

双曲的多様体と幾何学的 ディオファントス問題

東京工業大学理学部 野口潤次郎
(Junjiro Noguchi)

序. 本稿は1991年11月5日より8日にかけて城崎で開催された代数幾何学シンポジウムでの筆者の講演にともづくものです. 動機は, “ディオファントス幾何学” といったものがあり, これを数体上で考えれば代数多様体上の有理点の問題になり, 関数体上で考えればこれは幾何学の問題になり, その双方のアナロジーを追ってやるのは面白いのではなかろうかという事です. あおまかな表を次頁に書きました. 対応するものが互いに定理(結果)であったり, 定理と予想, 予想対予想の場合もあります. このような問題意識の持ち方は S. Lang に負う所が大であります. 筆者は既にこのテーマについていくつかの論説を書いています ($[N_1, N_2, MN]$ 等). 詳しくは文献にある論文等を見ただけのこととして, ここでは講演の中心となったいくつかの結果を紹介す

値分布理論			Diophantine 幾何学			
	Nevanlinna 理論	小林 邦由の幾何		Mordell 予想	Shafarevich 予想	
1 次元	Nevanlinna (1920) Ahlfors (1930~, 才田 71-12 巻) Chern (1960~)	Schwarz Pick Hurwitz Ahlfors	数体	Faltings (1983) Vojta Conj. (1985-6)	Faltings (1983)	
			同数体	Mazur (1963) Gauert (1965)	de Franchis の定理 (1890) Severi の定理	Parshin (1968) Arakelov (1971)
高次元化 一般化	H. Cartan (1930~) Weyl-Ahlfors Stoll Griffiths, Shiffman 藤本, 野口 Siu 相原-野口 (1991)	Gauert-Reckziegel 小林, 藤合 Kusack, Kierman 野口 (拡張版定理)	数体	Weil 予想 Lang 予想 (1974) abc 予想 Faltings (1991, Abelian var.)	Arithmetic Intersection 理論 (Arakelov 理論)	
			同数体	Lang 予想 (1974) Riebeschl (1981) Spirro, Raynaud 野口 (81, 85, 92) Dechamps, Maehara	Lang 予想 (1974) 小林-藤合, 相原 野口-才田, 才田 Kalka-Shiffman-Weyl Maehara, Zaidenberg Haruz, 野口	Faltings (1983, Abelian varieties) 野口 (1988), Peters, Saich-Zucker 古野-野口 (1991) without deg. cond. Madel (1989) 野口 (1991)

ることとします。

1. Mordell 予想について

ここでは円数体上の Mordell 予想の高次元版を考えます。値分布の方では小林双曲的幾何が関係する部分です。以下 X , Y を複素解析空間とし, $\text{Mer}(X, Y)$ で X から Y への有理型写像の全体を表わし, $\text{Merdom}(X, Y)$ で X から Y への支配的な有理型写像の全体を表わす。次の定理は 1974 年に S. Lang により出された予想です。

定理 (1.1) ([N4]). X, Y をコンパクトとし, Y は双曲的であるとする。このとき $\text{Merdom}(X, Y)$ は有限集合である。

部分的な解決は表の Mordell 予想の右側最下段にある人々によって与えられていた。 $\dim Y = 1$ のときは Y が双曲的であることと Y の種数が 2 以上であることは同値であるからこれは、いわゆる de Franchis の定理の一般化である。証明は、 $\text{Merdom}(X, Y)$ が無限個の元を含むと 2 順次 reduction をしながら矛盾を導くのであるが、その最後のステップでは宮岡-森 (Ann. Math. 124 (1986)) による有理曲線の存在定理が使われる。詳しくは [N4] をみられたり。

さて、定理 (1.1) と筆者の以前の結果を合せると次の円数体上の Mordell 予想の高次元版が得られる。

定理 (1.2) ([N4]). $\pi: \mathcal{C} \rightarrow B$ をプロパーなファイバー

空間とし, ファイバー空間としてのコンパクト化元: $\bar{\pi} \rightarrow \bar{B}$ を持つとする. 次に仮定する.

(i) 全ての $x \in B$ に対し, $\pi_x = \pi^{-1}(x)$ は双曲的である.

(ii) $\partial B = \bar{B} \setminus B$ 上では $\pi \rightarrow B$ は $\bar{\pi} \rightarrow \bar{B}$ に双曲的に埋込まれている.

このとき, π は自明なファイバー部分空間 $\mathcal{U}_j \cong Y_j \times B$, $1 \leq j \leq l$, を高く有限個含み, $\pi \rightarrow B$ の有理型切断は有限個を除いて, それら自明なファイバー部分空間 $\mathcal{U}_j$ の定切断である.

