

相互法則と重さ 1 の保型形式について

神戸大理 平松 豊一 (Toyokazu Hiramatsu)

大阪府大 石井 伸郎 (Noburo Ishii)

神戸大理 味村 良雄 (Yoshio Mimura)

§ 0. 序

多項式 $f(x) = x^4 - 12$ について、 $f(x) \bmod p$ が相異なる一次式の積になるような素数 p の集合を $\text{Spl}\{f(x)\}$ と書く。これは次のように特徴づけられる：

$$\text{Spl}\{f(x)\}$$

$$= \{p : \text{素数} \mid p = a^2 + 36b^2\}$$

$$= \{p : \text{素数} \mid p = (6c+1)^2 + 12d^2, c \equiv d \pmod{2}\}$$

$$= \{p : \text{素数} \mid 2p = 3(2k+1)^2 - (6l+1)^2, k \equiv l \pmod{2}\}.$$

一方、この $\text{Spl}\{f(x)\}$ は、重さ 1 の cusp form $\eta(12\tau)^2$ の Fourier 係数 $a(p)$ で決まり ($\eta(\tau)$ は Dedekind の η 関数)、次のようになる：

$$\text{Spl}\{f(x)\} = \{p : \text{素数} \mid a(p) = 2\}.$$

上の三つの条件は、 $\eta(12\tau)^2$ の三つの表現に対応している：

$$\begin{aligned}
\eta(12\tau)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} (-1)^b q^{a^2+9b^2} \quad ((a,3)=1, a \not\equiv b \pmod{2}) \\
&= \sum_{c,d} (-1)^{c+d} q^{(6c+1)^2+12d^2} \\
&= \sum_{k,l} (-1)^{k+l} q^{\frac{3(2k+1)^2-(6l+1)^2}{2}} \quad (k \geq 2, |l| \geq 1).
\end{aligned}$$

ところで、この最後の等式は、Kac-Moody の Lie 環の方から Kac-Peterson [3] により、与えられたものである。また、今の場合、 $Sp_L\{f(x)\}$ は、式の形からみて、法 μ に関して 12 が 4 乗剰余となる素数 μ の集合ともみることができる。

このように、ある多項式については、その Sp_L が三つの同値な条件で決まり、それはまた、重さ 1 の cusp form の三つの表現 (2つは definite 型, 1つは indefinite 型) に関係し、さらに、 4 乗剰余とも関連する。以下では、この事情を、整教論的に説明し、Kac-Peterson によって与えられた残りの等式を説明し、新しい等式を付け加えよう。最後に、相互法則との関連についても少しふれる。

§ 1.

実 2 次体 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (D は平方因子を含まない正整数) をとり、その整数環を $\mathcal{O}_F$ とする。 $\mathcal{O}_F$ の ambig な整イデアル $\mathfrak{f}$ を法とする狭義 ray class 群を $H_F(\mathfrak{f})$ とかく。 $\mathcal{O}_F$ の単数群を $\mathcal{O}_F^\times$ として

(仮定1) 任意の総正な単数 ε に対して, $\varepsilon+1 \neq 1$.

のもとで, $H_F(\mathfrak{f})$ の指標 χ で次をみたすものが存在する:

$$\chi((x)) = \text{sgn } \chi \quad (\text{又は } \text{sgn } \chi')$$

$$\forall x \in \mathcal{O}_F, x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$$

この χ について F の L 関数が定まる:

$$L_F(\lambda, \chi) = \sum_{c \in H_F(\mathfrak{f})} \chi(c) \sum_{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathcal{O}_F} N\alpha^{-\lambda}.$$

K を F 上の極大狭義 ray class field とする.

$$(\text{仮定2}) \quad [H_F(\mathfrak{f}) : H_F(\mathfrak{f})_0] = 2$$

$$\text{ただし, } H_F(\mathfrak{f})_0 = \{c \in H_F(\mathfrak{f}) \mid c = c'\},$$

のもとで, 虚2次体 k で, K が k 上アーベル拡大となるものが存在する. K/k に対応する類群の指標で, χ からきまるものを $\tilde{\chi}_\chi$ とかくとき,

$$L_F(\lambda, \tilde{\chi}) = L_k(\lambda, \tilde{\chi}_\chi)$$

となる. ここで, $\tilde{\chi}, \tilde{\chi}_\chi$ はそれぞれ, $\chi, \tilde{\chi}_\chi$ からきまる原始指標であり, $L_k(\lambda, \tilde{\chi}_\chi)$ は, k の L 関数である. (以上については Shintani [4] を参照されたい。)

