

複素領域における非線型偏微分方程式

上智大理工 田原 秀敏 (Hidetoshi TAHARA)

本稿では, 複素領域で

$$(E) \quad \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^m u = F\left(t, x, \left\{\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}}\right)$$

という形の非線型偏微分方程式を論じる. 講演では, 主として「解の一意性」に焦点を当てたが, ここではその背景にある問題意識や「解の存在」なども同時に解説したい. 記号: $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, $N^* = \{1, 2, \dots\}$, $t \in \mathbf{C}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$, など.

1. Briot-Bouquet の方程式

複素領域での非線型常微分方程式論で, 最も簡単な特異点研究のモデルは「Briot-Bouquet の特異点」であろうと思われる. ここに Briot-Bouquet の方程式に関する基本的な結果の幾つかを復習しておく.

$u = u(t)$ を未知関数とする方程式

$$(e) \quad t \frac{du}{dt} = f(t, u)$$

が, 次の2つの条件を満たすとき, (e) は Briot-Bouquet の方程式といわれる.

(a₁) $f(t, z)$ は原点 $(t, z) = (0, 0)$ の近傍で正則である,

(a₂) $f(0, 0) = 0$.

このとき,

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$$

で定義される λ を (e) の特性指数という. 「Briot-Bouquet の方程式」という名前の由来は次の結果による.

定理 1 (Briot-Bouquet (1856)) もしも $\lambda \notin \mathbf{N}^*$ ならば, 方程式 (e) は原点の近傍での正則解 $u(t)$ で $u(0) = 0$ を満たすものをただ一つ持つ.

例 1

$$(1.1) \quad t \frac{du}{dt} = \frac{1}{2}u, \quad u(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

を考えると, $\lambda = 1/2 \notin \mathbf{N}^*$ であり

- 1) $u \equiv 0$ がただ一つの正則解.
- 2) (1.1) は更に次の様な解を持っている.

$$u(t) = c\sqrt{t} \quad (c \in \mathbf{C} \text{ は任意定数})$$

例 2

$$(1.2) \quad t \frac{du}{dt} = \frac{1}{2}u + u^2, \quad u(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

を考えると, ここでも $\lambda = 1/2 \notin \mathbf{N}^*$ であり

- 1) $u \equiv 0$ がただ一つの正則解.
- 2) (1.2) は更に次の様な解を持っている.

$$u(t) = \frac{\sqrt{t}}{c - 2\sqrt{t}} \quad (c \in \mathbf{C} \text{ は任意定数})$$

この様に, Briot-Bouquet の方程式は, 正則解以外にも $t = 0$ に特異点をもつ面白い解をいろいろ持っている. $t = 0$ に特異点をもつ解 (以下ではこれを特異解と呼ぶことにする) については次が最も基本的である.

定理 2 もしも $\lambda \notin \{1, 2, \dots\} \cup \{a \in \mathbf{R} : a \leq 0\}$ ならば, Briot-Bouquet 方程式 (e) の解 $u(t)$ で 条件

$$u(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

を満たすものは, すべて次で与えられる.

$$u(t) = a_{1,0}t + At^\lambda + \sum_{i+j \geq 2} a_{i,j}t^i(At^\lambda)^j$$

ここで $A \in \mathbf{C}$ は任意定数,

$$a_{1,0}t + w + \sum_{i+j \geq 2} a_{i,j}t^i w^j$$

は 2 変数 (t, w) の収束べき級数, その係数 $a_{i,j}$ は方程式から一意的に決まるものである.

2. Briot-Bouquet 型の偏微分方程式

1990 年, Gérard-Tahara[2] は「Briot-Bouquet の常微分方程式」をモデルにして, その偏微分方程式版とでもいうべき次の偏微分方程式を導入した.

$$(E_1) \quad t \frac{\partial u}{\partial t} = F \left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

ここで, $t \in \mathbf{C}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$, $u = u(t, x)$ は未知関数,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right),$$

$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{C}^n$ とし $F(t, x, u, v)$ は $(t, x, u, v) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ を変数とする関数である.