これもやはり S. Lang により 1974 年に予想されたものである. 上述の条件 (ii) は $\dim \pi_x = \dim B = 1$ のときには必要でない. よってこれは Manin-Grauert により解決された数体上の曲線に対する Mordell 予想も含む. π_x が双曲的になった例としては, π_x が非特異で $\Omega^1(\pi_x)$ が ample の場合, また アーベル多様体の部分多様体で, アーベル部分多様体の平行移動を含まないものなどがある.

2. Shafarevich 予想について

これは Faltings の Mordell 予想の解決の論述のアナロジーとしても関連の深いものである. 数体上では Parshin-Arakelov の定理が最初の結果である. これは, 基礎になる曲線 C (コンパクト) とその上の有限個の点 P_i , $1 \leq i \leq N$,

整数 $g \geq 2$ をデーターとして与え、 C 上の種数 g の曲線族でモジュライが真に変化し、高々 $P_i, 1 \leq i \leq N$, で退化するものの全体 $M(g; C; \{P_i\}_{i=1}^N)$ が有限集合であることを主張する。関数体上でも数体上でも、これが分れば Mordell 予想が従うことは Parshin により分っていた。さてこれを値分布理論の観点からみると次のようになる。大まかに言って、 $M(g; C; \{P_i\}_{i=1}^N)$ の元をとることは $B = C \setminus \{P_i\}_{i=1}^N$ から種数 g の曲線のモジュライ空間 $M(g)$ への非定数正則写像 $f: B \rightarrow M(g)$ を考えることと同値である。 $\mathbb{T}(g)$ をタイヒミュラー空間、 $\Pi(g)$ をタイヒミュラー群とすれば、 $M(g) = \mathbb{T}(g)/\Pi(g)$ で $\mathbb{T}(g)$ は完備双曲的である。結局、 B から $M(g)$ への非定数正則写像の全体 $\text{Hol}(B, M(g))$ の有限性を言えばよいことになる。完備双曲的複素空間への正則写像の一般論より、 $\text{Hol}(B, M(g))$ はコンパクトな複素空間の Zariski 閉集合であることが示される。 $\dim \text{Hol}(B, M(g)) = 0$ を示すには他の方法が必要である。これには、コホモロジーの消滅 (Arakelov), 最大値原理 (志賀-今吉), 調和写像の理論 (Schoen-Yau) などの方法がある。

さて同様のことも、曲線族だけでなく、偏極アベール多様体の族や、K3 曲面の族などについて考えてみるのも興味深

1). そのような多様体のモジュライ空間は有界対称領域 $\mathbb{D}$ の商 $\mathbb{D}/\Gamma$ を表わすことができる, $H_0(B, \mathbb{D}/\Gamma)$ の構造を調べることになる. ここでは B としてはコンパクト, ケーラー多様体の Zariski 開集合を取れる (代数性は必要ない). まず, $H_0(B, \mathbb{D}/\Gamma)$ はコンパクト複素空間の Zariski 開集合であることが分る. $Z_1 \subset H_0(B, \mathbb{D}/\Gamma)$ を一つの連結成分とする. $\dim Z_1 > 0$ とする. するとある有界対称領域 $\mathbb{D}_1$ と離散群 $\Gamma_1 \subset \text{Aut}(\mathbb{D}_1)$ があり, $Z_1 = \mathbb{D}_1/\Gamma_1$ と表わされ, $x \in B$ に対し

$$\varphi_x: f \in \mathbb{D}_1/\Gamma_1 \rightarrow f(x) \in \mathbb{D}/\Gamma$$

は全測地的, プロパーな正則挿入である. さてもとの B は $x \in B \rightarrow \varphi_x \in H_0(\mathbb{D}_1/\Gamma_1, \mathbb{D}/\Gamma)$ により正則に $H_0(\mathbb{D}_1/\Gamma_1, \mathbb{D}/\Gamma)$ の中に写される. その像を含む $H_0(\mathbb{D}_1/\Gamma_1, \mathbb{D}/\Gamma)$ の連結成分 Z_2 をとると, 前と同様に $Z_2 = \mathbb{D}_2/\Gamma_2$ と表わされ, 自然な取值写像

$$\Psi: (\mathbb{D}_1/\Gamma_1) \times (\mathbb{D}_2/\Gamma_2) \rightarrow \mathbb{D}/\Gamma$$

を得る. 最終的に次の定理を得る.

定理 (2.1) ([MN]). 上述の $\Psi: (\mathbb{D}_1/\Gamma_1) \times (\mathbb{D}_2/\Gamma_2) \rightarrow \mathbb{D}/\Gamma$ は全測地的, プロパーな正則挿入である.

