

地衡流乱流のエネルギー散逸とスケーリング則

九大・応力研

伊賀 啓太 (Keita Iga)

Research Institute for Applied Mechanics,

Kyushu Univ.

1 はじめに

大気や海洋の大規模な運動は準地衡流渦位方程式によってよく表されることが知られているが、その方程式に支配される乱流運動は(準)地衡流乱流と呼ばれる。その基本的な性質は2次元ナビエ-ストークス方程式に従ういわゆる2次元乱流と似ており、エネルギーの逆カスケードなどの現象が見られる。しかし、ロスビーの変形半径という特徴的なスケールの存在のために、逆カスケードの速さなど定量的性質は異なっている。

この準地衡流乱流の性質を詳しく調べたのが Watanabe et al. (1997, 1998) である。(彼らの研究はもともと磁場に対して垂直な面内の準2次元静電ポテンシャルを調べることを動機としている。しかし彼らが用いた基礎方程式はチャーニー-長谷川-三間方程式と呼ばれ、準地衡流渦位方程式と全く同等なものである。) 特に Watanabe et al. (1998) は、準地衡流渦位方程式で表される減衰性乱流を調べたものであるが、スケーリング則による議論によってエネルギースペクトルが従う冪則を理論的に導出し、数値実験によってこの理論の妥当性を確かめている。

しかし、彼らは数値実験の結果を説明する理論を構築する際に全エネルギーの減少のしかたを表すパラメータを用いているが、その値の決定には実際に数値計算をして得られた結果を使っている。また、理論的にはエネルギースペクトルが、ロスビー変形半径の逆数(以下 λ と記す)より十分小さな波数領域では波数の -5 乗に、 λ より十分大きな波数領域では波数の -3 乗に比例することが予想されているのに、数値計算の結果では λ との大小に関わらず波数の -6 乗に比例するエネルギースペクトルになってしまっている。

本稿では、準地衡流乱流のスケーリング則について、特に、エネルギー散逸に注目して調べた結果を述べる。

2 準地衡流乱流のスケーリング則

大気や海洋の大規模な流れを記述する準地衡流渦位方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi - \lambda^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) = D \quad (2.1)$$

を考える。ここで ψ は流線関数、 λ はロスビー変形半径の逆数、 D は非常に高波数の領域で働く無限小の係数を持った散逸項を表す。まず、この方程式で記述される準地衡流乱流のスケーリング則を簡単にまとめる。詳しい導出は Watanabe et al. (1997, 1998) を参照のこと。エネルギーカスケード領域におけるエネルギー Spektral のスケーリング則は

$$E(k) \propto \begin{cases} \lambda^2 k^{-\frac{11}{3}} \epsilon^{\frac{2}{3}}, & \text{for } k \ll \lambda, \\ k^{-\frac{5}{3}} \epsilon^{\frac{2}{3}}, & \text{for } k \gg \lambda \end{cases} \quad (2.2)$$

(ただし、 ϵ はエネルギー輸送率) となり、エンストロフィーカスケード領域におけるエネルギー Spektral のスケーリング則は

$$E(k) \propto \begin{cases} \lambda^2 k^{-5} \eta^{\frac{2}{3}}, & \text{for } k \ll \lambda, \\ k^{-3} \eta^{\frac{2}{3}}, & \text{for } k \gg \lambda \end{cases} \quad (2.3)$$

(ただし、 η はエンストロフィー輸送率) である。減衰性乱流の場合、渦の特徴的な波数 $k_{\max}$ とそれに対するエネルギー Spektral のピーク値 $E_{\max}$ は $k_{\max} \ll \lambda$ において、

$$k_{\max} \propto E^{-\frac{1}{8}} \lambda^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{1}{4}}, \quad E_{\max} \propto E^{\frac{9}{8}} \lambda^{-\frac{3}{4}} t^{\frac{1}{4}} \quad (2.4)$$

