

Ribbon 2-knot の分解について

神戸大学 (教育) 安田 智之

任意の自然数 n に対し K_n を n -knot type $[K^n \subset S^{n+2}]$ 全体の集合とする。 $n \neq 2$ なる任意の元 $[K^n \subset S^{n+2}]$ に対し、 K^n を prime decomposition $[K^n \subset S^{n+2}] = [K_1^n \subset S^{n+2}] \# \cdots \cdots \# [K_n^n \subset S^{n+2}]$ と分解するとし、特に $n=1$ の時 decomposition が unique であること、がわかっている。([S, p.347])

$n=2$ について同様の問題が考えられるが、まだ未解決である。ここには少なくとも二つの困難がある。まず 2-knot については、二つの unknot でない knot の composition が unknot でないとは言い切れない。従って decomposition が有限回の操作でおわるかどうかかわからない。また 2-knot K^2 について、 $\pi_1(K^2) = \mathbb{Z}$ であっても K^2 が unknot とは限らない。依って primeness の判定が難しい。

ここでは 2-knot を考える上で対象を ribbon 2-knot に限定し、本来の decomposition ([So, p.140]) よりきつい条件で定

義した $\oplus$ -decomposition なる概念を導入し、分解問題を考える。

定義 1 $\mu \geq 1$ に対し μ -component の trivial 2-link

$(O_1^2 \cup \dots \cup O_\mu^2 \subset S^4)$ から適当な embeddings

$B_1^+, \dots, B_{\mu-1}^+ : I \times D^2 \longrightarrow S^4$ に沿った fusion によって得られる 2-knot を ribbon 2-knot という。 (D^2 は 2-disk)

Ribbon 2-knot に対しては次の様な特徴づけが知られている。

定理 2 ([Y1, P453]) K^2 が ribbon 2-knot である為の必要十分条件は、 K^2 のある Seifert 3-manifold W^3 が存在して、 W^3 が次の ① 或いは ② の条件を満たす事である。

① $W^3 \cong D^3$ (D^3 は 3-disk)

② $W^3 \cong S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1 - \Delta^3$ (Δ^3 は 3-simplex) で、

かつ W^3 は trivial system of 2-spheres をもつ。

ここに W^3 が trivial system of 2-spheres をもつ、とは W^3 の中の互いに disjoint な 2-spheres の collection $\{S_1^2, S_2^2, \dots, S_{2r-1}^2, S_{2r}^2\}$ があって次の (1) ~ (3) を満たす事を言う。

(1) $S_1^2 \cup S_2^2 \cup \dots \cup S_{2r-1}^2 \cup S_{2r}^2$ は S^4 の trivial 2-link

(2) $S_i^2 \cup S_{i+r}^2$ は W^3 で $N_i \cong S^2 \times I$ を bound し、 $N_i \cap N_j = \emptyset$ ($i \neq j$)

(3) $Cl(W^3 - N_1 - \dots - N_r) \cong S^3 - (2r+1) \text{ の open 3-disks}$

従って以下の一連の概念がきっちり定義される。

定義3 Ribbon 2-knot K^2 の ribbon genus $g(K^2)$ を次で定義する。 K^2 の Seifert manifold を W^3 とする時 W^3 を可能な限りはりかえた時の $\text{rank } H_1(W^3)$ の最小値を K^2 の ribbon genus と定める。また $g(K^2)$ を attain する W^3 を K^2 の minimal Seifert manifold という。

定義4 Ribbon 2-knot K^2 の $\oplus$ -decomposition を次で定義する。 K^2 に対しある $(S^3 \subset S^4)$ とある K^2 の minimal Seifert manifold $(W^3 \subset S^4)$ とがあって次の①, ②, ③を満たすとする。

① $S^3 \cap K^2 = \mathbb{R}$ は S^3 で unknotted

② $S^3 \cap W^3 = d^2$ は 2-disk

③ $d^2 \cap (W^3 \text{ の trivial system of 2-spheres }) = \emptyset$

この時、 $K^2 - d^2 = K_1^2 \cup K_2^2$ ($K_1^2 \cap K_2^2 = \emptyset$), $K_1^2 = K_1^2 \cup d^2$, $K_2^2 = K_2^2 \cup d^2$ とおく。 K_1^2 と K_2^2 が各々 trivial knot でないならば

$$(K^2 \subset S^4) = (K_1^2 \subset S^4) \oplus (K_2^2 \subset S^4)$$

とあらわし、 K^2 は2つの 2-knot K_1^2, K_2^2 に $\oplus$ -decomposition されるという。また K_1^2 と K_2^2 を K^2 の $\oplus$ -factor と呼ぶ。そしてこの様に $\oplus$ -factor に分解できない ribbon 2-knot は

