

C. 1

局所 Torelli の問題について.

臼井三平

0. 序.

Griffiths に于ける周期写像の研究に端を発して、
周期写像の単射性 (Torelli 型の問題)・全射性
の問題からいさゝか代数多様体について研究
されていく ($K3$ 曲面については [11], [6];
Enriques 曲面については [7]; 一般曲面について
は [2] の II, [10], [13], [14] etc).

この小論の目的は、一般型曲面に対する
Torelli 型の問題についての一つの実験である。
ここで対象とするのは、非特異射影曲面 X
であって、 $\mathbb{P}^3$ への生成射影 X の特
異集合 D が非特異完全交叉の曲線とな
るようなものである (2.1 参照)。 $\mathbb{P}^3$
に D があり、これを blow-up したものを P' と
すれば、 X の proper transform として X' が
得られる。 $D = V_1 \cup V_2$ とし、 $n, n_1,$
 n_2 は各々 $\mathbb{P}^3$ 中の X, V_1, V_2 の次
数とすると、主要な結果は次の命題 (定理 (3.6))

0.2

である。

$n \geq \max\{n_1+n_2+2, n_2+4\}$ である, $n \neq 4$, n_1+4, n_2+4 のどちらにも n は, X' の deformations のうち P' 中の Z の X' の displacements から来る分には対応しては, 局所 Torelli の定理が成立する。

とすると, X' の deformations は P' 中の Z の X' の displacements と $\mathbb{P}^3$ 中の Z の D の displacements から得られる (2.4), (2.5) 参照) わけだから, 後者の関係 (2.6) とすると目下考察中である。

この category は $\mathbb{C}$ 上にある。

1. 局所 Torelli の問題

この節では局所 Torelli の問題の定式化と、これを正に知られていないこととをわけておく。
詳しくは Griffiths ([2]) 参照。

(1.1) $f: X \rightarrow S$ を解析空間の smooth projective morphism of pure relative dimension d とし、 S 上の射影空間への埋め込み

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times S \\ f \downarrow & \swarrow & \\ S & & \end{array}$$

と基点 $c \in S$ を決めておく。

(1.2) $0 < r < d$ なる整数 r に対し、 $X_0 = f^{-1}(c)$ 上の $\mathbb{C}$ -係数の r -th primitive cohomology の Hodge 分解は

$$P^r(X_0, \mathbb{C}) = \bigoplus_{0 \leq i \leq r} P^{r-i, i}(X_0)$$

とする。縮約 $T_{X_0} \otimes \Omega_{X_0}^{r-i} \rightarrow \Omega_{X_0}^{r-i-1}$ から導かれる写像

$$(1.2.1) \quad \varphi: H^1(T_{X_0}) \rightarrow \bigoplus_{0 \leq i \leq [\frac{r-1}{2}]} \text{Hom}(P^{r-i, i}(X_0), P^{r-i-1, i+1}(X_0))$$

2

は infinitesimal period map of weight r と呼ぶ.

問題 (1.3). (局所 Torelli の問題, Griffiths).

infinitesimal period map φ が injective か否かを
しらべよ. 特に, 単連結な一般型の曲面に対
して φ の injectivity をしらべよ.

(1.4) 問題 (1.3) により 2 : 1 に しらべ
られていゝと 8 列挙しておく.

(1.4.1) 局所 Torelli の定理が成立してゐる例:
超曲面 ([2]oII), $\mathbb{P}^2$ あるいは $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の巡回
分岐被覆 ([10]), complete intersections ([13]),
weighted complete intersections ([14]).

(1.4.2) 局所 Torelli の定理が成立してゐない例:
 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 中の超曲面 $X_0^6 + X_1^6 + X_2^6 + X_3^6 = 0$ に
 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は $(X_0, X_1, X_2, X_3) \mapsto (X_0, \varepsilon X_1, \varepsilon^2 X_2, -X_3)$
(ε は 1 の 3 乗根) で作用させて得られる商
空間の非特異極小 model ([8]).