のようにそれぞれ $t^{-\frac{1}{4}}$ および $t^{\frac{1}{4}}$ に比例して時間変化する。但し、 E は系の全エネルギーである。この理論は彼らの数値計算の結果をかなりよく説明したが、それでもまだ若干のずれも見られた。理想的には全エネルギー E は保存するはずであるが、数値計算では安定に時間積分を行なうために、小さくても有限の大きさを持つ散逸項を入れるので、 E はゆっくりと減衰していく。全エネルギー E が

$$E \propto t^{-\theta} \quad (2.5)$$

の形で減衰するとすると、 $k_{\max}$ と $E_{\max}$ の時間変化のしかたは少し修正されて

$$k_{\max} \propto \lambda^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{2-\theta}{8}}, \quad E_{\max} \propto \lambda^{-\frac{3}{4}} t^{\frac{2-9\theta}{8}} \quad (2.6)$$

となる。Watanabe et al. (1998) ではこの θ の値を定めるのに彼らの数値計算の結果を用い、全エネルギーの時間変化のグラフから読みとることによって $\theta = 0.05$ としたが、この値を用いて表した時間変化 (2.6) は彼らの数値計算の結果をよく表していたのである。

3 エネルギー散逸量の見積り

3.1 高波数域へのエネルギー輸送

Watanabe et al. (1998) で数値計算の結果を用いて経験的に定めたパラメータ θ を理論的に見積もるための手がかりとして、この系においてエネルギーがどのように散逸するかを考察する。2次元乱流や準地衡流乱流においてはエネルギーは全て高波数側から低波数側に逆カスケードすることを前提にしていた。しかし、Fjørtoft (1953) で議論されているように、エネルギーとエンストロフィーの両方が保存するという制約からは、「たと

え大部分のエネルギーが逆カスケードしても、零でないエネルギーが高波数側への輸送されなければならない。」ということが導かれる。高波数側に輸送されたエネルギーは散逸項の影響を大きく受けて散逸されるであろうから、この高波数側に輸送されたエネルギーが全エネルギーの散逸になるとする仮定が (図 1), これからの議論の出発点である。

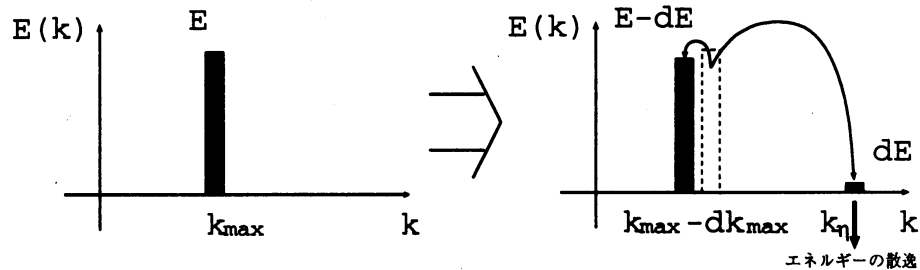


図 1: 本理論で仮定するエネルギー輸送・散逸の様子. エネルギーの大部分は元の波数より少し低波数側にずれるが、わずかな部分は高波数側に輸送されてエネルギーとエンストロフィーの両方が保存される。そして、高波数側に輸送されたエネルギーが散逸される。

エネルギー輸送によってエネルギーもエンストロフィーも変化しない条件より E が満たす微分方程式は

$$\frac{dE}{dk_{\max}} \cong \frac{2k_{\max}E}{k_{\eta}^2 - k_{\max}^2} \quad (3.7)$$

となるが、この微分方程式は簡単に解けて、初期におけるエネルギー、エネルギー Spektral のピーク波数をそれぞれ E_0, k_f とすると

$$E \cong E_0 \frac{k_{\eta}^2 - k_f^2}{k_{\eta}^2 - k_{\max}^2} \quad (3.8)$$

となる。(3.8) 式は E を $k_{\max}$ の関数として表しているが、さらに (2.4) を用いることによって、 E を時間の関数として表すこともできる。 $k_{\eta} \gg k_{\max}$ の場合には (3.7) の分母の $k_{\max}$ を無視して、全エネルギーの散逸率 dE/dt は

$$\dot{E}_a \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dk_{\max}} \frac{dk_{\max}}{dt} \cong 2k_{\max}k_{\eta}^{-2}E \frac{dk_{\max}}{dt} \quad (3.9)$$