$\oplus$ -prime であるという。

依って次の二つの命題を示す事により分解問題を考える事が

できる様になる。

命題 5 Ribbon 2-knot K^2 の $\oplus$ -factors K_1^2, K_2^2 はまた ribbon 2-knot である。

《証明》 $W^3 \cong \#_{i=1}^n (S^2 \times S^1)_i - \Delta^3$ とする。定義 4 の ①, ② より $W^3 = W_1^3 \cup W_2^3$ と書け, (i) $W_1^3 \cong \#_{j=1}^l (S^2 \times S^1)_j - \Delta_1^3, \partial W_1^3 = K_1^2 \cong \partial \Delta_1^3$,
(ii) $W_2^3 \cong \#_{k=l+1}^n (S^2 \times S^1)_k - \Delta_2^3, \partial W_2^3 = K_2^2 \cong \partial \Delta_2^3$, とする。

ここで $j=1, 2, \dots, l, k=l+1, l+2, \dots, n$ としてよい。更に定義 4 の ③ から W_1^3, W_2^3 は各々 (i), (ii) に対応する 2-sphere の trivial system をもつ。 (命題 5 証了)

命題 6 $K^2 = K_1^2 \oplus K_2^2$ とすると $g(K^2) = g(K_1^2) + g(K_2^2)$ が成立する。

《証明》 K^2 の minimal Seifert manifold を $W^3 = W_1^3 \cup W_2^3$ とおく。この時、

$$\begin{aligned} g(K^2) &= \min_{W^3} \text{rank } H_1(W^3) \\ &= \text{rank } H_1(W_1^3) + \text{rank } H_1(W_2^3) \\ &\geq g(K_1^2) + g(K_2^2) \\ &= \text{rank } H_1(W_1^{3*}) + \text{rank } H_1(W_2^{3*}) \\ &\quad (W_i^{3*} \text{ は } K_i^2 \text{ の genus を attain する Seifert 3-manifold}) \\ &= \text{rank } H_1(W_1^{3*} \cup W_2^{3*}) \\ &\geq g(K^2) \\ &\quad (W_1^{3*} \cup W_2^{3*} \text{ は } K^2 \text{ の Seifert 3-manifold}) \quad (\text{命題 6 証了}) \end{aligned}$$

系7 $g(K^2) = 1$ の時

系8 各 2-knot について $\oplus$ -factor 数は有限である。

ところで分解問題を考える前に次の命題を示す。

命題9 任意の非負整数 n に対し、ribbon genus n の ribbon 2-knot が存在する。

この命題を証明する為に以下準備を行なう。

注意10 任意の自然数 n に対し Alexander polynomial として n 次式を持つ様な ribbon 2-knot K^2 で $g(K^2) = n$ なるものを見つける。そうすれば次の補題11により命題9は証明された事になる。

補題11 Ribbon genus g の ribbon 2-knot K^2 に対して次の不等式が成立する。

$$(\Delta_{K^2}(t) \text{ の degree }) \leq g$$

補題11は下の定理12, 13, 14から直ちに示される。

[Y1, P.458] より、ribbon 2-knot K^2 の standard representative として $\mathbb{R}^3$ に対して対称なものをとれる。以後、ribbon 2-knot の standard representative としていつもこれを考え、その equatorial cross section $K^2 \cap \mathbb{R}_0^3$ を K^2 の equatorial 1-knot と言う。

定理12 [Y2, P.100] Ribbon genus g の ribbon 2-knot K^2 には genus g 以下の equatorial 1-knot k^1 が存在する。

定理13 [R0, P.208] 1-knot k に対して $g(k) = g$ とすると、次の不等式が成立する。 $\deg \Delta_k(t) \leq 2g$

定理14 [Y0, P.35] (1) 任意の ribbon 2-knot は principal first elementary ideal をもつ。(2) ribbon 2-knot $(K^2 \subset \mathbb{R}^4)$ の equatorial cross section を $(k \subset \mathbb{R}^3)$ とする時、次の式が成立する。“ $\equiv$ ” は mod $\pm t^\lambda$ で両辺が等しい事を示す。