(1.5) (1.4.2) の例に於て, 2 問題 (1.3) は否定的
となるが, canonical divisor が ample といふ条件

((1.4.2) の例は : の条件をみたさない) をつけ加えてみれば, 肯定的に解けるかもしれない (open problem).

2. 対象.

この節では, この小論で対象とする曲面の定義とその deformations について小平 ([9]), 堀川 ([5]), 坪井 ([12]) の結果を要約しておく.

(2.1) 非特異射影曲面 X' を $\mathbb{P}^3$ へ生成射影して得られる超曲面 X は ordinary singularities のみをもつ. 今特に X の特異集合が $\mathbb{P}^3$ 中の非特異な完全交叉の曲線となるとき, つまり X の定義式が

$$(2.1.1) \quad F = af^2 + 2bfg + cg^2$$

となるとき, この場合この小論の対象である.

ここで f, g, a, b, c は斉次多項式でかつ F も斉次多項式である.

(2.2) (2.1) の曲面の deformations, moduli 数は既に知られており, 特に小平 ([9]) において, 曲面 X は effectively parametrized maximal family of

4

surfaces with ordinary singularities in P^3 whose characteristic system on each member is complete に属すものとして示すのである。

(2.3) 以後次の記号を決めておく。

$$P = P^3(\mathbb{C}).$$

$$X : F = af^2 + 2bfg + cg^2 = 0 \quad \text{in } P.$$

$$n = \deg F, \quad n_1 = \deg f, \quad n_2 = \deg g.$$

$$n_1 \geq n_2 \quad \text{としおく.}$$

$D = \text{Sing}(X) : f = g = 0 \quad \text{in } P.$ D は非特異.

$$C : f = g = t^2 - ac = 0 \quad \text{in } P.$$

$$p : P' \rightarrow P \quad P \text{ の } D \text{ に対する } \pi \text{ の blowing-up.}$$

$q : X' \rightarrow X \quad X \text{ の proper transform. } X \text{ の正規化になす.}$

$$r : D' = q^{-1}(D) \rightarrow D.$$

$$C' = r^{-1}(C). \quad \text{reduced structure を入れておく.}$$

2重被覆 r の分岐集合になす.

$\tilde{r} : E' \rightarrow D \quad \text{例外因子. } P^1\text{-bundle となす.}$

以上は次の図式を構成して置く。

5

$$(2.3.1) \quad \begin{array}{ccccccc} P' & \supset & X' & \supset & D' & \supset & C' \\ p \downarrow & & i \downarrow & & r \downarrow & & \downarrow \\ P & \supset & X & \supset & D & \supset & C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P' & \supset & E' & \supset & D' \\ p \downarrow & & \tilde{r} \downarrow & \swarrow & r \end{array}$$

$$P \supset X \supset D \supset C, \quad P \supset D.$$

$$\mathcal{O}_X(l-mD) = \text{Im}(\mathcal{O}_X(l) \otimes (\mathcal{I}_E/\mathcal{I}_X)^m \rightarrow \mathcal{O}_X(l)) \quad (m > 0).$$

$T_{(P,D)} = \text{Ker}(T_P \rightarrow N_{D/P}) : P$ 上の
vector 場で D に $\perp$, たもののはす層.

$$T_{(P,D),X} = \text{Im}(T_{(P,D)} \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow T_P \otimes \mathcal{O}_X).$$

$$T_{(P,D),X}(l-mD) = \text{Im}(T_{(P,D),X} \otimes \mathcal{O}_X(l-mD) \rightarrow T_P \otimes \mathcal{O}_X(l)).$$

$$T_X = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X).$$

$\mathcal{N}_{X/P} = \text{Coker}(T_X \rightarrow T_P|_X) : \text{ト平 (91)}$
で導入された層.

$R = \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3] : P$ の斉次座標環.

$I = (f, g) : D$ の斉次 R -ideal.

$R_l, I_l, (I^\perp)_l : \text{各々次数 } l \text{ 次の斉次部分.}$

補題 (2.4). $n > n_1 + n_2 + 1$ かつ $n \neq 4$,
 $n_1 + 4, n_2 + 4$ ならば, 次の可換な完全な
図式を得る.