となるが、(3.9) に (2.4) を代入して

$$\dot{E}_a \cong -\frac{1}{2}C_{ks}^2E^{\frac{3}{4}}\lambda^{\frac{3}{2}}k_{\eta}^{-2}t^{-\frac{3}{2}} \quad (3.10)$$

となる。ただし、 C_{ks} は (2.4) の $k_{\max}$ の式の明示されていない比例定数である。

さて、 θ の値という元の問題に戻ろう。このようにして求めた $\dot{E}$ の形から、もはや E は時間の冪乗の形では表されるものではないことがわかる。そのため、 E の時間変化を単純に一つのパラメータ θ を用いて、 $E \propto t^{-\theta}$ と表現するのは不適當である。しかし、各時刻における θ に対応する量を $-d \log E / d \log t$ で評価することはできる。この値は (3.10) を用いて、

$$\theta = -\frac{d \log E}{d \log t} = -\frac{t}{E} \dot{E}_a \cong \frac{1}{2}C_{ks}^2E^{-\frac{1}{4}}\lambda^{\frac{3}{2}}k_{\eta}^{-2}t^{-\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

と見積もられる。

この結果には変数 E を含んでいる。散逸の小さい理想的な状態では E はほとんど保存量であるとして、初期のエネルギーの値 E_0 を用いればよいであろうが、実際の数値計算では、 E が元の値 E_0 とは異なってきてしまうことも多く、(3.11) の正確な見積もりのためには E の値も見積もっておかなければならない。十分に時間が経って $k_{\max} \ll k_\eta$ になったとすると、 E の値は (3.8) から

$$E \cong E_0 \frac{k_\eta^2 - k_f^2}{k_\eta^2} \quad (\text{for } k_{\max} \ll k_\eta) \quad (3.12)$$

と見積もることができる。

3.2 スケーリング則の係数

理論的に見積もった (3.10) 式や (3.11) 式には、問題設定で与えるパラメータからだけでは決められない量がまだ二つ含まれている。一つはエネルギー散逸が起こる波数 k_η であるが、これは第 3.3 節で具体的な散逸項の形が与えられてから見積もりを行なう。もう一つは、Watanabe et al. (1998) のスケーリング理論では決められていない比例係数である。この節で簡単な仮定に基づいてその値を見積もることを試みる。

$k_{\max} \ll \lambda$ の場合の (2.4) の係数だけでなく、 $k_{\max} \gg \lambda$ の時の係数についても同時に考察する。(2.4) と同様にして $k_{\max}$ が大きな極限での $k_{\max}$, $E_{\max}$ の時間依存性の形も求めることができ、両極限での $k_{\max}$, $E_{\max}$ は

$$k_{\max} \cong \begin{cases} C_{ks} E^{-\frac{1}{8}} \lambda^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{1}{4}}, & k_{\max} \ll \lambda, \\ C_{kl} E^{-\frac{1}{2}} t^{-1}, & k_{\max} \gg \lambda, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$E_{\max} \cong \begin{cases} C_{Es} E^{\frac{9}{8}} \lambda^{-\frac{3}{4}} t^{\frac{1}{4}}, & k_{\max} \ll \lambda, \\ C_{El} E^{\frac{3}{2}} t, & k_{\max} \gg \lambda \end{cases} \quad (3.14)$$