以下, これら $L_F(\lambda, \tilde{\chi}), L_k(\lambda, \tilde{\chi}_\chi)$ を実際に書き下すことになる。

先ず, F において考える. 上の仮定から,

$$\mu \in \mathcal{O}_F, \mu < 0, \mu' > 0, \mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$$

となる μ が存在し, 単項イデアル (μ) を含む ray class を μ と書くことにして,

$$H_F(\mathfrak{f}) = R \cup R\mu \cup R\mu' \cup R\mu\mu'$$

となる。ここで, R は $H_F(\mathfrak{f})/\langle \mu\mu' \rangle$ の完全代表系である。したがって,

$$L_F(s, \chi) = \sum_{\sigma \in R} \chi(\sigma) \sum_{\alpha} (\text{Ngn } \alpha) (N\alpha / N\alpha_{\sigma})^{-s},$$

ただし, α_{σ} は σ^{-1} に属する整イデアル, $\rho_{\sigma} \in \alpha_{\sigma}$, $\rho_{\sigma} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ 。 α は, $\mathcal{O}_F/E_{\mathfrak{f}}^+$, $N\alpha > 0$, $\alpha \equiv \rho_{\sigma} \pmod{\alpha_{\sigma}\mathfrak{f}}$, を走る。ここで, $E_{\mathfrak{f}}^+ = \{ \varepsilon \in \mathcal{O}_F^{\times} \mid \varepsilon \gg 0, \varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}} \}$ 。

この式を, 逆 Mellin 変換して,

$$\theta_F(\tau) = \sum_{\sigma \in R} \chi(\sigma) \theta(QD, \tau; \rho_{\sigma}, \alpha_{\sigma}, \mathfrak{f})$$

を得る。ただし, $\mathfrak{f} = Q\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_1 \mid \sqrt{D}$, $D_1 = N\mathfrak{f}_1$, Q : 正整数,

また, $\theta(\tau; \rho, \alpha, \mathfrak{f}) = \sum_{\alpha} (\text{Ngn } \alpha) \rho^{N\alpha/N\alpha \cdot QD_1}$

とくに, $\mathfrak{f}_1 = \sqrt{D}$ ならば, この θ は, Hecke の定義した indefinite τ - q 関数となる [12]。

次に k で考える。ここで K/k は巡回拡大とし, その導手を $\mathbb{C}$ とすると, $H_k(\mathbb{C})/\mathbb{C} = \langle \lambda \rangle$, $\lambda^{q^m} = 1$, とかける ($\mathbb{C}$ は, K に対応する類群)。 χ からきまる $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の表現の $\text{Gal}(K/k)$ への制限は $\sum_x + \sum'_x$ と直和に分解し, $\sum$ を $\sum_x$ あるいは $\sum'_x$ として, k の L 関数 $L_k(s, \sum)$ は次の形にかける:

$$\begin{aligned}
 L_k(1, \xi) &= \sum_{\sigma \in \theta_k} \xi(\sigma) N\sigma^{-\rho} = \sum_{j=0}^{4m-1} \xi(\lambda)^j \sum_{\sigma \in \lambda^j} N\sigma^{-\rho} \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} \xi(\lambda^2)^j \left\{ \sum_{\sigma \in \lambda^{2j}} N\sigma^{-\rho} - \sum_{\sigma \in \lambda^{2j+2m}} N\sigma^{-\rho} \right\}.
 \end{aligned}$$

再び逆 Mellin 変換して

$$\theta_k(\tau) = \sum_{j=0}^{m-1} \xi(\lambda^2)^j \{ \theta_{2j}(\tau) - \theta_{2j+2m}(\tau) \}$$

$$\text{ただし, } \theta_j(\tau) = \sum_{\sigma \in \lambda^j} q^{N\sigma}.$$

ここで, 更に, $K/\mathbb{Q}$ は dihedral 拡大であるとすると, $m=1$, $R=\{1\}$ となり,

$$\theta_F(\tau) = \theta(QD_1\tau; 1, \theta_F, \neq) = \frac{1}{t} \vartheta_{\pm}(QD_1\tau; \rho, Q\sqrt{D})$$

$$\text{ただし, } \pm N\rho > 0, \neq \rho = (Q\sqrt{D}), t = [E_{\neq}^+ : E_{Q\sqrt{D}}^+]$$

