

A family of Weierstrass data on branched minimal surfaces in Euclidean space

守屋 克洋 (Katsuhiko Moriya)

東京都立大学大学院 理学研究科数学専攻 DC 2

1 Introduction

本講演の目的は、リーマン面 M から $\mathbb{R}^3$ への完備な極小はめ込みで、その像が、 $\mathbb{R}^3$ 内の一つの平行移動で不変となるものの Weierstrass data で構成される、実解析的多様体の具体例を、提示することであり、また、これを通して極小はめ込みの associated family に沿った変形についての情報を得ることである。ただし、多様体は特異点を許容するものとし、はめ込みは分岐点を許容するものとする。対象としている極小曲面は singly periodic なものとなるが、その単位となる曲面の全曲率が有限になるもののみに注目する。また、分岐点をもつはめ込みが完備であるとは、 M に誘導される退化する計量に関して、 M 上の局所的には rectifiable な、任意の divergent path の長さが発散するときという。

ここでの Weierstrass data によって構成される多様体とは、Weierstrass data の集合を、有理型関数の組のなす複素解析的多様体の実解析的部分多様体とみなしたものである。これは X. Mo に依るものである (see Yang [Yan94])。

このとき、一般論で、Weierstrass data で構成される多様体の次元が、下から評価されるが、分岐点の数が少なく、ガウス写像の度数が小さい場合は、この評価は負の数以上となり有効ではない。また、この多様体がどのような構造を持つかという事に関しても、一般論からは判然としない。従って、多様体の具体例を挙げ、そこに入る構造を見出すことが、次の目標として挙げられる。前者について得られた結果が本講演の内容である。

以下の構成は、次のようになる。§2 では、対象にする極小はめ込みについての基

本的な事実を述べ、用語の定義をする. §3では、ここで対象にしている極小はめ込みの Weierstrass data を解説する. §4では Weierstrass data の集合が多様体になることの証明を簡単に述べる. §5では、上の具体例を挙げ、これから得られる associated family に関する情報を述べる. なお、詳しくは、Moriya [Mora] を参照せよ.

2 平行移動で不変な極小曲面

この節では、対象とする極小はめ込みを明確にする.

まず、以下で使う基本的な事実を述べる. 詳しくは、Hoffman and Karcher [HK], Yang [Yan94], Moriya [Morb] を参照せよ. $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ とし, $t_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を v によって決まる $\mathbb{R}^3$ の平行移動とする. t_v を生成元として、平行移動のなす discrete な等長変換群が得られる. これを $T(v)$ とかく. すると、商空間 $\mathbb{R}^3/T(v)$ は、flat な 3 次元多様体となる. 極小はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3/T(v)$ は、像が $T(v)$ で不変な $\mathbb{R}^3$ への極小はめ込みとみなせる.

f のガウス写像

$$\Phi = [\Phi^1 : \Phi^2 : \Phi^3]: M \rightarrow Q_1 \subset \mathbb{CP}^2$$

$$\Phi^i = \frac{\partial f^i}{\partial z} dz \quad (i = 1, 2, 3)$$

が well-defined な正則写像であることから、 $\mathbb{R}^3$ への極小はめ込みの場合と同様にして次の事が言える (see Yang).

Theorem 2.1. 完備な極小はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3/T(v)$ において、全曲率が有限であることとガウス写像が代数的であることは同値である.

ここで、ガウス写像が代数的であるとは、Riemann 面 M が、ある閉 Riemann 面 $\bar{M}$ から破点と呼ばれる有限個の点を除いたものと正則同型であり、ガウス写像が $\bar{M}$ 上の正則写像へと拡張されることをいう. すなわち、ガウス写像の成分 Φ^i ($i = 1, 2, 3$) が、破点をたかだか極としてもつ、 $\mathbb{CP}^1$ 上の有理型一次微分形式となることと同値

である. f の法ガウス写像と立体射影の合成写像 g は, $g = (\Phi^3/(\Phi^1 - \sqrt{-1}\Phi^2))$ で得られる. ガウス写像が代数的である場合は, g も $\bar{M}$ 上の有理形関数となる, M 上の点 p におけるガウス写像の位数 $\text{ord}_p \Phi$ を, $\text{ord}_p \Phi = \min_{i=1,2,3} \text{ord}_p \Phi^i$ で定義する. ガウス写像の位数によって, $\bar{M}$ 上の点が次のように分類されることは, 自明である.