と書ける。但し $C_{ks}, C_{kl}, C_{Es}, C_{El}$ は比例定数で、この節ではこの係数の見積りを行なうことになる。

まず、 $k_{\max}$, $E_{\max}$ の漸近形は本来 $k_{\max} \gg \lambda$ (または $k_{\max} \ll \lambda$) の時に成り立つものであるが、これらが $k_{\max} > \lambda$ (または $k_{\max} < \lambda$) でありさえすれば、 λ に近い領域でも成り立つと仮定する。 $k_{\max}$ が λ になる時刻を t_λ とする ($k_{\max}(t_\lambda) = \lambda$)。 $k_{\max} < \lambda$ では $k_{\max} \cong C_{ks} E^{-\frac{1}{8}} \lambda^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{1}{4}}$ が成り立つから、時刻 $t = t_\lambda$ における関係式から $t_\lambda \cong C_{ks}^4 E^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-1}$ となるが、一方、 $k_{\max} > \lambda$ では $k_{\max} \cong C_{kl} E^{-\frac{1}{2}} t^{-1}$ だから時刻 $t = t_\lambda$ における関係式から $t_\lambda \cong C_{kl} E^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-1}$ となり、両者が一致する条件より

$$C_{kl} \cong C_{ks}^4 \quad (3.15)$$

の関係式を得る。

同様にして (3.14) 式を用いると、時刻 $t = t_\lambda (\cong C_{ks}^4 E^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-1})$ における $E_{\max}$ に関して、 $k_{\max} < \lambda$ の関係式から導かれる $E_{\max}(t_\lambda) \cong C_{Es} C_{ks} E \lambda^{-1}$ と $k_{\max} > \lambda$ の関係式から導かれる $E_{\max}(t_\lambda) \cong C_{El} C_{ks}^4 E \lambda^{-1}$ が一致する条件から次の関係式を得る。

$$C_{El} \cong C_{Es} C_{ks}^{-3}. \quad (3.16)$$

次にエネルギースペクトルと全エネルギーとを関係づける拘束条件について考えよう。 $k_{\max} \gg \lambda$ の場合, $k_{\max} < k < \lambda$ におけるエネルギースペクトルは (2.3) で示したように k^{-5} に比例する。一方, $k < k_{\max}$ におけるエネルギースペクトルの形は指数の正確な値についてはまだ議論の余地があるが, Watanabe et al. (1998) の結果によると k^4 に比例するようである。 $k = k_{\max}$ でのピーク値が $E_{\max}$ であるので, このエネルギースペクトルの形を積分することにより全エネルギー E は,

$$E = \int_0^\infty dk E(k) \cong \int_0^{k_{\max}} dk k^4 k_{\max}^{-4} E_{\max} + \int_{k_{\max}}^\infty dk k^{-5} k_{\max}^5 E_{\max} = \frac{9}{20} k_{\max} E_{\max} \cong \frac{9}{20} C_{ks} C_{Es} E \quad (3.17)$$

と計算され,

$$C_{ks} C_{Es} \cong \frac{20}{9} \quad (3.18)$$

という関係を得る。

係数を決定するにはもう一つの条件がある。ここでは初期における乱流場形成過程に注目し, 「コヒーレントな初期の擾乱のエネルギーが再配分されるのにかかる時間は, 乱流の平均速度の流体粒子が波の1波長を進むのにかかる時間である」と仮定する。この仮定により, 流体粒子が1波長 l_f 進むのにかかる時間 t_0 は

$$t_0 \cong \frac{l_f}{v_0} = \frac{C_0}{k_f v_0} \cong C_0 k_f^{-1} (2E)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{但し } C_0 = 2\pi \quad (3.19)$$

と見積もられる。ここで, 初期に与える擾乱の波数 k_f は λ より十分に大きく, 全エネルギー E の大部分は運動エネルギー $v_0^2/2$ が占めるもの仮定とした。(3.19) を $k_{\max} \gg \lambda$ で成り立つ $k_{\max} \cong C_{kl} E^{-\frac{1}{2}} t^{-1}$ に代入すると $k_f \cong C_{kl} E^{-\frac{1}{2}} \cdot C_0^{-1} k_f 2^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}}$ となり, もう一つの条件を得る。

$$C_{kl} \cong 2^{-\frac{1}{2}} \cdot C_0. \quad (3.20)$$

以上で4つの未知定数に対して4つの関係式が揃った。(3.15), (3.16), (3.18), (3.20) から4つの係数 $C_{ks}, C_{kl}, C_{Es}, C_{El}$ は次のように決定される。

$$C_{ks} = 2^{-\frac{1}{8}} \cdot C_0^{\frac{1}{4}}, \quad C_{kl} = 2^{-\frac{1}{2}} \cdot C_0, \quad C_{Es} = \frac{20}{9} 2^{\frac{1}{8}} \cdot C_0^{-\frac{1}{4}}, \quad C_{El} = \frac{20}{9} 2^{\frac{1}{2}} \cdot C_0^{-1}. \quad (3.21)$$