定義 1 $F(t, x, u, v)$ が次の条件 (A_1) , (A_2) , (A_3) を満たすとき, 方程式 (E_1) は Briot-Bouquet 型の偏微分方程式であるという.

- (A_1) $F(t, x, u, v)$ は原点 $(0, 0, 0, 0)$ の近傍で正則;
- (A_2) $x = 0$ の近傍で $F(0, x, 0, 0) \equiv 0$;
- (A_3) $x = 0$ の近傍で $\frac{\partial F}{\partial v_i}(0, x, 0, 0) \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, n)$.

条件 (A_1) , (A_2) は Briot-Bouquet の常微分方程式の条件 (a_1) , (a_2) に対応している. (A_3) は以下の議論で本質的に使われるものである.

このとき, (E_1) の特性指数は次で与えられる.

$$\lambda(x) = \frac{\partial F}{\partial u}(0, x, 0, 0).$$

明らかに, これは $x = 0$ の近傍での正則関数である.

第 1 節の 定理 1 (正則解に関するもの) に対応する結果は次の通りである.

定理 1* ([2]) もしも $\lambda(0) \notin N^*$ ならば, 方程式 (E_1) は 原点の近傍での正則解 $u(t, x)$ で $u(0, x) \equiv 0$ を満たすものをただ一つ持つ. (以下この正則解を $u_0(t, x)$ とかく)

定理 2 (特異解に関するもの) に対応する結果を述べるため, 少し定義を準備する

定義 2 $\tilde{O}$ でもって, 次の条件を満たす関数 $u(t, x)$ 全体の集合を表す: 「ある 正值連続関数 $\varepsilon(s) \in C^0(\mathbf{R})$ と $r > 0$ が存在して, $u(t, x)$ は $\{(t, x) \in \mathcal{R}(C \setminus \{0\}) \times C^n; 0 < |t| < \varepsilon(\arg t), |x| \leq r\}$ 上での正則関数である」. ただし, $\mathcal{R}(C \setminus \{0\})$ は $C \setminus \{0\}$ の普遍被覆空間とする.

定義 3 $\tilde{O}_+$ でもって, 次の条件を満たす関数 $u(t, x) \in \tilde{O}$ 全体の集合を表す: 「ある $a > 0$ が存在して, 任意の $\theta > 0$ に対して

$$\max_{|x| \leq r} |u(t, x)| = O(|t|^a) \quad (S_\theta \ni t \rightarrow 0)$$

が成り立つ」. ただし, $S_\theta = \{t \in \mathcal{R}(C \setminus \{0\}); |\arg t| < \theta\}$.

また, $C\{x\}$ でもって原点 $x = 0 \in C^n$ の近傍で正則な関数全体を表すとする. 次が 定理 2 (特異解に関するもの) の偏微分方程式版である.

定理 2* ([2]) 方程式 (E_1) の $\tilde{O}_+$ 解の全体を S_+ とおく. $\lambda(0) \notin N^*$ のもとでは, S_+ は次で与えられる.

$$S_+ = \begin{cases} \{u_0\}, & \operatorname{Re} \lambda(0) \leq 0 \text{ のとき,} \\ \{u_0\} \cup \{U(\varphi); 0 \neq \varphi(x) \in C\{x\}\}, & \operatorname{Re} \lambda(0) > 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

ここで, u_0 は 定理 1* でのただ一つの正則解を表し, $U(\varphi)$ は $\varphi(x)$ に依存して決まる (E_1) の $\tilde{O}_+$ -解であって, 次の様な展開式をもっている.

$$U(\varphi) = \sum_{i \geq 1} u_i(x) t^i + \varphi(x) t^{\lambda(x)} + \sum_{\substack{i+2j \geq k+2 \\ j \geq 1 \\ (i,j,k) \neq (0,1,0)}} \phi_{i,j,k}(x) t^{i+j\lambda(x)} (\log t)^k.$$

上の 定理 1* と 定理 2* は Briot-Bouquet の常微分方程式に対する結果 (定理 1, 2) と酷似している. それが, Gérard-Tahara [2] で方程式 (E_1) を「Briot-Bouquet 型の偏微分方程式」と呼んだ理由である.

