

或る種の二階楕円型線型偏微分作用素の 純虚数中

東大 理 藤原大輔

§1 問題

R^n 内の有界領域 Ω は滑らか (C^∞ class) な境界 $\partial\Omega$ をも
つとする。二階楕円型偏微分作用素

$$A = \frac{-1}{\sqrt{g(x)}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij}(x) \sqrt{g(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + a(x)$$

を考える。ここで, $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$ は Ω での
実計量を与え, 実 vector $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ に対し,
 $a_0 > 0$ があって, $x \in \Omega$ によらず

$$\sum_{i,j} g_{ij}(x) \xi^i \xi^j \geq a_0 \sum_i \xi^{i^2}$$

とする。境界条件 $Bu|_{\partial\Omega} = 0$ の下で A を考える。

B としては,

$$Bu|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u \Big|_{\partial\Omega}$$

又は, $Bu = u$

をとる。ここで, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ は $\partial\Omega$ への metric ds^2 に関する

法線微分, $\partial/\partial \bar{z}_j$ は $\partial\Omega$ に接する微分とする。 $Bu|_{\partial\Omega} = 0$ の下で $\mathcal{H}$ を考え, 関数空間 $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, でこれを最小閉拡張し, これを A_B とする。(必要なら, 十分大なる正数を $\mathcal{H}$ に加えると) $(A_B - \lambda)^{-1}$ は $\lambda \neq \text{positive-real}$ なら存在する。

$$(1.1) \quad A_B^\alpha u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\lambda)^\alpha (\lambda + A_B)^{-1} u \, d\lambda$$

として, A_B^α を定義する。 Γ は $-A_B$ の spectrum を囲む, 複素積分路。(右辺が絶対収束する u につき $A_B^\alpha u$ を (1.1) で定義し, 閉拡張して A_B^α を得る。)

$\alpha = \kappa i$, $\kappa \in \mathbb{R}$ のとき, $A_B^{\kappa i}$ は有界な作用素となるかどうか, が問題である。

§2. 結 果

定理1 B が $\partial\Omega$ に接する微分を含まないならば, 次の評価が成立する。 $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists C_\varepsilon > 0$,

$$\|A_B^{\kappa i}\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\kappa|}$$

$A_B^{\kappa i}$ はこのとき完全連続でない。

B が $\partial\Omega$ に接する微分を含めば, 兎しも $A_B^{\kappa i}$ は有界でない。

これから導かれる系を列挙する。

定理 2 B が $\partial\Omega$ に接する微分を含めると, $\{A_B^\alpha\}_\alpha$ は $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$ で連続, $\operatorname{Re} \alpha < 0$ で α につき正則な連続作用素の半群を作り, 生成作用素は $\operatorname{Log} A_B$ 。

定理 3 $0 < \theta < 1$ のとき, A_B^θ の定義域を $D(A_B^\theta)$ と書くと, B が $\partial\Omega$ に接する微分を含めぬなら,

$$D(A_B^\theta) = [L^p(\Omega), D(A_B)]_\theta$$

ここで, $[L^p(\Omega), D(A_B)]_\theta$ は $L^p(\Omega)$ と $D(A_B)$ の間の指数 θ の複素補間空間。

定理 4

$Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + c(x)u$ のときは,

$$D(A_B^\theta) = \begin{cases} H^{p, 2\theta}(\Omega) & , 0 < 2\theta < 2 - \frac{1}{p} \\ \{u \in H^{p, 2\theta}(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} + c(x)u|_{\partial\Omega} = 0\} & , 2 - \frac{1}{p} < 2\theta < 2 \end{cases}$$

$Bu = u$ のときは,

$$D(A_B^\theta) = \begin{cases} H^{p, 2\theta}(\Omega) & , 0 < 2\theta < 1 - \frac{1}{p} \\ \{u \in H^{p, 2\theta}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\} & , 1 - \frac{1}{p} < 2\theta < 2 \end{cases}$$

ここで, $H^{p, \sigma}(\Omega)$ とは, $H^{p, \sigma}(\mathbb{R}^n)$ の Ω への制限であり,

$H^{p, \sigma}(\mathbb{R}^n)$ とは, $(I - \Delta)^{-\frac{\sigma}{2}}$ による $L^p(\mathbb{R}^n)$ の像。

注意 $p \neq 2$ のとき, $L^p(\Omega)$ と $D(A_B)$ との間の実補間空間と補間空間は異なることに注意されたい。過去において, 作用素の分数巾の定義域を定める試みは, 実補間空間として捉えようとしていたと思われる。(J. L. Lions [1], H. Kōmatsu [2], P. Grisvard [3], [4], N. Shimakura [7], D. Fujiwara [5])

