda f_t$$

である。我々はこのような modular form の列のうち極小なものを取ってきたと仮定してよい。今、 λ_1 は $\max\{\lambda_0, 240\}$ より大きい任意の偶数としたとき、 $t=1$ であることを証明しよう。

今、 $t \geq 2$ と仮定する。さらに f_t の order は λ_1 であるとしても以下の証明の一般性は失われない。補題 4 より、 $\mathbb{C}[\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha_{12}', \alpha_{20}, \alpha_{30}]$ の order 0 の元 P が存在して

$$\bar{\pi}(\lambda) P f_t = \bar{\pi}(\lambda) \lambda_0, \quad \lambda_0 \in \lambda(\lambda) \cap \Lambda_0$$

となるようにできる。この時 $\bar{\pi}(\lambda) (P f_t - \lambda_0) = 0$ となるから $\lambda(P f_t - \lambda_0) \geq \lambda_1 + 2$ である。再び補題 4 を用いて

$$\bar{\pi}(\lambda_1 + 2) (P^2 f_t - P \lambda_0) = \bar{\pi}(\lambda_1 + 2) \lambda_1, \quad \lambda_1 \in \lambda(\lambda_1 + 2) \cap \Lambda_0$$

となる。これを繰り返すことにより、次の結

果を得る。 $Q \in \Lambda_0$ が存在して

$$\angle(P^*f_t - Q) \geq \nu_1 + \delta.$$

従って補題 3 より

$$P^*f_t - Q = g\chi_{2s} + h\chi_{1s} \quad g, h \in \Lambda$$

とかけると、ここで明らかに $\nu(g) \geq \nu_1$ 即ち $g \in \mathcal{A}(\nu_1)$

である。 n を十分大きくとって、 $h\chi_{2s}^n \in \mathcal{A}(\nu_1)$

とすれば、 $\mathcal{A}(\nu_1) \subset \Lambda f_1 + \dots + \Lambda f_t$ なる仮定により、

$$g = \sum_{i=1}^t a_i f_i, \quad h\chi_{2s}^n = \sum_{i=1}^t b_i f_i, \quad a_i, b_i \in \Lambda$$

とかけ、従って

$$(P^* - a_t\chi_{2s} - b_t\chi_{1s}/\chi_{2s}^n)f_t = Q + \sum_{i=1}^{t-1} a_i\chi_{2s}f_i + \sum_{i=1}^{t-1} b_i\chi_{1s}/\chi_{2s}^n f_i$$

となる。ここで P は order 0 であつたから、

$P^* - a_t\chi_{2s} - b_t\chi_{1s}/\chi_{2s}^n$ は Λ で unit であり、従つて f_t

は他の生成元の線形結合で書けてしまった。

$\{f_1, \dots, f_t\}$ の極小性より $t=1$ でなければならぬ。

従つて $\mathcal{A}(\nu_1) \subset \Lambda f_1$ であるが、 $\mathcal{A}(\nu_1)$ の中には

Λ と共通の元、例えば χ_{1s} 、がはいっている

ので f_1 は Λ の商体の元である。これで定理は

示された。

H_3/Γ_3 は 6 次元の variety であるから、その関

数体は6つか7つの元で生成されるはずである。6ならば rational variety ということになるが、これはまだ分かっていない。

いずれにせよ8つの生成元でかいてしまえば、そこまでの回らなかつたことは不徳のいたすところでありまふ。

最後に具体的に生成元を与えて終わりにする。

$$\text{系} \quad K(\bar{3}) = F(\mathbb{C}[\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha_{12}', \alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_{10}\beta_4, \alpha_{28}, \alpha_{18}])$$