3. 高階の非線型偏微分方程式

ここでは、「Briot-Bouquet 型の偏微分方程式」の高階版とでもいうべき次の非線型偏微分方程式を考えてみる.

$$(E) \quad \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^m u = F\left(t, x, \left\{\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}}\right).$$

ここで, $t \in \mathbf{C}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

$u(= u(t, x))$ は未知関数である. 更に

$$Z = \{Z_{j,\alpha}\}_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}}, \quad Z_{j,\alpha} \in \mathbf{C}$$

とし, $F(t, x, Z)$ は (t, x, Z) を複素変数とする関数であって次の条件を満たすものとする.

(C₁) $F(t, x, Z)$ は原点 $(0, 0, 0)$ の近傍で正則;

(C₂) $x = 0$ の近傍で $F(0, x, 0) \equiv 0$;

(C₃) $|\alpha| > 0$ ならば, $x = 0$ の近傍で $\frac{\partial F}{\partial Z_{j,\alpha}}(0, x, 0) \equiv 0$.

$m = 1$ のときは, (C₁), (C₂), (C₃) は第 2 節の (A₁), (A₂), (A₃) そのものであり, このときは (E) は Briot-Bouquet 型の偏微分方程式である. いま,

$$C(\lambda, x) = \lambda^m - \sum_{j < m} \frac{\partial F}{\partial Z_{j,0}}(0, x, 0) \lambda^j$$

とおき, $C(\lambda, x) = 0$ の解 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ を「(E) の特性指数」と呼ぶ. 一般的には, これは $x = 0$ の近傍での連続関数である.

正則解に関しては, 次の結果が成り立つ.

定理 3 ([3]) もしも $\lambda_i(0) \notin \mathbf{N}^*$ ($i = 1, \dots, m$) ならば, 方程式 (E) は原点の近傍での正則解 $u(t, x)$ で $u(0, x) \equiv 0$ を満たすものをただ一つ持つ. (以下この正則解を $u_0(t, x)$ とかく.)

特異点をもつ解に関しては、次の結果（定理 4）が基本的である。

$$\mu = \#\{i; \operatorname{Re}\lambda_i(0) > 0\}$$

とおく。条件 $\mu = 0$ は、「 $\operatorname{Re}\lambda_i(0) \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$)」が成り立つことと同値である。 $\mu > 0$ のときは、適当に番号を付け替えることにより

$$(3.1) \quad \begin{cases} \operatorname{Re}\lambda_i(0) > 0, & 1 \leq i \leq \mu \text{ のとき,} \\ \operatorname{Re}\lambda_i(0) \leq 0, & \mu + 1 \leq i \leq m \text{ のとき} \end{cases}$$

となっているとして差し支えない。

定理 4 ([3]) $(C_1), (C_2), (C_3), (3.1)$ を仮定する。 $\mathcal{S}_+$ でもって、(E) のすべての $\tilde{\mathcal{O}}_+$ -解の集合を表すものとする。次が成り立つ。

(I) $\mu = 0$ のときは、 $\mathcal{S}_+ = \{u_0\}$ となる。ここで、 u_0 は (E) のただ一つの正則解である。

(II) $\mu > 0$ のときは、

$$1) \lambda_i(0) \neq \lambda_j(0) \ (1 \leq i \neq j \leq \mu),$$

$$2) C(1, 0) \neq 0,$$

$$3) i + j_1 + \dots + j_\mu \geq 2 \text{ を満たす任意の } (i, j_1, \dots, j_\mu) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^\mu$$

$$\text{に対して } C(i + j_1\lambda_1(0) + \dots + j_\mu\lambda_\mu(0), 0) \neq 0 \text{ が成り立つ}$$

という付加条件のもとで次が成り立つ。

$$\mathcal{S}_+ = \{U(\varphi_1, \dots, \varphi_\mu); (\varphi_1, \dots, \varphi_\mu) \in \mathbf{C}\{x\}^\mu\}.$$