3.3 超粘性率を用いたエネルギー散逸量の見積り

この系での全エネルギーの散逸量を, 高波数側に輸送されるエネルギーとして見積もってきたが, 実際に数値実験を行なう時にはこの高波数側に輸送されるエネルギーが切断波数付近に溜ってしまうので, (2.1) 式の D として, 小さくても有限の大きさの散逸項を考えることになる。Watanabe et al. (1998) でも D として小さな超粘性項を用いた

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi - \lambda^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) = \nu (-1)^{p+1} \nabla^{2(p+1)} \psi \quad (3.22)$$

を時間積分している。この基礎方程式 (3.22) には散逸項が明示されているので, もしエネルギースペクトルの形がわかれば直接エネルギーの散逸量を計算することもできる。

まず, k_η は全エネルギー散逸と全エントロフィー散逸の比から $k_\eta^2 \equiv \dot{Q}/\dot{E}$ と計算されるが, 散逸は主に切断波数 k_c に近い高波数側で起き, $k \gg \lambda$ を満たすこの範囲ではエネルギースペクトルは $E(k) \propto k^{-3}$ になることから,

$$k_\eta^2 \cong \frac{p-1}{p} k_c^2 \quad (3.23)$$

となる.

さて, これまでの結果を用いて (3.11) で与えられた全エネルギー減衰率の計算を行なうことができる. (3.11) の中で用いられる E は (3.12) により $E \cong E_0(k_\eta^2 - k_f^2)/k_\eta^2$ で, k_η は (3.23) により $k_\eta \cong [(p-1)/p]^{1/2} k_c$ で見積もり, Watanabe et al. (1998) で用いた $E_0 = 0.5$, $\lambda = 40$, $k_f = 50$, $k_c = 85$, $p = 2$ を代入し, 彼らが評価に用いたと思われる時刻として $t = 15$ をとることにより,

$$\theta \cong 0.03 \quad (3.24)$$

となる. このようにして理論的に導いた結果は Watanabe et al. (1998) が数値計算から見積もった $\theta = 0.05$ にかなり近い値を与えた.

ところで, エネルギースペクトルの具体的な形が理論的に求まっているので, エネルギー散逸は超粘性率の値から直接見積もることができる. $k > \lambda$ の範囲では $E(k)$ は k^{-3} に比例して

$$E(k) = k^{-3} E(\lambda) \lambda^3 \cong C_{ks}^5 C_{Es} E^{1/2} \lambda t^{-1} k^{-3} \quad (3.25)$$

となるので, エネルギー散逸は主に切断波数 k_c に近い高波数側で起こることを考え, その領域での具体的な形 (3.25) を用いて,

$$\begin{aligned} \dot{E}_b \equiv \frac{dE}{dt} &\cong -2\nu \int_0^{k_c} k^{2p} \cdot C_{ks}^5 C_{Es} E^{1/2} \lambda t^{-1} k^{-3} dk \\ &\cong -\frac{1}{p-1} \nu C_{ks}^5 C_{Es} k_c^{2(p-1)} E^{1/2} \lambda t^{-1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

を得るのである.