$\mathbb{D}/\Gamma$ が偏極 K3 曲面や偏極アーベル多様体のモジュライ空間の場合には, Peters, 斎藤 (政), Zucker 等による Ψ の

詳しい研究がある。

3. レベル構造を持つ偏極アーベル多様体族について

これは表の最も右下にある所と最も左下にある所についての話である。前節では基礎空間の上に、例えば主偏極アーベル多様体の族を考え、それが退化することを許される場所を基礎空間上に指定した。この退化条件を付さなければ対応するモジュライ空間は大きくなり過ぎ意味ある構造を結論することは望めなくなる。ここではその代わりにレベル構造を考えることにする。 R を非特異複素射影的代数多様体とし、 $A \rightarrow R$ をその上の主偏極アーベル多様体の族（真にモジュライの動くもの、退化は許す）で $\dim_R A = g$ とする。そのレベル n -構造とは $2g$ 個の有理切断 $\{s_i\}_{i=1}^{2g}$ で、一般の点 $x \in R$ で $\{s_i(x)\}_{i=1}^{2g}$ が A_x の n 分点を生成しているものとする。 $A \rightarrow R$ でレベル n -構造を持つものの全体を $A(g, n; R)$ と書く。 Ω を R 上の Hodge 計量全体の上を走りせ

$$\lambda(R) = \inf \left\{ \int_R g(K_R) \wedge \Omega^{r-1} \right\} \geq -\infty$$

とおく ($r = \dim R$)。 $k(g)$ で重さ k の Siegel 形式が共通零点を持たなくなるような k の最小値とする。このとせいの定理が成立する。

定理(3.1) ($[N_3]$). $g \geq 5$ とする (技術的仮定).

i) $n > gk(g)/2$ ならば $A(g, n, R)$ は有限次元の
準射影的代数多様体である.

ii) $n > (1 + \max\{0, \gamma(R)\})gk(g)/2$ ならば,
 $A_{\text{deg}}(g, n, R) = \emptyset$.

ここで $A_{\text{deg}}(g, n, R)$ とは $A(g, n, R)$ の元で真に退化
ファイバーを持つものの全体を表わす. 次に注意しよう.

命題(3.2). $\gamma(R) \leq 0$ ならば $A(g, n, R) = A_{\text{deg}}(g, n, R)$.

Nakel (Ann. Math. 129(1989)) は R が種数 ≤ 1 の
曲線の時, 上述の ii) に相当することを示している. 証明
は R 上で Nevanlinna 理論を展開するもので, これは ^{有理型} ~~代数~~ 写
像 $f: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{D}/\Gamma$ (今の場合は $\mathbb{D}$ は Siegel 上半空間
だが, 一般の有界領域領域でもよく, $\mathbb{D}/\Gamma$ は $\mathbb{D}/\Gamma$ のトポイ
タルコネクト化を表わす) において考えると, Nevanlinna
の第2主要定理型の不等式 ([AN])

$$K\{T_f(r, [D]) + T_f(r, K_{\mathbb{D}/\Gamma})\}$$

$$\leq N(r, \text{Supp } f^*D) + O(\log r) + O(\log^+ T_f(r, [D]))$$

を示すのと同じことになる. ここで D は $\mathbb{D}/\Gamma$ のコネクト
化の為に加える因子の全体である. Nevanlinna の古典的
第2主要定理も, $\mathbb{D}$ として $\mathbb{C}$ の上半平面, Γ を適当な Fuchs 群
にとることにより導かれる. 詳しくは [AN], [N₃] を見

水田。

参考文献

[AN] Y. Aihara-J. Noguchi, Value distribution of meromorphic mappings into compactified locally symmetric spaces, Kodai Math. J. 14(1991), 320-334.

[MN] T. Miyano-J. Noguchi, Moduli spaces of harmonic mappings and holomorphic mappings and Diophantine geometry, Prospects in Complex Geometry, Proc. Katata/Kyoto 1989, Lect. Notes in Math. 1468, pp. 227-253, Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.

[N₁] 野口靖次郎, 双曲の多様体理論と Diophantine ^{US}幾何学, 数学 41(1989), 320-334.

[N₂] J. Noguchi, Hyperbolic manifolds and Diophantine geometry, Sugaku Expositions, 4(1991), 63-81.

[N₃] —, Moduli space of Abelian varieties with level structures over function fields, Int. J. Math. 2(1991), 183-194.

[N₄] —, Meromorphic mappings into compact hyperbolic complex spaces and geometric Diophantine problems, to appear in Int. J. Math. 3(1992).