Lemma 2.2. $p \in \bar{M}$ に対して, $\text{ord}_p \Phi < 0$ のとき p は破点, $\text{ord}_p \Phi > 0$ のとき, p は分岐点である.

Definition 2.3. $\bar{M}$ 上の各破点での位数の和を破点の全位数, 各分岐点での位数の和を分岐点の全位数とよぶ.

次に, 対象とする極小はめ込みについて述べる. 以下で対象にするものは, 全曲率有限な完備共形極小はめ込み $f: (\mathbb{C}^*, p_0) \rightarrow \mathbb{R}^3/T(v)$ で, $f(p_0) = 0$ であり, 次の条件をみたすものである.

- 二つの破点の位数が $-I$ である.
- 法ガウス写像が破点において位数 l で分岐している.
- 分岐点の全位数が J (特にこの場合 $2(I - l - 2)$ (see, (3.1))) である.

$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1, \{0, \infty\}, p_0, I, J, l)$ で, 上の条件をみたす極小はめ込みの集合をあらわす. v は $\mathbb{R}^3$ の任意の元であることに注意する.

$\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1, \{0, \infty\}, p_0, 2, 0, 0)$ の元として, catenoid と helicoid がある. 前者は $v = 0$ であり, 後者は $v \neq 0$ である. 両者は, 同じ associated family(後述) の元であり, さらに互いに共役である. helicoid は, $\mathbb{R}^3$ への極小はめ込みとみなした場合は全曲率が有限ではないが, 像が平行移動で不変な極小はめ込みとみなした場合は, 全曲率が有限なものと同様に扱える. 我々は, 上で branch point を重複度を込めて J 個もつ場合に注目しているといえる.

3 Weierstrass data

ここでは、我々が対象にしている極小はめ込みの Weierstrass data について、簡単に説明する.

$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbb{CP}^1, \{0, \infty\}, dz, I, J, l)$ を, $\mathbb{CP}^1$ 上の有理型関数の組 (g, h) で, 次の条件をみたすものとする.

$$g, h \neq 0,$$

$$(g) = (l+1) \cdot 0 - (l+1) \cdot \infty,$$

$$(h) = \sum_{j=1}^J 1 \cdot b_j - (I-l-1) \cdot 0 - (I-l-3) \cdot \infty.$$

ただし, $\{b_j\} \cap \{0, \infty\} = \emptyset$ であり, (g) と (h) は, それぞれ g と h の因子とする. $\deg(h) = 0$ 故, 次が成り立つ.

$$J - 2I + 2l + 4 = 0. \quad (3.1)$$

$(g, h) \in \mathcal{W}$ は, 具体的には次のように書ける.

$$g = az^{l+1}, h = c \frac{\prod_{j=1}^J (z - b_j)}{z^{I-l-1}}. \quad (3.2)$$

ただし, $a, c \in \mathbb{C}^*$ であり, z は, $\mathbb{C}$ の標準的な正則座標である. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{CP}^1, \{0, \infty\}, dz, I, J, l)$ を, $\mathbb{CP}^1$ 上の三つの有理型一次微分形式 Φ^i ($i = 1, 2, 3$) からなる写像 $\Phi = [\Phi^1 : \Phi^2 : \Phi^3] : \mathbb{CP}^1 \rightarrow Q_1 \subset \mathbb{CP}^2$ で次の条件をみたすものからなる集合とする.

$$(\Phi) = \sum_{j=1}^J 1 \cdot b_j - I \cdot 0 - I \cdot \infty.$$

ここで, (Φ) は Φ の因子, すなわち,

$$(\Phi) = \sum_{p \in \mathbb{CP}^1} \left(\min_{i=1,2,3} \text{ord}_p \Phi^i \right) \cdot p,$$

である. 写像 $\Upsilon: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{C}$ を次で定義する:

$$(\Upsilon^1, \Upsilon^2, \Upsilon^3)(g, h) = \left(\frac{1}{g} - g, \sqrt{-1} \left(\frac{1}{g} + g \right), 2 \right) \frac{h}{2} dz.$$