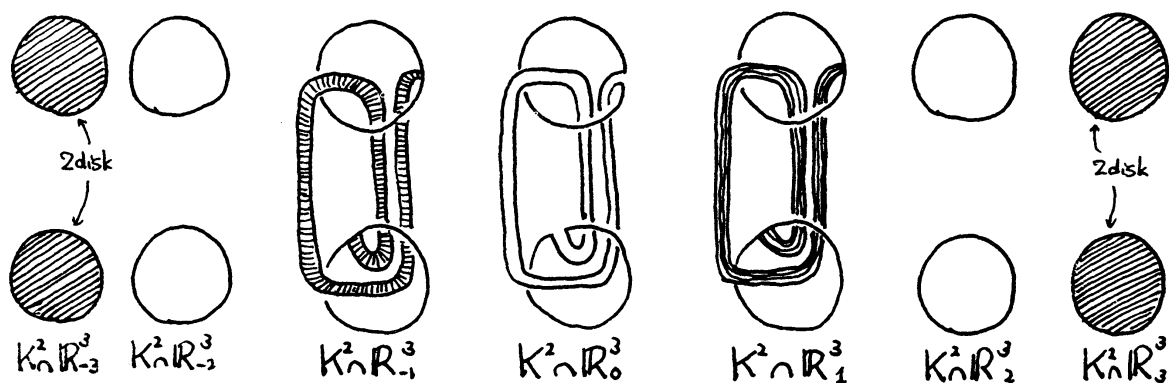
$$\Delta_k(t) \equiv \Delta_{K^2}(t) \times \Delta_{K^2}(t^{-1})$$

(補題11証了)

《命題9の証明》

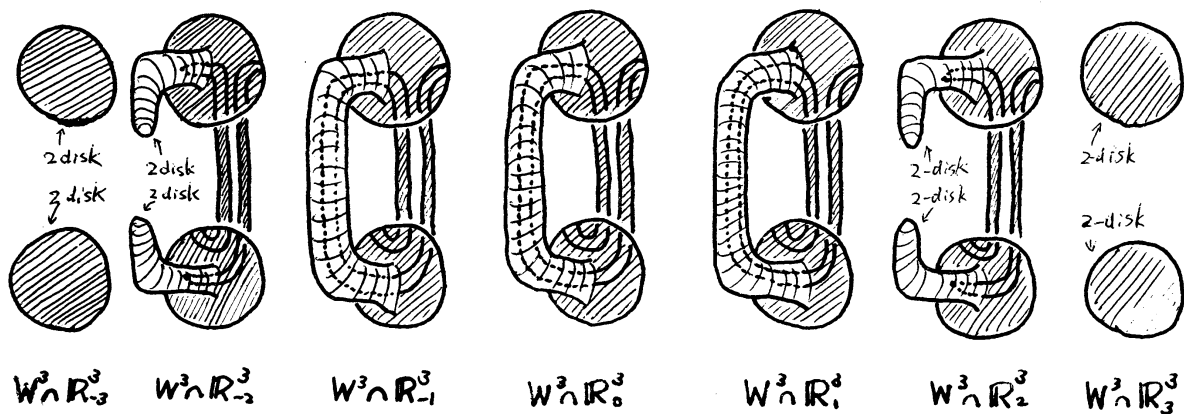
($n=0$ の場合) unknotted は ribbon 2-knot O^2 は 3-disk を bound するので ribbon genus の定義により $g(O^2) = 0$ である。