以上の結果を高階の作用素に拡張することはまだ出来ない。

§3. 定理1の証明の大略

$x_0 \in \partial\Omega$ を中心として, normal coordinate を選んで次のようにできる: x_0 での Ω の cotangent space $T_{x_0}^*(\Omega)$ を $\partial\Omega$ の cotangent space $T_{x_0}^*(\partial\Omega)$ と conormal space $\mathcal{N}$ に直交分解して, それに応じて $\xi \in T_{x_0}^*(\Omega)$ を

$$\xi = (\xi', \xi_n) \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$$

とする。 A の主シンボルは

$$|\xi|^2 = |\xi'|^2 + \xi_n^2$$

に出来る。 $\pm i(|\xi|^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}} = \tau \pm$ とおく。 ここで $1^{\frac{1}{2}} = 1$ 。

従って $\Im_m \tau^r > 0$ (σ real のとき)。 pseudo-differential operator の一種 (昨年 β -pseudo-differential operator として紹介した) を使って A_B の Green 作用素を構成してみると, $A_B^{k_2} u$ の最も特異な部分は, 次の二項の積分の和で計

ることが出来ることが知れる。

$$(3.1) \quad I_1 = \int_{\Gamma} (-\sigma^2)^{\kappa i} d\sigma^2 \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^2 + \sigma^2)^{-1} e^{i x \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi,$$

$$I_2 = \int_{\Gamma} (-\sigma^2)^{\kappa i} d\sigma^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i x' \cdot \xi'} d\xi' \int_{\gamma} e^{i x_n \xi_n \frac{(\xi_n + i(|\xi'|^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}})}{(\xi^2 + \sigma^2)}} d\xi_n$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\hat{u}(\xi', \eta)}{|\xi'|^2 + \eta^2 + \sigma^2} d\eta.$$

ここで γ は τ^+ を囲み Imaginary part が > 0 なる半平面内の閉曲線。 μ は $\mathbb{R}^n$ の L^p 空間の元で、 $x_n < 0$ で 0 なるものとする。 第二項を扱うと、 γ 上で積分実行して、

$$I_2 = (2\pi i) \int_{\Gamma} (-\sigma^2)^{\kappa i} d\sigma^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i x' \cdot \xi'} d\xi' \int_{\mathbb{R}^1} \frac{e^{i x_n \tau^+} \hat{u}(\xi', \eta)}{|\xi'|^2 + \eta^2 + \sigma^2} d\eta$$

$\tau^+ = \mu$ を積分変数にとって積分路を変更すると、

$$I_2 = (2\pi i) \int_{\Gamma'} (|\xi'|^2 + \mu^2)^{\kappa i} 2\mu d\mu \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x_n \mu + x' \cdot \xi')} d\xi' \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\hat{u}(\xi', \eta)}{\eta^2 - \mu^2} d\eta$$

ここで Γ' は $\text{Im } \mu = \text{const} > 0$ なる曲線を右から左へ。

$\hat{u}(\xi', \eta)$ は $\text{Im } \eta \leq 0$ で一様有界、 $\text{Im } \eta < 0$ で正則。 $\delta >$

$$\tau, \quad (3.2) \quad I_2 = (2\pi i)^2 \int_{\Gamma'} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (|\xi'|^2 + \mu^2)^{\kappa i} \hat{u}(\xi', -\mu) e^{i(x' \cdot \xi' + x_n \mu)} d\xi' d\mu$$

$$= (2\pi i)^2 \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^2 + \mu^2)^{\kappa i} \hat{u}(\xi', -\mu) e^{i(x' \cdot \xi' + x_n \mu)} d\xi' d\mu.$$

$(|\xi|^2 + \mu^2)^{k/2}$ は (ξ, μ) の $k/2$ 次同次 C^∞ -関数であることを考慮して, Mikhlin の定理を拡張して適要すれば, (あるいは Seeley の定理?)

$$\|I_2\|_{L^p} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|k|} \|u\|_{L^p}$$

なる評価を得る. (3.1) と (3.2) 式を見比べれば, I_1 も同じ評価が可能のことが分る.

残余の項については, *Critical* ではないが, 長い厄介な計算を必要とする.

定理 2 の証明は省略する. 定理 3 は補間空間の一般論と定理 1 からの帰結. 定理 4 は筆者の論文 [6] を参照されたい. なお以上の結果は東京大学理学部紀要に投稿中である.

文 献 表

- [1] J.L. Lions, Espaces d'interpolations et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962) 233-241.
- [2] H. Komatsu, Fractional powers of operators II, Interpolation spaces, Pacific Jour. Math. 21(1967) 89-111.
- [3] P. Grisvard, Caractérisation de quelques espaces d'interpolations, Arch. rat. mech. anal. 25 No.1 1967.
- [4] _____, Commutativité de deux foncteurs d'interpolations et applications. J. Math. Pures et Appl., 45 (1966) 143-290.
- [5] D. Fujiwara, Concrete characterisation of the domains of fractional powers of some elliptic differential operators of the second order, Proc. Japan Acad. 43 1967.

- [6] D. Fujiwara, L^p theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space. To appear in J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo.
- [7] N. Shimakura, Sur les domaines des puissances fractionnaires d'opérateurs, Seminaire de Schwartz et Lions.