$\vartheta_{\pm}$ は Hecke のテータ関数。

$$\theta_k(\tau) = \theta_0(\tau) - \theta_2(\tau)$$

を得る。すなわち,

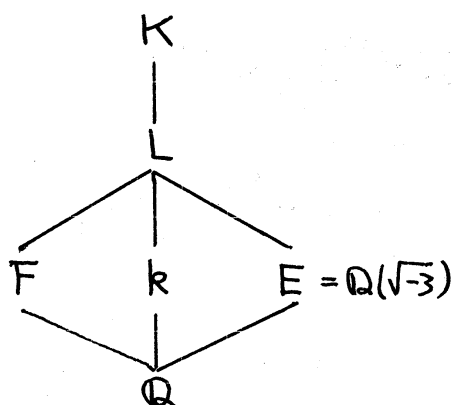
$$\text{Prop. } \frac{1}{t} \vartheta_{\pm}(QD_1\tau; \rho, Q\sqrt{D}) = \theta_0(\tau) - \theta_2(\tau).$$

§ 2. 例

以下では, F, k を具体的に与える。

$$\text{例 1. } F = \mathbb{Q}(\sqrt{3}), k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), K = k(\sqrt{12})$$

$$\neq = (2\sqrt{3}), t = (6)$$



$$H_F(f) = \{1, \mu, \mu', \mu\mu'\}$$

$$H_k(\varepsilon) = \{1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3\}$$

$$\mu = (7-6\sqrt{3}), \lambda = (2+\sqrt{-1})$$

$$\varepsilon = 2+\sqrt{3}, \varepsilon^2 \equiv 1 \pmod{f}$$

(i) $\theta_k(\tau)$ について.

$\sigma \in \{1, \lambda^2\}$ のとき, $\sigma = (\alpha)$, $\alpha = a + 3b\sqrt{-1}$, $(a, 3) = 1$, とかけるが, 更に,

$$\begin{cases} (\alpha) \in 1 & \Leftrightarrow a \equiv 1, b \equiv 0 \pmod{2} \\ (\alpha) \in \lambda & \Leftrightarrow a \equiv 0, b \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

よって

$$\begin{aligned} \theta_k(\tau) &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} (-1)^b q^{a^2+9b^2} \quad (a, 3) = 1, a \not\equiv b \pmod{2} \\ &= \eta(12\tau)^2 \end{aligned}$$

(ii) $\theta_F(\tau)$ について.

$$\begin{cases} \sigma \in 1 & \Leftrightarrow \sigma = (\alpha), \alpha \equiv 1 \pmod{f}, \alpha \gg 0 \\ \sigma \in \mu\mu' & \Leftrightarrow \sigma = (\alpha), \alpha \equiv -1 \pmod{f}, \alpha \gg 0 \end{cases}$$

よって, $\alpha = x + 2\sqrt{3}y \gg 0$, $x \equiv \pm 1 \pmod{6}$ とし,

$$\begin{cases} (\alpha) \in 1 & \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \\ (\alpha) \in \mu\mu' & \Leftrightarrow x \equiv -1 \pmod{3} \end{cases}$$

よって.

$$\alpha \varepsilon^{\pm 2} = (7x \pm 24y) + (14y \pm 4x)\sqrt{3}$$

だから, α の動く基本領域として, $7x \pm 24y \geq x$, 則ち,
 $x \geq 4|y|$ をとることができて,

$$\theta_F(\tau) = \vartheta_+(12\tau; 1, \sqrt{12}) = \sum \left(\frac{x}{3}\right) q^{x^2 - 12y^2}$$

ただし, $x \geq 4|y|$, $(x, 6) = 1$,

を得る。今, Kac-Peterson の等式を得るために, θ_F の別の表現を考える。 $\rho \in \theta_F$, $\rho > 0$ として,

$$\theta_F(\tau) = \sum_{\rho} (\text{sgn } \rho) q^{N\rho/N\rho}$$

ただし, ρ は, θ_F/E_F^+ , $N\rho \cdot N\rho > 0$, $\rho \equiv \rho \pmod{\neq \rho}$, を走る。