($n=1$ の場合) 次の ribbon 2-knot K^2 を考える。



$\Delta_{K^2}(t) = 2t - 1$ である。一方 K^2 には次の様な Seifert

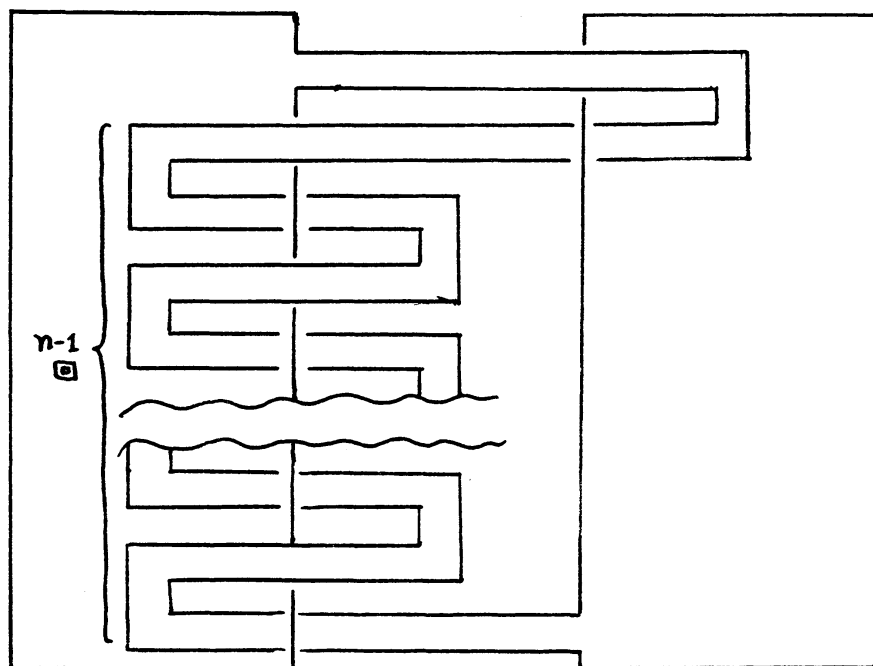
3-manifold $S^2 \times S^1 - \Delta^3 \cong W^3$ をはる事が出来る。



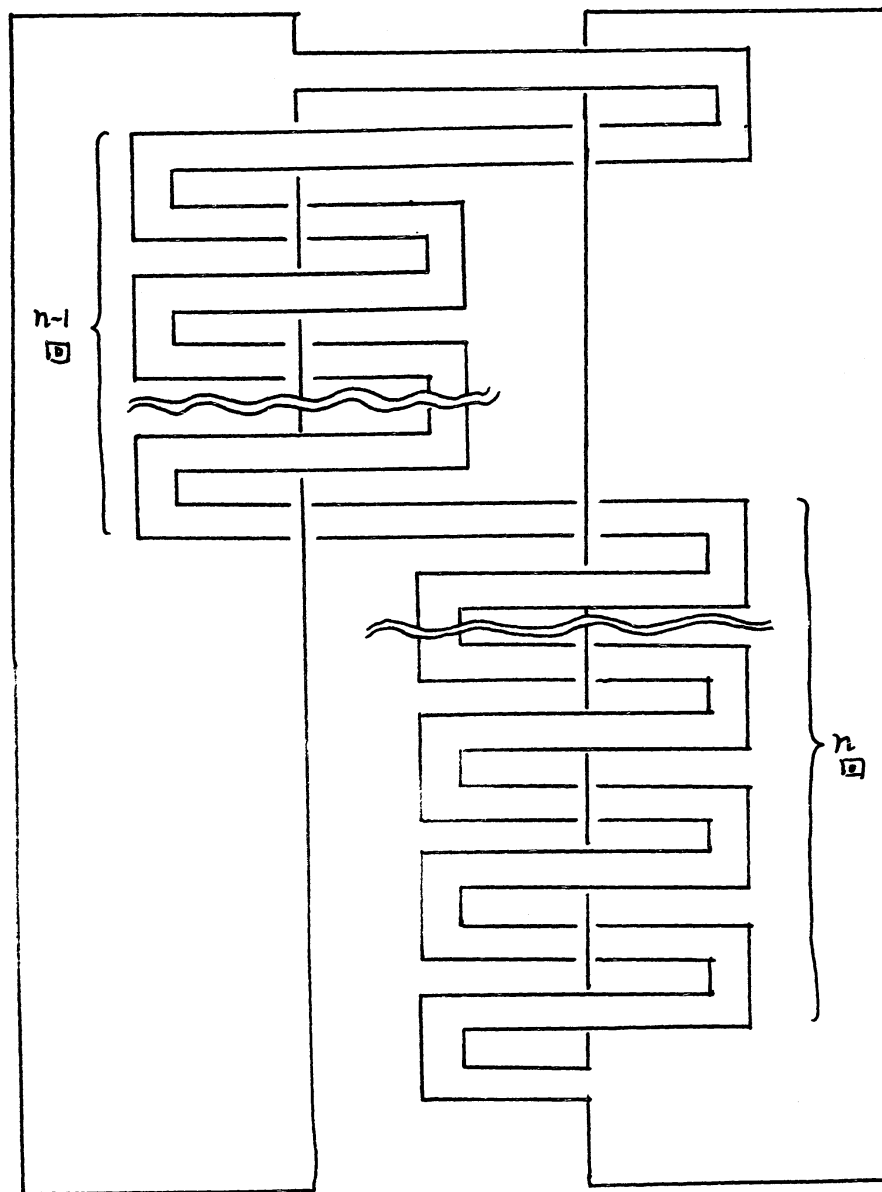
従って注意10より K^2 は ribbon genus 1 の ribbon 2-knot である。