(3.2) を使うと, Υ は具体的には次のように書ける.

$$\begin{aligned} \Upsilon^1(g, h) &= -\frac{1}{2} \frac{c \prod_{j=1}^J (z - b_j) (a^2 z^{2(l+1)} - 1)}{az^I} dz, \\ \Upsilon^2(g, h) &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-1} c \prod_{j=1}^J (z - b_j) (a^2 z^{2(l+1)} + 1)}{az^I} dz, \\ \Upsilon^3(g, h) &= \frac{c \prod_{j=1}^J (z - b_j)}{z^{I-l-1}} dz. \end{aligned}$$

このとき因子に関する次の等式が成り立つ.

$$(\Upsilon(g, h)) = -(g)_0 - (g)_\infty + (h) + (dz).$$

ここで, $(g)_0$ と $(g)_\infty$ はそれぞれ g の零因子と極因子であり, (dz) は dz の因子である. これより Υ は全単射となり, 逆写像は次のようになる.

$$\Upsilon^{-1}(\Phi) = \left(\frac{\Phi^3}{\Phi^1 - \sqrt{-1}\Phi^2}, \frac{\Phi^3}{dz} \right).$$

写像 $\Xi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ を次のように定義する.

$$\Xi(\Phi)(z) = f(z) = (f^1, f^2, f^3)(z) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^z (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3).$$

右辺は積分路のとりかたによる. 従って, Ξ は一般には多価の写像となるが, 次のようにして $\mathcal{M}$ の元とみなせる. $H_1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であることに注意して, $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ を, $H_1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$ の単位元を代表する閉曲線とする. $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3): \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ を次で定義する.

$$\lambda^i(\Phi) = \int_{\gamma} \Phi^i = 2\pi\sqrt{-1} \operatorname{Res}(\Phi^i, z=0), \quad (i=1, 2, 3).$$

$\operatorname{Re} \lambda(\Phi) = v(\Phi)$ とかくとき, 写像 $\Xi(\Phi): (\mathbb{C}^*, p_0) \rightarrow \mathbb{R}^3/T(v(\Phi))$ は, 一価の完備共形極小はめ込みになり, さらに, $\mathcal{M}$ の元になる. このようにみなしたとき, Ξ は全単射写像になり, 逆写像は次のようになる.

$$\Xi^{-1}(f) = \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

以上により, 極小はめ込みの集合 $\mathcal{M}$ と有理形関数の組みの集合 $\mathcal{W}$ に, 全単射の対応がついた. $f \in \mathcal{M}$ と対応する $(g, h) \in \mathcal{W}$ を f の Weierstrass data という.

$v \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\mathcal{W}$ の部分集合 $\mathcal{T}_v$ を $\mathcal{T}_v = \{(g, h) \in \mathcal{W} \mid v(\Upsilon(g, h)) = v\}$ と定義する. このとき, $\mathcal{W} = \bigcup_v \mathcal{T}_v$ であり, $(g, h) \in \mathcal{T}_v$ に対して写像 $\Xi(\Upsilon(g, h))$ は, 完備共形極小はめ込みで, その像が, v で表される $\mathbb{R}^3$ 内の平行移動で不変なものなる.

4 Weierstrass data の variety

この節では, 上で定義した $\mathcal{W}, \mathcal{T}_v$ に多様体の構造を入れる.

まず, 次を示す.

Theorem 4.1. $\mathcal{W}(\mathbb{CP}^1, \{0, \infty\}, dz, I, J, l)$ は, 複素多様体 $\mathbb{C}^{J-1} \times (\mathbb{C}^*)^3$ の構造を持つ.