ここで、 $U(\varphi_1, \dots, \varphi_\mu)$ は $(\varphi_1, \dots, \varphi_\mu) \in \mathbf{C}\{x\}^\mu$ に依存した (E) の $\tilde{\mathcal{O}}_+$ -解であって、次の様な展開式をもっている。

$$\begin{aligned} U(\varphi_1, \dots, \varphi_\mu) = & \sum_{i \geq 1} u_i(x) t^i + \\ & + \varphi_1(x) t^{\lambda_1(x)} + \dots + \varphi_\mu(x) t^{\lambda_\mu(x)} \\ & + \sum_{\substack{i+2m|j| \geq k+2m \\ |j| \geq 1 \\ (i, |j|) \neq (0, 1)}} \phi_{i,j,k}(x) t^{i+j_1\lambda_1(x)+\dots+j_\mu\lambda_\mu(x)} (\log t)^k. \end{aligned}$$

上の定理 4 の (I) は、定理 3 と次の命題からすぐにでてくる。

命題 1 もしも $\operatorname{Re}\lambda_i(0) \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$) が成り立つならば、 $\tilde{\mathcal{O}}_+$ の中で方程式 (E) の解の一意性が成り立つ。

4. 解の一意性について

ここでは、命題1の「解の一意性」を拡張することを考えてみたい。まず、未だ証明に成功していない一つの予想について述べておく。

区間 $(0, T)$ で定義された実数値関数 $\mu(t)$ が次の条件 $\mu_1) \sim \mu_4)$ を満たすとき「ウェイト関数」であるという。

$$\mu_1) \quad \mu(t) \in C^0((0, T)),$$

$$\mu_2) \quad (0, T) \text{ の上で } \mu(t) > 0, \text{ かつ } t \text{ に関して単調増加,}$$

$$\mu_3) \quad \int_0^T \frac{\mu(s)}{s} ds < \infty,$$

$$\mu_4) \quad \text{ある } c > 0 \text{ に対して } \mu(t+ct) = O(\mu(t)) \text{ (} t \rightarrow +0 \text{ のとき).}$$

$\mu_2)$ と $\mu_3)$ から、 $\mu(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +0$ のとき) が成り立つ。次の関数とその代表的な例である。

$$\mu(t) = t^a, \quad \frac{1}{(-\log t)^b}, \quad \frac{1}{(-\log t)(\log(-\log t))^c}.$$

ただし $a > 0, b > 1, c > 1$.

定義 4 $a > 0$ とする。次の条件を満たす関数 $u(t, x)$ の全体を $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ で表す。

(条件) $u(t, x)$ は領域 $\{(t, x) \in \mathcal{R}(C \setminus \{0\}) \times C^n; 0 < |t| < \varepsilon, |\arg t| < \theta, |x| \leq \delta\}$ (ただし、 $\varepsilon > 0, \theta > 0, \delta > 0$) での正則関数であって、 $t \rightarrow +0$ のとき次が成り立つ。

$$\max_{|x| \leq \delta} |u(t, x)| = O(\mu(t)^a).$$

予想 もしも $\operatorname{Re} \lambda_i(0) \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$) が成り立つならば、 $\mathcal{S}_m(\mu(t))$ の中で方程式 (E) の解の一意性が成り立つ。

$m = 1$ のときは解決済み ([2]). $m \geq 2$ のときは未だ未解決である。

ここでは、少し強い条件の下での結果を紹介しておく。

定理 5 ([6]) もしも原点 $x = 0$ の近傍で $\operatorname{Re} \lambda_i(x) \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$) が成り立つならば、 $\mathcal{S}_m(\mu(t))$ の中で方程式 (E) の解の一意性が成り立つ。

これが割合良い結果になっていることは、次の例を見れば理解されるであらう。

例 3 $(t, x) \in \mathbf{C}^2$ とし、次の方程式を考える。

$$(4.1) \quad \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u = 6u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

特性指数は $\lambda_1 = 0$ と $\lambda_2 = 0$ である。このとき次が成り立つ。

- 1) $u(t, x) \equiv 0$ が $u(0, x) \equiv 0$ のもとでのただ一つの正則解である。
- 2) (4.1) はさらに次の様な解をもっている。

$$u(t, x) = \frac{x + \alpha}{(c - \log t)^2} \quad (\alpha, c \in \mathbf{C}).$$