そこで, $\rho = 1 + \sqrt{3}$ ととり, $\rho = x \pm y\sqrt{3}$, ($\pm$ は $\text{sgn } \rho$ と同じ) とおく。 $\rho > 0$ のとき, $y > 0$, $x \equiv 1 \pmod{6}$, $x \equiv y \pmod{4}$ となり, $x = 6l+1$, $y = 2k+1$ とおくと $k \equiv l \pmod{2}$ を得る。

$$\beta \varepsilon^{\pm 2} = (7x \pm 12y) + (7y \pm 4x)\sqrt{3}$$

だから, β の動く基本領域として, $7y \pm 4x \geq y$, すなわち,
 $3y \geq 2|x|$, 結局 $k \geq 2|l|$ がとれる。 $\beta < 0$ のときも,
 同様であるが, $k \not\equiv l \pmod{2}$ となる。つまり, $\text{sgn } \rho = (-1)^{k+l}$ となり,

$$\theta_F(\tau) = \sum_{k \geq 2|l|} (-1)^{k+l} q^{\frac{3(2k+1)^2 - (6l+1)^2}{2}}$$

となる。これは, Kac-Peterson の得たものである。

なお, もう一つの 2 次体 E についても, k のときと同じよ

うにして

$$\theta_E(\tau) = \sum_{c,d} (-1)^{c+d} q^{(6c+1)^2 + 12d^2} = \eta(24\tau) \theta_0(24\tau)$$

が得られる。(K/E は ~~手~~ (4√3) をもつ)

例 2. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, $K = k(\sqrt{\varepsilon})$ $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$

$$f = (4), \quad \mathfrak{L} = (4) \quad \varepsilon = 1 + \sqrt{2} \quad (4(1 + \sqrt{-1}))$$

$$\theta_k(\tau) = \sum (-1)^n q^{(4m+1)^2 + 8n^2} = \eta(8\tau) \eta(16\tau)$$

$$\theta_F(\tau) = \sum_{n \geq |m|} (-1)^n q^{(2n+1)^2 - 32m^2} = \vartheta_4(8\tau; 2 + \sqrt{2}, 2\sqrt{8})$$

$$\theta_E(\tau) = \sum (-1)^{m+n} q^{(4m+1)^2 + 16n^2}$$

例 3. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $K = k(\sqrt{\varepsilon})$

$$f = (4), \quad \mathfrak{L} = (2) \quad (10), \quad \varepsilon = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\theta_k(\tau) = \sum (-1)^{m+n} q^{\frac{(6m+1)^2 + 5(6n+1)^2}{6}} = \eta(4\tau) \eta(20\tau)$$

$$\theta_F(\tau) = \sum_{2k \geq l \geq 0} (-1)^k q^{\frac{5(2k+1)^2 - (2l+1)^2}{4}} = \frac{1}{2} \vartheta_4(4\tau; \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, 4\sqrt{5})$$

例 4. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{21})$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$, $K = k(\sqrt{\alpha})$

$$f = (\alpha) \quad \mathfrak{L} = (3) \quad \alpha = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

$$\theta_k(\tau) = \sum (-1)^{m+n} q^{\frac{(6m+1)^2 + 7(6n+1)^2}{8}} = \eta(3\tau) \eta(21\tau)$$

$$\theta_F(\tau) = \sum_{\substack{x \geq 7|y| \\ x \equiv y \pmod{2}}} \left(\frac{-x}{3}\right) q^{\frac{x^2 - 21y^2}{4}} = \frac{1}{2} \vartheta_4(3\tau; \frac{7 + \sqrt{21}}{2}, \sqrt{21})$$

注1. 上の例1~3は, Kac-Peterson [3] によって見いだされた等式である。

注2. $\eta(\tau)\eta(23\tau)$, $\eta(2\tau)\eta(22\tau)$, $\eta(6\tau)\eta(18\tau)$ は D_3 型であり, 従って, indefinite テータ級数で表わされない。

注3. 例2からの等式

$$\sum (-1)^n q^{(4m+1)^2+8n^2} = \sum (-1)^{m+n} q^{(4m+1)^2+16n^2}$$

は, 2の4乗剰余に対する Gauss の2つの判別条件の同値性の一般化を与えている。判別条件そのものは, 類体 K の代りに, $K' = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$ をとって, 得られる。

§3. Higher Reciprocity Law

Spl に戻る。仮定1, 2を満たす実2次体 F をとる。§1のとおり, 虚2次体 k があって, F と k に対する L 関数が一致する。 K/k が巡回拡大, $K/\mathbb{Q}$ が dihedral 拡大とする。 $f(x)$ を, 実2次体 F を通しての $K/\mathbb{Q}$ の定義多項式 (有理整数係数) とする。次を得る。