($n \geq 2$ の場合) equatorial 1-knot を指定する。あとは、

$n = 1$ の例と同様に自然に各 cross section を与えて 2-knot を構成するものとする。



この ribbon 2-knot K^2 の Alexander polynomial は. Kinoshita ([K, P520]) に従えば $t^n - t + 1$ である。下に図示した様に K^2 には Seifert 3-manifold $\#_{i=1}^n (S^2 \times S^1)_i - \Delta^3$ をはる事が出来る。従って注意10より $q(K^2) = n$ である。まず K^2 を knot type を変えないように変形した上で Seifert manifold W^3 をはる。 $W^n \mathbb{R}^3$ のみ示す。



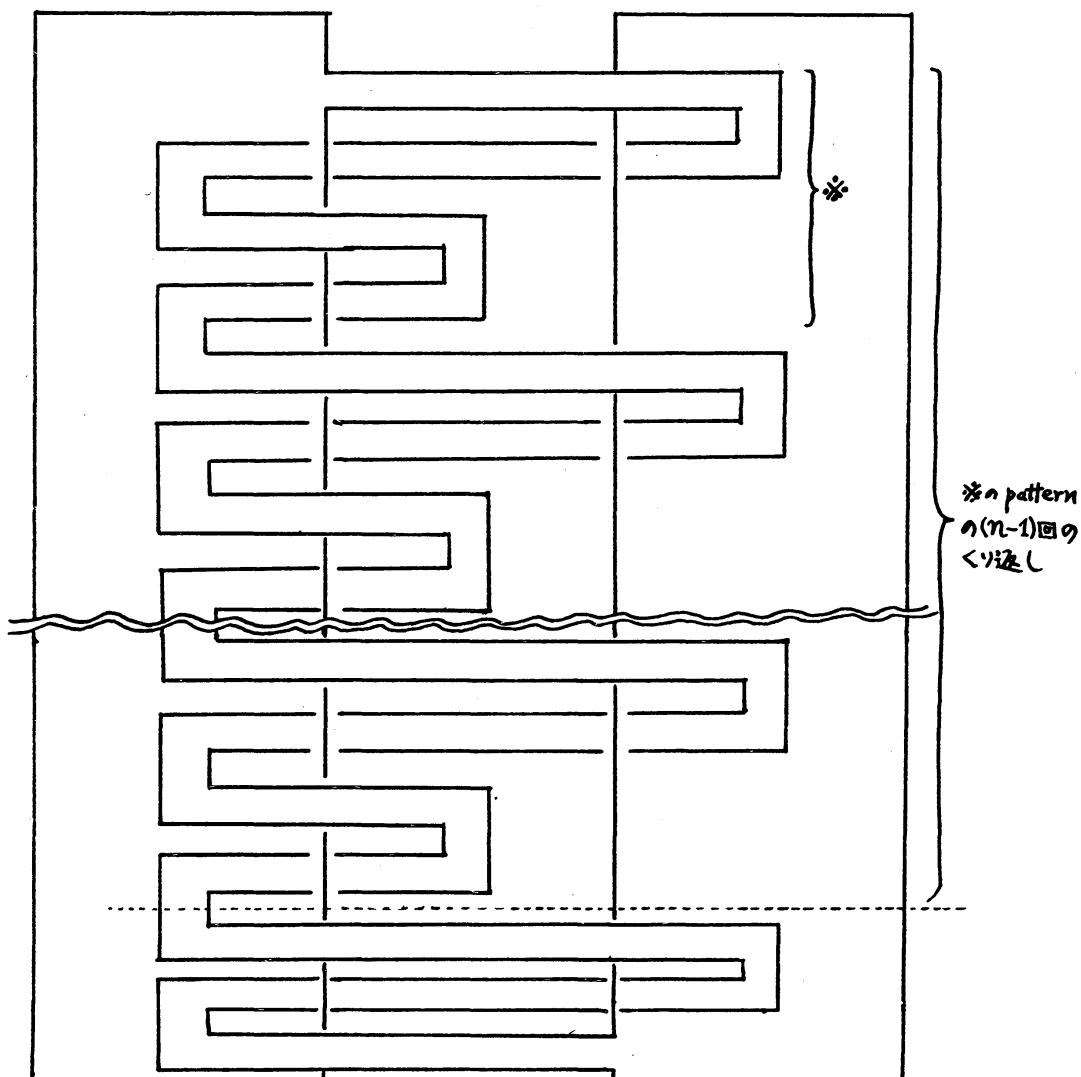
(命題9証了)