Proof. $\text{Div}_+^J(M)$ を Riemann 面 M 上の度数 J の効果的な因子全体からなる集合とする. 写像 $\psi: \mathcal{W} \rightarrow \text{Div}_+^J(\mathbb{C}^*) \times (\mathbb{C}^*)^2$ を次で定義する:

$$\psi \left(az^{l+1}, c \frac{\prod_{j=1}^J (z - b_j)}{z^{I-l-1}} \right) = \left(\sum_{j=1}^J 1 \cdot b_j, a, c \right).$$

ψ は全単射である. 一方, $\text{Div}_+^J(\mathbb{CP}^1)$ は次元が J のコンパクト複素多様体となり, $\text{Div}_+^J(\mathbb{C}^*)$ は, $\text{Div}_+^J(\mathbb{CP}^1)$ の開部分多様体となる (see, Griffith and Harris [GH78]). この多様体の構造は, 次で定義される全単射写像 $w: \text{Div}_+^J(\mathbb{C}^*) \rightarrow \mathbb{C}^{J-1} \times \mathbb{C}^*$ によって, $\mathbb{C}^{J-1} \times \mathbb{C}^*$ から誘導されたものである.

$$w \left(\sum_{j=1}^J 1 \cdot b_j \right) = (\sigma_1(b_j), \dots, \sigma_J(b_j)).$$

ただし, σ_i は i 次の基本対称式である. 従って, $\text{Div}_+^J(\mathbb{C}^*)$ は, 複素多様体 $\mathbb{C}^{J-1} \times \mathbb{C}^*$ の構造をもち, w が正則座標となる. これより, $\mathcal{W}$ は, 複素多様体 $\mathbb{C}^{J-1} \times (\mathbb{C}^*)^3$ の構造を持つ. □

以降, $\mathcal{W}(\mathbb{CP}^1, \{0, \infty\}, dz, I, J, l)$ の元を, $(w_1, \dots, w_J, a, c)$ とも書くことにする. ただし, $(w_1, \dots, w_J)$ は, $\text{Div}_+^J(\mathbb{C}^*)$ の正則座標とする. $\mathcal{C}, \mathcal{M}$ も, 全単射写像 Ξ, Υ を使って, 複素多様体 $\mathbb{C}^{J-1} \times (\mathbb{C}^*)^3$ の構造を入れ, $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{W}$ を同一視する. 写像 Ξ, Υ は恒等写像とみてしばしば省略することにする. $\mathcal{T}_v$ に関しては次が成り立つ.

Theorem 4.2. $\mathcal{T}_v$ は, 次の方程式で定義される, $\mathcal{W}$ の実解析的多様体になる.

$$\begin{aligned} -\pi \operatorname{Re} \left(c\sqrt{-1} \left((-1)^{I-1} a w_{I-1} - (-1)^{J-I+1} \frac{w_{J-I+1}}{a} \right) \right) &= v_1, \\ -\pi \operatorname{Re} \left(c \left((-1)^{I-1} a w_{I-1} + (-1)^{J-I+1} \frac{w_{J-I+1}}{a} \right) \right) &= v_2, \\ (-1)^{I-l-2} 2\pi \operatorname{Re} \left(\sqrt{-1} c w_{I-l-2} \right) &= v_3, \end{aligned}$$

ここで, $w_0 = 1$, $k < 0$ または, $k > J$ に対して $w_k = 0$ と定義する.

Proof. §3 で定義した写像 $\lambda: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ は, 上で入れた複素構造に関して正則である. 従って, $\operatorname{Re}(\lambda^i)$ ($i = 1, 2, 3$) は調和関数, すなわち, 実解析的関数である. $\mathcal{T}_v = \{(g, h) \in \mathcal{W} \mid (\operatorname{Re}(\lambda^i))(g, h) = v\}$ であるから, $\mathcal{T}_v$ は, $\mathcal{W}$ の実解析的部分多様体である. (3.2) を使うと, λ の値は次のようになる.

$$\begin{aligned} \lambda^1(g, h) &= -c\pi\sqrt{-1} \left((-1)^{I-1} a w_{I-1} - (-1)^{J-I+1} \frac{w_{J-I+1}}{a} \right), \\ \lambda^2(g, h) &= -c\pi \left((-1)^{I-1} a w_{I-1} + (-1)^{J-I+1} \frac{w_{J-I+1}}{a} \right), \\ \lambda^3(g, h) &= (-1)^{I-l-2} 2\pi\sqrt{-1} c w_{I-l-2}. \end{aligned}$$