証明) $\alpha_0\beta_4$ が途中に使ったいくつかの条件を満たすことを示せばよいが、これは§1に述べた至という写像により、容易な計算で確かめられる。

$$\alpha_4 = \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{F}_4^*} \nu[k]^8,$$

$$\alpha_6 = 2^{-6} 3^{-1} 7^{-1} \sum_{M \in \mathbb{F}_7^*} M \nu_{[000]}^5 \nu_{[100]}^5 \nu_{[101]}^5 \nu_{[001]}^5 \nu_{[011]}^5 \nu_{[010]}^5 \nu_{[111]}^5 \nu_{[110]}^5$$

$$\alpha_{10} = -2^{-3} 3^{-2} 5^{-1} 11^{-1} \sum_{M \in \mathbb{F}_{11}^*} M \nu_{[000]}^{11} \nu_{[010]}^{11} \nu_{[010]}^{11} \nu_{[110]}^{11} \nu_{[010]}^{11} \nu_{[010]}^{11} \nu_{[000]}^{11} \nu_{[100]}^{11} \nu_{[101]}^{11} \nu_{[000]}^{11} \nu_{[001]}^{11} \nu_{[000]}^{11} \nu_{[001]}^{11} \nu_{[010]}^{11} \nu_{[111]}^{11} \nu_{[110]}^{11}$$

$$\alpha_{12} = 2^{-6} 3^{-2} 5^{-1} \sum_{M: \Gamma(72)} M (\vartheta_{000}^{110} \vartheta_{000}^{011} \vartheta_{010}^{010} \vartheta_{110}^{111} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{010}^{000})^4$$

$$\alpha'_{12} = 2^{-5} 3^4 \sum_{M: \Gamma(72)} M (\vartheta_{000}^{110} \vartheta_{000}^{110} \vartheta_{000}^{010} \vartheta_{000}^{010} \vartheta_{100}^{010} \vartheta_{010}^{010} \vartheta_{110}^{110} \vartheta_{110}^{110} \vartheta_{010}^{000} \vartheta_{010}^{000} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{000}^{000})^2$$

$$\alpha_{20} = -2^3 5^{-1} 7^{-1} \alpha_{10}^2 + 2^{-4} 3^{-5} 7^{-1} \sum_{M: \Gamma(72)} M (\vartheta_{000}^{110} \vartheta_{000}^{110} \vartheta_{000}^{010} \vartheta_{000}^{010} \vartheta_{100}^{010} \vartheta_{010}^{010} \vartheta_{110}^{110} \vartheta_{110}^{110} \vartheta_{100}^{000} \vartheta_{010}^{000} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{010}^{000} \vartheta_{010}^{000} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{000}^{000})^2$$

$$\alpha_{30} = 2^{-4} 5^{-1} 7^{-1} 11^{-1} \alpha_{10}^3 - 2^{-7} 3^{-1} 313^{-1} \alpha_{10} \alpha_{20} + 2^{-1} 3^9 \sum_{M: \Gamma(72)} M (\vartheta_{000}^{110} \vartheta_{000}^{110} \vartheta_{000}^{010} \vartheta_{000}^{010} \vartheta_{100}^{010} \vartheta_{010}^{010} \vartheta_{110}^{110} \vartheta_{110}^{110} \vartheta_{100}^{000} \vartheta_{010}^{000} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{010}^{000} \vartheta_{010}^{000} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{000}^{000})^3 \cdot \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{000}^{000}$$

$$\beta_{14} = 2^{-8} 7^{-1} \sum_{M: \Gamma(72)} M \vartheta_{111}^{011} \vartheta_{011}^{011} \vartheta_{000}^{110} \vartheta_{000}^{110} \vartheta_{011}^{111} \vartheta_{000}^{011} \vartheta_{001}^{010} \vartheta_{100}^{011} \vartheta_{010}^{010} \vartheta_{010}^{000} \vartheta_{101}^{001} \vartheta_{101}^{001} \vartheta_{100}^{000} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{010}^{000} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{000}^{000} \vartheta_{000}^{000}$$

χ_8, χ_8 については §2 で述べた通りである。

参考文献

[1] J. Igusa; On Siegel modular forms of genus two (II)

Amer. J. Math. 86 (1966), 221-236.

[2] ———; Modular forms and projective invariants

Amer. J. Math. 89 (1967) 817-855.

- [3] T. Shioda. On the graded ring of invariants of binary octavics, Amer. J. Math 89 (1967)
- [4] S. Tsuyumine; On Siegel modular forms of degree three (preprint).