注意15 研究集会では上の ($n \geq 2$ の場合) で構成した

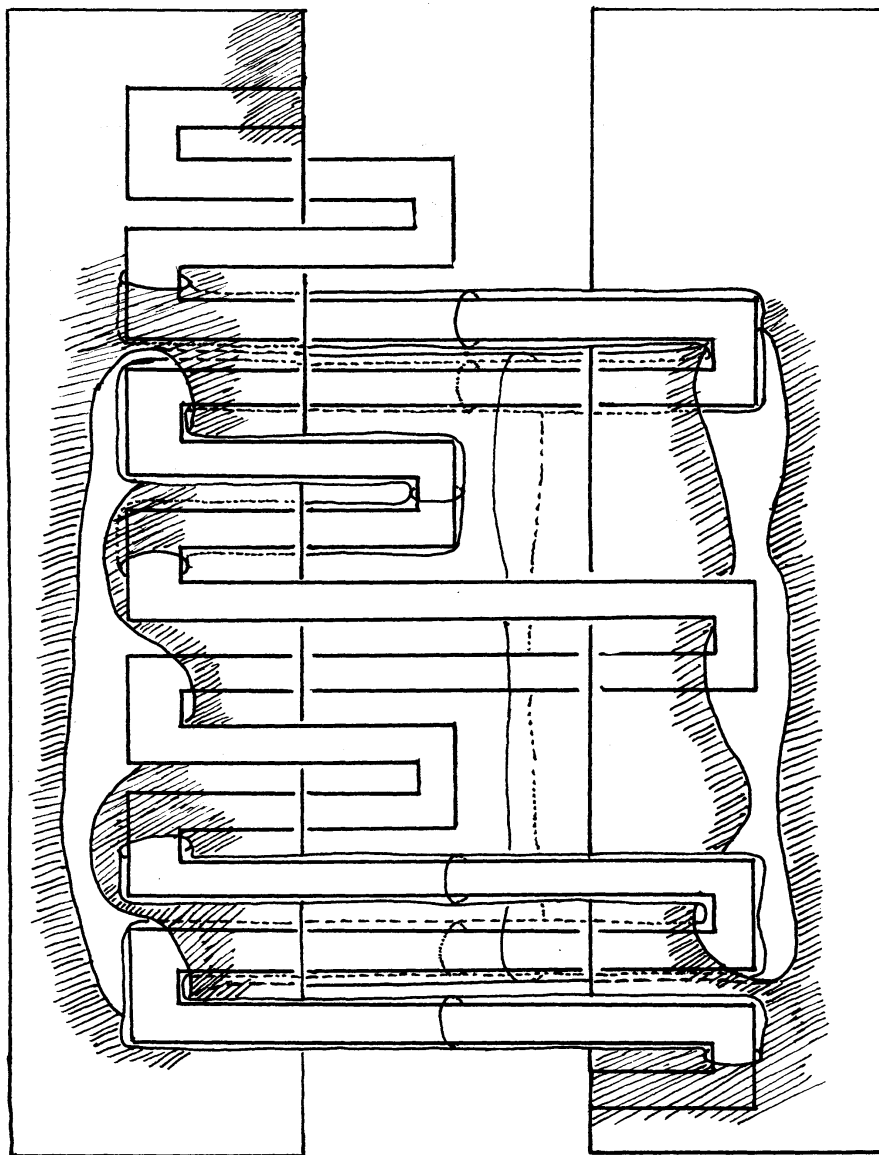
ribbon 2-knot がすべての n についておそらく $\oplus$ -prime であろうと述べたが、 $t^n - t + 1$ は $n = 8$ のとき

$$(t^2 - t + 1)(t^6 + t^5 - t^3 - t^2 + 1) \quad \text{と因数分解され、}$$

$\oplus$ -prime でない可能性の出る事がのちにわかった。しかしながらその後 $n \geq 1$ はる n に対し Alexander polynomial として整数係数の範囲で既約な多項式をもち、しかも Seifert manifold $\#_{n-1} (S^2 \times S^1) \setminus \Delta^3$ をもつ ribbon 2-knot が構成できた。