ここで, $w_0 = 1$, $k < 0$, $k > J$ に対して $w_k = 0$ であり, (3.1) を用いている. 従って, $\mathcal{T}_v$ は, (4.2) で定義される. □

$(g, h) \cong (w_1, \dots, w_J, a, c) \in \mathcal{W}$ に対して $(g, h(\theta)) \cong (w_1, \dots, w_J, a, c \exp(\theta))$ と置く. $\{(g, h(\theta)) \mid \theta \in [0, \pi/2]\}$ で与えられる極小はめ込みの族を (g, h) の associated family という. (g, h) によって $\mathbb{C}^*$ に誘導される計量 ds^2 は,

$$ds^2 = \frac{1}{4}(|g| + |g|^{-1})^2 |h dz|^2$$

となるから, associated family の構成要素は, 局所的には互いに等長的になる (see [HK]). $\theta = 0$ と $\theta = \pi/2$ に対応するはめ込みを, 互いに共役である, という. 極小はめ込みの像の, associated family に沿っての変形に関する情報を与えるのが, 次の定理である.

Theorem 4.3. $(g, h) \cong (w_1, \dots, w_J, a, c) \in \mathcal{W}$ の, associated family の元 $(g, h(\theta)) \cong (w_1, \dots, w_J, a, c \exp(\sqrt{-1}\theta))$ ($\theta \in [0, \pi/2]$) の, 平行移動を表すベクトルを $v(\theta) = (v_1(\theta), v_2(\theta), v_3(\theta))$ とするとき, $v(\theta)$ は次のような曲線上を動く.

$$\begin{pmatrix} v_1(\theta) \\ v_2(\theta) \\ v_3(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda^1(g, h)) & \operatorname{Im}(\lambda^1(g, h)) \\ \operatorname{Re}(\lambda^2(g, h)) & \operatorname{Im}(\lambda^2(g, h)) \\ \operatorname{Re}(\lambda^3(g, h)) & \operatorname{Im}(\lambda^3(g, h)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

Proof. $\lambda^i(g, h(\theta)) = \exp[\sqrt{-1}\theta] \lambda^i(g, h)$ であることより, 明らか. $\square$

5 分岐点の全位数が小さい極小はめ込み

この節では, 具体例として, 分岐点の全位数 J が 0 または, 2 の場合をとりあげて提示する. (3.1) より, J は偶数であるので, これは分岐点の全位数が, 一番小さい場合と二番目に小さい場合である. まず, 後での議論のために, associated family についてさらに触れておく. $S^1 = \{\exp[\sqrt{-1}\theta] \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ とする. このとき, $\mathcal{W}$ のへの S^1 の作用を次のように定義する.

$$(w_1, \dots, w_J, a, c) \cdot r = (w_1, \dots, w_J, ra, c).$$

ここで, $(w_1, \dots, w_J, a, c) \in \mathcal{W}, r \in S^1$ である. 対応する極小はめ込みにおいては, この作用により, 像が x_3 軸の正の方向に関して, $\arg r$ 回転する. 従って, 平行移動のベクトルの, associated family に沿った移動を調べる場合には, 次のように定義される $\mathcal{W}$ の部分集合 $\mathcal{A}$ で考察すれば十分である.

$$\mathcal{A} = \{(w_1, \dots, w_J, a, c \exp[\sqrt{-1}\theta]) \in \mathcal{W} \mid a \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}, c > 0\}.$$

$(g, h) \in \mathcal{A}$ に対しては, $v(\theta)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}
v^1(\theta) &= c\pi \left((-1)^{I-1} a \operatorname{Im}(w_{I-1}) - (-1)^{J-I+1} \frac{\operatorname{Im}(w_{J-I+1})}{a} \right) \cos \theta \\
&\quad + c\pi \left((-1)^{I-1} a \operatorname{Re}(w_{I-1}) - (-1)^{J-I+1} \frac{\operatorname{Re}(w_{J-I+1})}{a} \right) \sin \theta, \\
v^2(\theta) &= -c\pi \left((-1)^{I-1} a \operatorname{Re}(w_{I-1}) + (-1)^{J-I+1} \frac{\operatorname{Re}(w_{J-I+1})}{a} \right) \cos \theta \\
&\quad + c\pi \left((-1)^{I-1} a \operatorname{Im}(w_{I-1}) + (-1)^{J-I+1} \frac{\operatorname{Im}(w_{J-I+1})}{a} \right) \sin \theta, \\
v^3(\theta) &= -2\pi((-1)^{I-l-2} c \operatorname{Im}(w_{I-l-2}) \cos \theta - 2\pi(-1)^{I-l-2} c \operatorname{Re}(w_{I-l-2}) \sin \theta.
\end{aligned}$$