6

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow \frac{H^0(N_{X'/P'})}{\text{Im } H^0(T_{P'}|_{X'})} & \rightarrow & H^1(T_{X'}) & \rightarrow & H^1(T_{P'}|_{X'}) & \rightarrow & 0 \\
& \uparrow \S & & \uparrow \S & & \uparrow \S & \\
0 \rightarrow \frac{H^0(\mathcal{O}_X(n-2D))}{\text{Im } H^0(T_{(P,D),X})} & \rightarrow & H^1(T_X) & \rightarrow & H^1(T_{(P,D),X}) & \rightarrow & 0 \\
& \parallel & & \uparrow \S & & \uparrow \S & \\
0 \rightarrow \frac{H^0(\mathcal{O}_X(n-2D))}{\text{Im } H^0(T_{(P,D),X})} & \rightarrow & \frac{H^0(\mathcal{N}_{X/P})}{\text{Im } H^0(T_P|_X)} & \rightarrow & \frac{H^0(N_{D/P})}{\text{Im } H^0(T_P|_X)} & \rightarrow & 0.
\end{array}$$

証明は [12] と同じようにできる。

(2.5) (2.4) は X' の deformations から X' の displacements in P' と D の displacements in P とから得られることを示す。これはまた、 X の定義式 (2.1.1) において、 a , b , c ないし f , g の perturbations である。

3. 主要な結果.

(3.1) $P^{2,0}(X') = H^0(K_{X'})$ であるから、曲面 X' に対する問題 (1.3) は次の φ' の第 1 項に対し非退化であるかということと同

7

値である。

$$(3.1.1) \quad \varphi' : H^1(T_{X'}) \otimes H^0(K_{X'}) \rightarrow H^1(\Omega_{X'}).$$

(3.2) $H^1(T_{X'})$ の $\gamma \in X'$ の displacements in P' から来る分には (2.4) と $\mathbb{I}_* K_{X'} \simeq \mathcal{O}_{X'}((n-4)-D)$ により次の可換図式を得る。

$$(3.2.1) \quad \begin{array}{ccc} \frac{H^0(N_{X'/P'})}{\text{Im } H^0(T_{P'}|_{X'})} \otimes H^0(K_{X'}) & \xrightarrow{\varphi'_1} & \frac{H^0(N_{X'/P'} \otimes K_{X'})}{\text{Im } H^0(T_{P'}|_{X'} \otimes K_{X'})} \\ \uparrow \gamma & & \uparrow \alpha_1 \\ \frac{H^0(\mathcal{O}_X(n-2D))}{\text{Im } H^0(T_{(P,D),X})} \otimes H^0(\mathcal{O}_X(n-4)-D) & \xrightarrow{\varphi_1} & \frac{H^0(\mathcal{O}_X((n-4)-3D))}{\text{Im } H^0(T_{(P,D),X}((n-4)-D))}. \end{array}$$

α_1 の kernel をしるべしとすると、
 γ , φ'_1 の第1項に好して非退化であるとい
うことは次のように多項式環の言葉に換言で
きる。詳細は [15] 参照。

定式化 (3.3). (φ'_1 に対する局所 Torelli の問題).
与えられた $Q \in (I^2)_n$ に対して次の条件を考
へられたいと仮定する。 $\forall A \in I_{n-4}$ に対
し、 $\exists \beta_i = \beta'_i f + \beta''_i g \in I_{n-3}$ ($0 \leq i \leq 3$), $\exists S \in R_{n-4}$,
 $\exists T \in R_{n_1+n_2-4}$ である。

8

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta'_0 & \beta''_0 \\ \vdots & \vdots \\ \beta'_3 & \beta''_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} tT+S & cT \\ aT & tT-S \end{pmatrix} \pmod{I}$$

これから

$$AG = \sum_{0 \leq i \leq 3} \beta_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

と t, s について (以上 1 の条件). しかるに,

$\exists c_i \in R_1 \quad (0 \leq i \leq 3)$ であり,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{I}$$

これから

$$G = \sum_{0 \leq i \leq 3} c_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

と t, s についてか?