この 1-knot を equatorial 1-knot として、《命題 9 の証明》
 の方法で自然に構成した ribbon 2-knot は $\sharp - 2$ なる
 Alexander polynomial をもつ。これに Seifert 3-manifold
 $W^3 \cong \# (S^2 \times S^1) \cup \Delta^3$ をはったときの $W^3 \cap \mathbb{R}^3$ を示せばよいが、
 はり方の pattern は同じなので $n=3$ の図を掲げる。



以上により命題9はもっと強められ、「任意の自然数 n に対して ribbon genus n の $\oplus$ -prime ribbon 2-knot が存在する」と改める事ができる。

最後に ribbon genus n ($n \geq 0$) の ribbon 2-knot について各分解問題を考える。

《 $g(K^2) = 0$ のとき 》 定義より K^2 は unknot であり、

$\oplus$ -prime である。

《 $g(K^2) = 1$ のとき 》 K^2 は系7より $\oplus$ -prime である。

$g(K^2) = 1$ なる K^2 については次の定理がある。

定理16 [Y2, P100] Alexander polynomial で knot type かきまる。
(但し unoriented knot として)

次の事は、[C-F, chapter 8] の Alexander polynomial の定義の仕方と、 $\oplus$ -decomposition の定義からすぐ出る。

命題17 $K^2 = K_1^2 \oplus K_2^2$ ならば $\Delta_{K^2}(t) \doteq \Delta_{K_1^2}(t) \times \Delta_{K_2^2}(t^{-1})$

《 $g(K^2) = 2$ のとき 》 命題17より $\Delta_{K^2}(t)$ が一次以下なら、

K^2 は $\oplus$ -prime である。次に $\Delta_{K^2}(t)$ が二次式とする。

$K^2 = K_1^2 \oplus K_2^2$ とすると命題6より $g(K_1^2) = g(K_2^2) = 1$ である。

従って補題11と命題17から $\Delta_{K^2}(t)$ と $\Delta_{K^2}(t)$ は各々一次式である。依って因数分解の一意性と定理16から次のことが言える。

命題18 $g(K^2) = 2$ なる K^2 は $\oplus$ -decomposition に関し、分解が unique である。

同様に定理16と因数分解の一意性より次の事は言える。

命題19 $g(K^2) = n$ ($n \geq 3$) なる K^2 に対し、これが n 個の 2-knot に分解されるとする。加えて $\Delta_{K^2}(t)$ が、一次式の積に因数分解されるとする。この時、 $\oplus$ -decomposition に関し、分解は unique である。

命題20 $g(K^2) = 3$ で $\Delta_{K^2}(t) = 1$ ならば K^2 は $\oplus$ -prime である。

* 参考文献 *

- [S] Shin'ichi Suzuki : Knotting Problems of 2-spheres in 4-sphere, Math. Sem. Notes Kobe Univ., vol 4 No.3 (1976) 241-371

- [So] Sosinskii A.B. : Decomposition of knots , Math.
USSR Sbornik 10 (1970)
- [Y1] Takaaki Yanagawa : On ribbon 2-knots , the
3-manifold bounded by the 2-knots , Osaka J. Math.
vol 6 (1969) 447-464
- [Y2] Takaaki Yanagawa : A note on ribbon n -knots
with genus 1 , Kobe J. Math , vol 2 (1985) 99-102
- [Ro] D. Rolfsen : Knots and Links , Publish or
Perish Inc., Barkley 1976
- [K] Shin'ichi Kinoshita : On the Alexander polynomials
of 2-sphers in a 4-sphere , Ann. of Math. vol 74
(1961) 518-531
- [Yo] Katsutoshi Yonebayashi : On the Alexander
polynomial of ribbon 2-knots , Master's thesis
Kobe Univ. 1969
- [C-F] R.H. Crowell and R.H. Fox : Introduction to
knot theory , Grad. Texts in Math. vol 57
Springer - Verlag New York and Berlin 1977