5.1 J=0

このとき, (3.1) から $(I, l) = (2 + m, m)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) である. $(g, h) \cong (a, c) \in \mathcal{W}$ にたいしては,

$$\lambda^1(g, h) = 0, \lambda^2(g, h) = 0, \lambda^3(g, h) = 2\pi\sqrt{-1}c,$$

である. よって, $\mathcal{T}_v$ は $v = (0, 0, v_3)$ またこのときに限って空でない. すなわち, 平行移動を表すベクトルは, x^3 軸に平行である. $\mathcal{T}_v = \{(a, c) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid \operatorname{Im}(c) = -v_3/2\pi\}$ である.

5.2 J=2

このとき, (3.1) から $(I, l) = (3 + m, m)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) である. $m = 0$ のとき, $(g, h) \cong (w_1, w_2, a, c) \in \mathcal{W}$ に対して,

$$\lambda^1(g, h) = -c\pi\sqrt{-1} \left(aw_2 - \frac{1}{a} \right),$$

$$\lambda^2(g, h) = -c\pi \left(aw_2 + \frac{1}{a} \right),$$

$$\lambda^3(g, h) = -2\pi\sqrt{-1}cw_1,$$

となる. $n = (n_1, n_2, n_3)$ に対して, $\mathcal{T}_v^n$ を, $\mathcal{W}$ の部分集合で,

$$\lambda^i(g, h) = P_i, \quad P_i = v_i + \sqrt{-1}n_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.1)$$

を満たすものとする. このとき, 上と同様にして次のことが示せる.

Lemma 5.1. $\mathcal{T}_v^n$ は $\mathcal{W}$ の複素解析的多様体であり, $\mathcal{T}_v$ の実解析的多様体である.

Proof. λ^i は, $\mathcal{W}$ 上で正則であり, $\text{Im}(\lambda^i)$ は, $\mathcal{T}_v$ 上で実解析的であることから明らか. □

さらに,

Lemma 5.2. $m = 0$ のとき, $(w_1, w_2, a, c) \in \mathcal{T}_v^n$ は, 次を満たす.

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{P_3}{a(P_1 - \sqrt{-1}P_2)} \\ w_2 &= -\frac{P_1 + \sqrt{-1}P_2}{a^2(P_1 - \sqrt{-1}P_2)} \\ c &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-1}a(P_1 - \sqrt{-1}P_2)}{\pi}. \end{aligned}$$

このとき, 対応する Weierstrass data (g, h) は次のようになる. (see figure 1):

$$g = az, h = -\frac{\sqrt{-1}}{2a\pi} \frac{(a^2(P_1 - \sqrt{-1}P_2)z^2 + aP_3z - (P_1 + \sqrt{-1}P_2))}{z^2}.$$

Proof. (5.1) を解けばよい. □

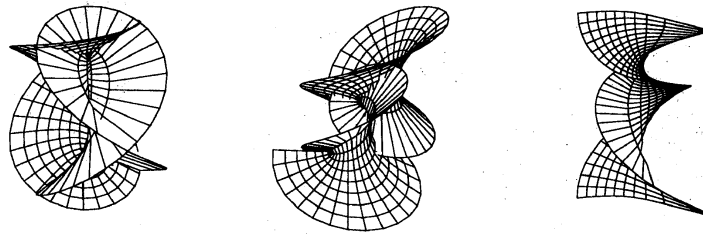


図 1: $a = 1$ and $(P_1, P_2, P_3) = (\sqrt{-1}, \sqrt{-1}, 0), (5 + \sqrt{-1}, \sqrt{-1}, 0), (\sqrt{-1}, \sqrt{-1}, 5)$