定理 $Spl \{f(x)\} = \{p: \text{素数} \mid p \nmid \Delta_f, a(p) = 2\}$

ただし, f の判別式を Δ_f , $a(p)$ は, F に対する Hecke の indefinite modular form $\theta_F(\tau)$ の p 番目の Fourier 係数である。

$$(\text{証}) \quad \theta_k(z) = \sum_{\sigma \in G_k} \xi(\sigma) g^{N\sigma} = \sum b(n) g^n$$

と置く。 k の素イデアルで、 K/k で不分枝なもの $\mathfrak{p}$ をとる。

次が成り立つ。 ($L = F \cdot k$)。

$$(i) \quad \xi(\mathfrak{p}) = 1 \iff \mathfrak{p} \in (1) \iff \mathfrak{p} \text{ は } K \text{ で完全分解する。}$$

$$(ii) \quad \xi(\mathfrak{p}) = -1 \iff \mathfrak{p} \in \lambda^2 \iff \mathfrak{p} \text{ は } L/k \text{ で完全分解し,} \\ K/L \text{ で楕円する}$$

$$(iii) \quad \xi(\mathfrak{p}) = i_{\sigma} - i \iff \mathfrak{p} \in \lambda \sim \lambda^3 \iff \mathfrak{p} \text{ は } K/k \text{ で楕円的。}$$

p を有理素数で、 k で $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, とする。 このとき、

$$\mathfrak{p} \in (1) \iff b(p) = 2$$

である。 $F(x)$ を K/k の定義多項式 (有理整数係数) とする。

あきらかに

$$\text{Spl}\{F(x)\} = \{\mathfrak{p} : \text{素数} \mid b(p) = 2, \mathfrak{p} \nmid \Delta_F\}$$

である。 他方、

$$\begin{aligned} & \text{Spl}\{f(x)\} \cup \{\mathfrak{p} : \text{素数} \mid \mathfrak{p} \text{ は不分枝}, \mathfrak{p} \mid \Delta_f\} \\ &= \text{Spl}\{F(x)\} \cup \{\mathfrak{p} : \text{素数} \mid \mathfrak{p} \text{ は不分枝}, \mathfrak{p} \mid \Delta_F\} \end{aligned}$$

であり、 Prop. より $a(p) = b(p)$ であったから、

$$\text{Spl}\{f(x)\} = \{\mathfrak{p} : \text{素数} \mid a(p) = 2, \mathfrak{p} \nmid \Delta_f\}$$

を得る。

Q.E.D.

§2 の例 1 をとりあげる。 K/k の定義多項式として、

$$F_1(x) = x^4 - 12 \quad \text{または} \quad F_2(x) = x^4 - 6x^2 - 3$$

をとる。他方, K/F の定義多項式

$$f_1(x) = x^4 - 4(1+\sqrt{3})x^2 + 4(2+\sqrt{3})^2$$

から,

$$f(x) = f_1(x)f_1(x)' = x^8 - 8x^6 + 24x^4 + 160x^2 + 16$$

となくと,

$$\begin{aligned} \text{Spl}\{F_1(x)\} &= \text{Spl}\{F_2(x)\} = \text{Spl}\{f(x)\} \\ &= \{p: \text{素数} \mid a(p)=2\} \\ &= \{p: \text{素数} \mid p = u^2 + v^2, u \equiv 0 \pmod{6}\}, \end{aligned}$$

ただし,

$$\theta_F(\tau) = \mathcal{D}_+(12\tau, 1, \sqrt{12}) = \sum a(n)q^n.$$

注) Spl だけでなく, 定理の f について次が言える.

(i) $f(x) \pmod{p}$ が相異なる2つの4次多項式の積でかける $\iff a(p)=0, a(p^2)=-1$

(ii) $f(x) \pmod{p}$ が相異なる4つの2次多項式の積でかける $\iff \begin{cases} a(p)=-2 \\ \text{又は } a(p)=0, a(p^2)=1. \end{cases}$

参考文献

[1] E.Hecke, Über einen neuen Zusammenhang zwischen elliptischen und indefiniten quadratischen Formen, Mathematische Werke,

Vandenhoeck und Reprecht, Gottingen, 1959, pp.418-427.

[2] E.Hecke, Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Ibid., pp.428-460.

[3] V.G.Kac and Peterson, Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms (preprint).

[4] T.Shintani, On certain ray class invariants of real quadratic fields, J.Math.Soc.Japan 30 (1978), pp.139-167.