これより次が分かる。「もしも $0 < a < 2$ ならば、 $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ の中では (4.1) の解の一意性は必ずしも成り立たない」実際、ウェイト関数として $\mu(t) = 1/(-\log t)^c$ (ただし $1 < c \leq 2/a$) をとってくればよい。

4) 定理 5 より、「 $a = 2$ ならば、 $\mathcal{S}_2(\mu(t))$ の中で (4.1) の解の一意性が成り立つ」。

$0 < a < m$ なる a に対して $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ の中で (E) の解の一意性が成り立つかどうかについては、次が成り立つ。

定理 6 ([5][6]) p を $0 \leq p \leq m-1$ なる整数とし、原点 $x = 0$ の近傍で

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_i(x) \leq 0, & i = 1, \dots, p \text{ のとき,} \\ \operatorname{Re} \lambda_i(0) < 0, & i = p+1, \dots, m \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つとする。このとき、もしも $a > p$ ならば $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ の中で方程式 (E) の解の一意性が成り立つ。

例 4 $(t, x) \in \mathbf{C}^2$ とし、次の方程式を考える。

$$(4.2) \quad \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u + \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right) u = (2u + x + 1) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

特性指数は $\lambda_1 = 0$ と $\lambda_2 = -1$ である。このとき次が成り立つ。

- 1) $u(t, x) \equiv 0$ が $u(0, x) \equiv 0$ のもとでのただ一つの正則解である。
- 2) (4.2) はさらに次の様な解をもっている。

$$u(t, x) = \frac{x+1}{c - \log t} \quad (c \in \mathbf{C}).$$

これより次が分かる. 「もしも $0 < a < 1$ ならば, $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ の中では (4.2) の解の一意性は必ずしも成り立たない」 実際, ウェイト関数として $\mu(t) = 1/(-\log t)^c$ (ただし $1 < c \leq 1/a$) をとってくればよい.

4) 定理 6 より 「 $a > 1$ ならば, $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ の中で (4.2) の解の一意性が成り立つ」.

5) $a = 1$ のとき, 任意のウェイト関数 $\mu(t)$ に対して $\mathcal{S}_1(\mu(t))$ の中で (4.2) の解の一意性が成り立つかどうかは目下のところ未解決である.

5. 注意

(1)

(5.1) ある i に対して $\operatorname{Re} \lambda_i(0) > 0$ となる

という場合は, 定理 4 の (II) で見たように適当な条件のもとで 無数の $\tilde{\mathcal{O}}_+$ -解が出てくる. $\tilde{\mathcal{O}}_+$ -解 $u(t, x)$ は, $t \rightarrow +0$ のとき相当速いスピードで $u(t, x) \rightarrow 0$ となるため, 「(5.1) の場合に, 解の一意性を論じるのはあまり意味がない」といえそうである.

(2) (5.1) のときは, むしろ問題設定としては次の方が自然であろう.

問題 次の「」が成り立つのはいつか ?

$$[u \in \mathcal{S}_a(\mu(t)) \text{ で (E) の解} \implies u \in \tilde{\mathcal{O}}_+]$$

参考文献

- [1] R. Gérard and H. Tahara : *Nonlinear singular first order partial differential equations of Briot-Bouquet type*, Proc. Japan Acad., 66 (1990), 72-74.
- [2] R. Gérard and H. Tahara : *Holomorphic and singular solutions of nonlinear singular first order partial differential equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 26 (1990), 979-1000.

- [3] R. Gérard and H. Tahara : *Solutions holomorphes et singulières d'équations aux dérivées partielles singulières non linéaires*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 29 (1993), 121-151.
- [4] R. Gérard and H. Tahara : *Singular nonlinear partial differential equations*, Aspects of Mathematics, E 28, Vieweg-Verlag, 1996
- [5] H. Tahara: *Uniqueness of the solution of non-linear singular partial differential equations*, J. Math. Soc. Japan, 48 (1996), 729-744.
- [6] H. Tahara: *On the uniqueness theorem for nonlinear singular partial differential equations*, submitted.