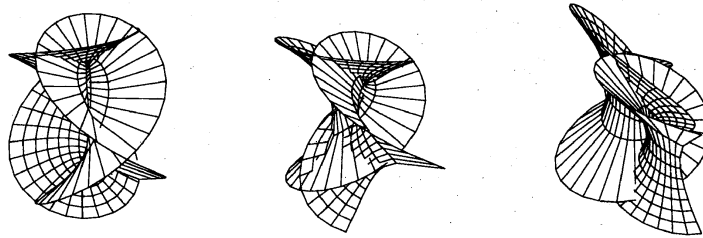


図 2: $(a, P_1, P_2, P_3) = (1, \sqrt{-1}, \sqrt{-1}, 0)$ and $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$

上の Weierstrass data は, $P = (P_1, P_2, P_3)$ が λ の値域に含まれていなければならないことを, 注意しておく. $(g, h) \in \mathcal{A}$ に対して, 次が得られる.

$$\operatorname{Re} \lambda^1(g, h) = -c\pi a \operatorname{Im}(w_2) \cos \theta + c\pi \left(a \operatorname{Re}(w_2) - \frac{1}{a} \right) \sin \theta$$

$$\operatorname{Re} \lambda^2(g, h) = -c\pi \left(a \operatorname{Re}(w_2) + \frac{1}{a} \right) \cos \theta + c\pi a \operatorname{Im}(w_2) \sin \theta$$

$$\operatorname{Re} \lambda^3(g, h) = 2c\pi \operatorname{Im}(w_1) \cos \theta + 2c\pi \operatorname{Re}(w_1) \sin \theta$$

これより, $v(\theta)$ は, 次のようになる (see figure 2).

$$\begin{pmatrix} v_1(\theta) \\ v_2(\theta) \\ v_3(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ac\pi \operatorname{Im}(w_2) & c\pi(a \operatorname{Re}(w_2) - 1/a) \\ -c\pi(a^2 \operatorname{Re}(w_2) + 1/a) & ac\pi \operatorname{Im}(w_2) \\ 2c\pi \operatorname{Im}(w_1) & 2c\pi \operatorname{Re}(w_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$m \geq 1$ の場合は, $(g, h) \in \mathcal{W}$ に対して λ の値は次のようになる.

$$\lambda^1(g, h) = 0, \lambda^2(g, h) = 0, \lambda^3(g, h) = -2\pi\sqrt{-1}cw_1,$$

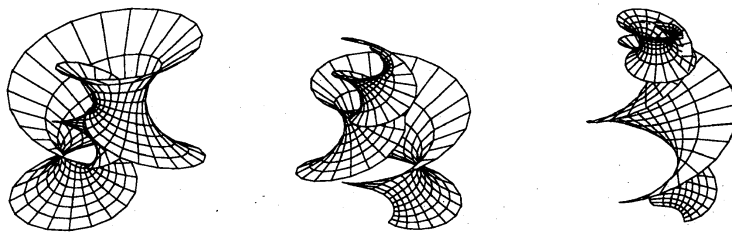


図 3: $(a, P_1, P_2, P_3) = (1, \sqrt{-1}, \sqrt{-1}, 0)$ and $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$

これより, $\mathcal{T}_v$ は $v = (0, 0, v_3)$ のとき, またこのときに限って空ではない. Weierstrass data は次のようになる (see figure 3).

$$g = az, h = -\frac{1}{2\pi w_1 P_3} \frac{z^2 - w_1 z + w_2}{z^2}.$$

参考文献

- [GH78] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Pure. Appl. Math., John Wiley & Sons, Inc., NewYork, Chichester, Brisbane, Tronto, 1978.
- [HK] D. Hoffman and H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, preprint.
- [Mora] K. Moriya, *Families of Weierstrass data for branched minimal surfaces invariant under a translation*, preprint.
- [Morb] K. Moriya, *On a variety of algebraic minimal surfaces in Euclidean 4-space*, to appear in Tokyo J. Math.
- [Yan94] K. Yang, *Complete minimal surfaces of finite total curvature*, Math. Appl., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1994.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY, MINAMI-OHSAWA,
HACHIOJI-SHI, TOKYO, 192-03, JAPAN

E-mail: katsum@comp.metro-u.ac.jp