補題 (3.4). $\alpha_1 \circ \varphi_1$ は単射であり、従って

(3.3) 中の S と T とは 0 と 1 と一致し、

証明は (3.3) 中の AG を初等環論的にしらべるといふことによる。

9

補題 (3.5). $n > n_1 + n_2 + 1$ ならば

$$H^0(T_X((n-u)-D)) \otimes \mathcal{O}_X(1) = 0 \quad (1 \leq 1).$$

証明 17, $T_X((n-u)-D) \hookrightarrow \mathcal{I}_+ \Omega_X^1$ であり
 $H^0(\mathcal{I}_+ \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X(1)) = 0$ であり.

定理 (3.6). $n > n_1 + n_2 + 1$ ならば $n \neq 4$,
 $n_1 + 4$, $n_2 + 4$ ならば (3.2.1) の φ_1' は
 第 1 項に於いて非退化である.

証明. (3.3) を初等環論的に示す. R の各
 次 ideals

$$\sigma = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right),$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_i B_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \in \sigma \mid \begin{array}{l} B_i = \beta_i' f + \beta_i'' g \in I, \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0' & \beta_0'' \\ \vdots & \vdots \\ \beta_3' & \beta_3'' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod{I} \end{array} \right\}$$

を考へる. 証明は次の 3 段階に分かれる.

第 1 段階. $A = A'f + A''g \in I_{n-4}$ ならば

$A'f, A''g \in \mathcal{L}$ ならば, $f, g \in \sigma$.

10

第2段階. $A'fG, A'gG \in L$ かつ $fG, gG \in Q$ なら $fG, gG \in L$.

第3段階. $fG, gG \in L$ なら $fG, gG \in L$ (3.3)の結論から之。

なお第1段階で (3.5) を使； Q.E.D.

- [1] Deligne, P., Travaux de Griffiths, Sem. Bourbaki 376(1969/70) 213-237.
- [2] Griffiths, P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds I,II,III, Amer. J. Math. 90(1968) 563-626; 805-365; Publ. Math. I.H.E.S. 33(1970).
- [3] Griffiths, P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussion of open questions, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1970) 228-296.
- [4] Griffiths, P. A. and Schmid, W., Recent developments in Hodge theory, Proc. Symp. at Bombay in 1973, Oxford Univ. Press (1975).
- [5] Horikawa, E., On the number of moduli of certain algebraic surfaces of general type, J. Fac. sci. Univ. Tokyo (1974) 67-78.
- [6] Horikawa, E., Surjectivity of the period map of K3 surfaces of degree 2, Math. Ann. 228(1977) 113-146.
- [7] Horikawa, E., On the periods of Enriques surfaces I,II, Proc. Jap. Acad. 53-3 (1977) 124-127; 53-A-2(1977) 53-55.
- [8] Kinef, F. I., A simply connected surface of general type for which the local Torelli theorem does not hold (Russian), Cont. Ren. Acad. Bulgare des Sci. 30-3 (1977) 323-325.
- [9] Kodaira, K., On the characteristic systems of families of surfaces with ordinary singularities in a projective space, Amer. J. Math. 87(1965) 227-255.
- [10] Peters, C., The local Torelli theorem of some cyclic branched coverings,
- [11] Pjateckiĭ-Šapiro, I. I. and Šafarevič, I. R., A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Izv. Acad. Nauk. 35(1971) 530-572.
- [12] Tsuboi, S., On the sheaves of holomorphic vector fields on surfaces with ordinary singularities in a projective space I,II, Sci. Rep. Kagoshima Univ. 25(1976) 1-26; II is to appear.

[13] Usui, S., Local Torelli theorem for non-singular complete intersections, Jap. J. Math. 2-2(1976) 411-418.

[14] Usui, S., Local Torelli theorem for some non-singular weighted complete intersections, to appear in Proc. Internat. Symp. Alg. Geom. 1977 Kyoto.

[15] Usui, S., Local Torelli theorem for certain surfaces of general type, to be prepared.