この $\dot{E}_b$ と (3.10) の $\dot{E}_a$ とは本来同じものになるべきのものであるが, 実際に Watanabe et al. (1998) で数値実験の数値を代入すると, $E = 0.5 \times [(85^2/2) - 50^2]/(85^2/2) \cong 0.15$, $\lambda = 40$, $k_\eta = 85/2^{1/2} \cong 60$, $t = 15$ として

$$\dot{E}_a \cong -3 \times 10^{-4}$$

なのに対して, $E \cong 0.15$, $\lambda = 40$, $k_c = 85$, $p = 2$, $\nu = 3.0 \times 10^{-8}$, $t = 15$ として

$$\dot{E}_b \cong -2 \times 10^{-3}$$

となり, 後者の方が絶対値が1桁大きく, 与えた超粘性率が大き過ぎることを示している. 逆に, (3.10), (3.26) の両者が等しくなるという条件から, ちょうどよい超粘性率の値を定めると,

$$\nu \cong \frac{p-1}{2} C_{ks}^{-3} C_{Es}^{-1} E^{1/4} \lambda^{1/2} k_\eta^{-2} k_c^{-2(p-1)} \cdot t^{-1/2} \quad (3.27)$$

と計算される.

4 数値計算

この節では、数値計算を行なった結果を示す。数値積分する式は (3.22) である。切断波数 $k_c = 85$ 、変換格子 256×256 の擬スペクトル法を用いて数値計算を行なった。システムの領域は周期境界を持つ $2\pi \times 2\pi$ で、ロスビー変形半径の逆数は $\lambda = 40$ とする。散逸は $p = 2$ の超粘性を用いる。この時、超粘性係数の適当な値を (3.27) から見積もって $\nu = 2 \times 10^{-8} \cdot t^{-\frac{1}{2}}$ とした。与える初期擾乱はエネルギースペクトルが

$$E(k) \propto \frac{k^{30}}{(k + k_f)^{60}}, \quad E = \int E(k) dk = 0.5. \quad (4.28)$$

となるようにしてあるが、このエネルギースペクトルは $k = k_f$ に鋭いピークを持つ。ここでは $k_f = 50$ という値を用い、各波数成分には乱数で位相を与えた。以上の条件は本質的に超粘性率が異なるだけで、Watanabe et al. (1998) とほぼ同じ条件である。

図 2 に流線関数場の時間発展の様子を示す。パターンが時間とともにゆっくりと大きくなっていき、エネルギーの逆カスケードが起こっていることが明らかにわかる。この時のエネルギースペクトルを図 3 に示す。Watanabe et al. (1998) ではエネルギースペクトルが k^{-6} に比例してしまっていたのに対して、 $\nu = 2 \times 10^{-8} \cdot t^{-\frac{1}{2}}$ の超粘性率を用いた計算は理論的に予想されるエネルギースペクトル (2.3) をよく実現している。さらに、この時間発展に伴う諸量の振舞いを見てみよう。

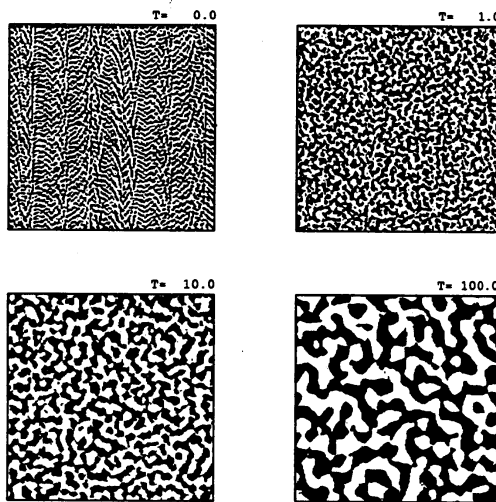


図 2: 流線関数の時間変化の様子。時間とともにパターンのスケールがゆっくりと大きくなっている。

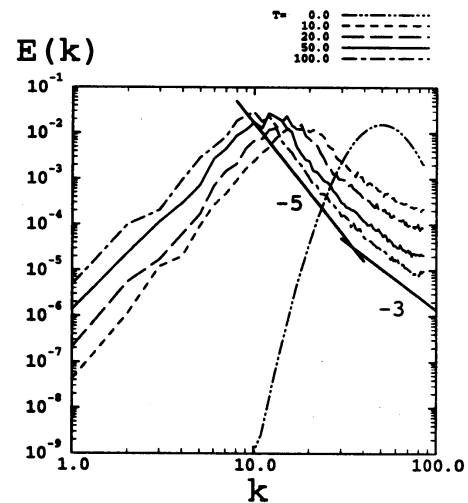


図 3: $p = 2, \nu = 2 \times 10^{-8} \cdot t^{-\frac{1}{2}}$ のを用いた数値計算で得られるエネルギースペクトル。 $k < \lambda$ では k^{-5} に、 $k > \lambda$ では k^{-3} に比例している。

図 4 は $k_{\max}$ の時間変化を示してある。理論で予想されるように $t^{-\frac{1}{2}}$ に比例して時間変化しているが、それだけでなく、実線で示されている (3.13) の理論結果は絶対値としてもかなりいい見積もりとなっていることがわかる。また、図 5 は全エネルギーの時間変化を示す。全エネルギーはゆっくりと減衰しているが、時刻 $t = 10 \sim 20$ 付近では $t^{-0.05}$

に比例しており、この指数の値は Watanabe et al. (1998) のとほぼ同じである。また、実線で示される理論の見積もりともかなりよい一致を示す。

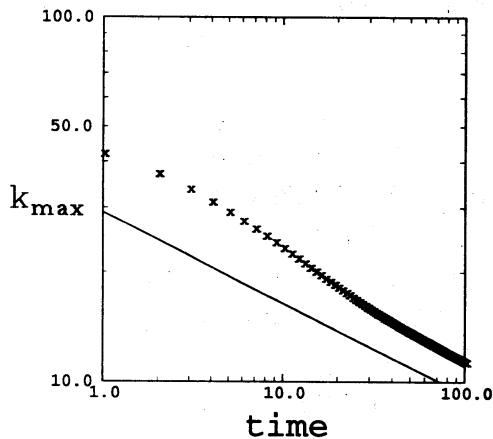


図4: エネルギースペクトルのピーク波数 $k_{\max}$ の時間変化. ほぼ $t^{-1/4}$ に比例して小さくなっている. 実線は (3.13) の理論解.

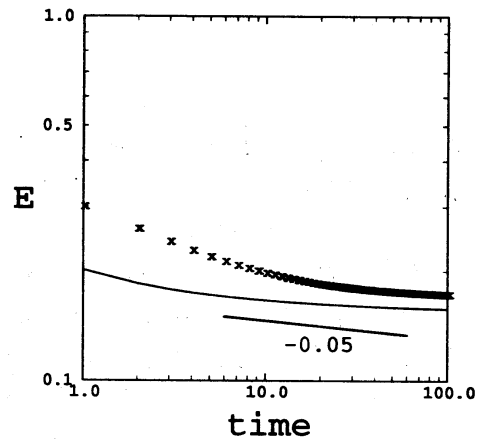


図5: 全エネルギーの時間変化. $t = 20$ 付近に注目すると、全エネルギーはほぼ $t^{-0.05}$ に比例して減少しているとみなせる. 実線は (3.8) と (3.13) から計算された理論解.

5 まとめ

準地衡流乱流の動的スケーリング則の係数を見積もった。これを用いて、全エネルギーの減少量を理論的に見積もることができ、Watanabe et al. (1998) によって行なわれた準地衡流乱流の冪乗則の修正理論を完成させた。また、この議論によって Watanabe et al. (1998) で用いられた超粘性率が大き過ぎたことを示し、本論文の理論で示唆される適切な超粘性率を用いて数値計算をし直すことにより、理論的に予想されるエネルギースペクトルが得られた。今回の結果は通常は経験的に定める人工的な超粘性率の適切な値を決めることができる可能性を示している。

参考文献

- Fjørtoft, R. (1953) On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for twodimensional, nondivergent flow, *Tellus*, **5**, 225-230.
- Watanabe, T., H. Fujisaka and T. Iwayama (1997) Dynamical scaling law in the development of drift wave turbulence, *Phys. Rev. E*, **55**, 5575-5580.
- Watanabe, T., T. Iwayama and H. Fujisaka (1998) Scaling law for coherent vortices in decaying drift Rossby wave turbulence, *Phys. Rev. E*, **57**, 1636-1643.